

A.A. 2012-2013

PROGRAMMA.

N.B. Solo gli argomenti contrassegnati con un asterisco sono completi di dimostrazione.

Insiemi numerici. Numeri naturali, razionali e irrazionali. Insiemi finiti e infiniti. Maggioranti, minoranti, insiemi limitati. Estremo superiore ed inferiore: definizione e proprietà caratteristiche. Numeri reali. Definizione assiomatica: proprietà algebriche, ordinamento, completezza. Espansione decimale dei numeri reali. Densità dei razionali*. Approssimabilità dei reali coi razionali*. Intervalli. Valore assoluto e distanza sulla retta. Intorni.

Successioni numeriche. Successioni convergenti e divergenti. Teorema di unicità del limite* e teorema di limitatezza delle successioni convergenti*. Teorema di confronto*. Teorema del modulo*. Teorema di permanenza del segno*. Operazioni tra successioni convergenti (* nel caso del prodotto) e tra successioni divergenti. Forme indeterminate. Successioni monotone e teorema di esistenza del loro limite*. Il numero di Nepero e . Successioni infinitesime e infinite: loro confronto. Il simbolo di Landau o . Principio di sostituzione*. Infiniti di ordine crescente. Limiti notevoli*. Infiniti e infinitesimi equivalenti.

Serie numeriche. Definizione. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Somma di una serie. Serie geometrica*, serie armonica e serie armonica generalizzata*. Serie di Mengoli. Condizione necessaria per la convergenza di una serie*. Serie a termini positivi: monotonia della successione delle ridotte*, criterio del confronto*, criterio del confronto asintotico*, criterio della radice*, del rapporto*. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz*. Convergenza assoluta. Rapporto tra convergenza semplice e convergenza assoluta*.

Funzioni reali di una variabile reale. Definizione. Dominio. Immagine. Restrizioni. Grafico. Funzioni elementari: funzioni lineari, valore assoluto, funzioni potenza, polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi, funzioni periodiche, funzioni trigonometriche. Definizione di limite secondo Heine. Limite destro, limite sinistro e rapporto col limite. Funzioni divergenti. Asintoti orizzontali, verticali, obliqui. Teorema di unicità del limite. Teorema di permanenza del segno e teorema di confronto. Operazioni sui limiti. Forme indeterminate. Limiti notevoli per esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche*. Infiniti e infinitesimi equivalenti. Infiniti di ordine crescente. Funzioni continue in un punto e in un insieme. Continuità delle funzioni elementari. Punti di discontinuità e loro classificazione. Operazioni tra funzioni continue. Teorema di continuità delle funzioni composte*. Teorema di permanenza del segno. Teorema di esistenza degli zeri*. Teorema dei valori intermedi*. Teorema di Weierstrass. Proprietà dell'immagine di una funzione continua in un intervallo*.

Derivate. Definizione di funzione derivabile in un punto. Significato geometrico della derivata: retta secante e retta tangente. Definizione di funzione derivata. Calcolo delle derivate delle funzioni elementari*. Teorema che esprime il rapporto tra derivabilità e continuità*. Teorema di decomposizione dell'incremento*. Differenziale. Regole di derivazione*. Teorema di derivazione delle funzioni composte. Teorema di derivazione delle funzioni inverse. Derivabilità delle funzioni radici e delle inverse delle funzioni trigonometriche*. Punti di massimo e di minimo relativo e assoluto. Teorema di Fermat*. Ricerca dei punti di massimo e minimo assoluto. Teorema di Rolle* e suo significato geometrico. Teorema di Lagrange* e suo significato geometrico. Criterio di derivabilità. Funzioni crescenti e decrescenti: rapporti tra monotonia e segno della derivata*. Derivate successive. Insiemi convessi. Funzioni convesse e concave: definizione. Criterio di convessità. Punti di flesso. Studio del grafico di una funzione. Caratterizzazione delle funzioni

costanti in un intervallo*. Caratterizzazione delle funzioni con la stessa derivata in un intervallo*. Definizione di funzione primitiva. Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo. Teorema di de l'Hôpital. Polinomio di Taylor. Unicità del polinomio di Taylor Formula di Taylor con il resto nella forma di Peano (*nel caso $n=2$). Formula di Taylor per le funzioni elementari* e sua applicazione nel calcolo dei limiti. Formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange. Serie di Taylor. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie di Taylor. Funzioni analitiche. Sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale e delle funzioni trigonometriche. Condizione sufficiente e condizione necessaria per l'esistenza di punti di massimo e di minimo relativo.

Numeri complessi. Forma algebrica. Modulo. Argomento. Forma trigonometrica. Complesso coniugato. Somme e prodotti tra numeri complessi. Serie di potenze nel campo complesso. Convergenza assoluta. Definizione dell'esponenziale nel campo complesso. Formule di Eulero*.

Integrali. Definizione di integrale indefinito. Calcolo degli integrali indefiniti immediati. Linearità dell'integrale indefinito (additività e omogeneità rispetto la funzione integranda)*. Regola di integrazione per sostituzione*. Regola di integrazione per parti*. Integrazione delle funzioni razionali nel caso in cui il denominatore sia un polinomio di secondo grado. Integrale definito secondo Riemann: definizione e proprietà*. Teorema della media integrale*. Primo teorema fondamentale del calcolo integrale*. Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale*. Integrali di funzioni discontinue. Integrali impropri su una semiretta. Criterio di confronto* e di confronto asintotico. Divergenza della serie armonica e comportamento della serie armonica generalizzata*. Teorema del modulo. Integrali impropri su intervalli limitati. Criterio di confronto e di confronto asintotico. Teorema del modulo.

Equazioni differenziali ordinarie. Definizione. Integrale generale. Integrale particolare. Integrale singolare. Equazioni in forma normale. Problema di Cauchy. Equazioni del primo ordine a variabili separabili. Equazioni lineari e loro proprietà. Integrale generale delle equazioni lineari del primo ordine*.