Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Primo scritto

24 GENNAIO 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.*

Voto/30: $\boxed{}$

Esercizio 1.

- Calcolare l'ordine dell'elemento $\overline{14}$ nel gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{48}, +)$.
- Calcolare l'ordine dell'elemento $\overline{13}$ nel gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{48}) = \mathbb{Z}_{60}^{\times}$ degli invertibili modulo 48.
- Quanti sono i coniugati dell'elemento $(1\,3\,4)(2\,6\,5)$ nel gruppo simmetrico S_6?

Risoluzione:

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 7 \mod 23 \\ 7x \equiv 3 \mod 24. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 3. L'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soddisfa

$$T \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, \qquad T \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere la matrice associata a T utilizzando le basi canoniche sia in partenza che in arrivo.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $S \subset V$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche (cioè delle matrici uguali alla propria trasposta).

- Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di V.
- Calcolare la dimensione di S esibendone una base.
- Completare la base trovata ad una base di V.

Risoluzione:

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. L'insieme delle matrici $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.
2. Il sottospazio W_1 di $\mathbb{R}^5$ di equazione $x_1 + x_2 = 0$ ha la stessa dimensione del sottospazio W_2 di $\mathbb{R}^5$ di equazione $x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
3. Se un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ ha 3 autovalori, allora f non può essere diagonalizzabile.
4. Se A, B sono matrici quadrate $n \times n$, allora AB e BA hanno lo stesso determinante.

Risoluzione: