Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Primo scritto

16 febbraio 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.*

Voto/30:

Esercizio 1.

- Determinare i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{16}, +)$; di ciascun sottogruppo ciclico elencare i generatori.
- Calcolare il numero di elementi di ordine 6 nel gruppo simmetrico S_6.

Risoluzione:

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 7 \mod 13 \\ 7x \equiv 3 \mod 15. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 3. L'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfa:

1. $\ker T$ è generato dal vettore $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$;
2. l'autospazio di autovalore 2 ha equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Scrivere la matrice associata a T utilizzando le basi canoniche sia in partenza che in arrivo. Dire se T è diagonalizzabile.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali, e sia $S \subset V$ il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche (cioè delle matrici uguali a meno la propria trasposta: $A = -A^t$).

- Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di V.
- Calcolare la dimensione di S esibendone una base.
- Completare la base trovata ad una base di V.

Risoluzione:

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. Se v_1, v_2 sono due autovettori non proporzionali per un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ relativi allo stesso autovalore, allora v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
2. Se due permutazioni in un gruppo alterno A_n hanno lo stesso ordine, allora sono coniugate.
3. Siano A, B matrici quadrate a coefficienti reali. Se AB è invertibile allora sia A che B sono invertibili.
4. Siano A, B matrici quadrate a coefficienti reali. Se $A + B$ è invertibile allora sia A che B sono invertibili.
5. Un gruppo di ordine 17 non ha sottogruppi non banali.

Risoluzione: