Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Terzo scritto

19 giugno 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.*

Voto/30:

Esercizio 1.

- Determinare i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{18}, +)$; di ciascun sottogruppo ciclico elencare i generatori.
- Calcolare il numero di elementi di ordine 8 nel gruppo simmetrico S_8.

Risoluzione:

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 4x \equiv 7 \mod 13 \\ 7x \equiv 4 \mod 15. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 3. L'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ soddisfa:

1. $\ker T$ è generato dal vettore $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$;

2. $T \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad T \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}.$

   Scrivere la matrice A associata a T utilizzando le basi canoniche sia in partenza che in arrivo. Dire se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(X) = AA^t X$ è diagonalizzabile.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali, e sia $S \subset V$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche (cioè delle matrici uguali alla propria trasposta: $A = A^t$).

- Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di V.
- Calcolare la dimensione di S esibendone una base.
- Sia $W \subset V$ il sottospazio delle matrici triangolari superiori. Trovare una base di $W \cap S$.

Risoluzione:

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. Se G è un gruppo finito e g_1, g_2 sono elementi di ordine n_1, n_2, rispettivamente, allora $g_1 g_2$ ha ordine $n_1 n_2$.
2. Se due sottogruppi di un gruppo ciclico hanno lo stesso ordine, allora sono isomorfi.
3. Sia A una matrice quadrata e v un autovettore di autovalore -1 per A. Allora $A^2 v = v$.
4. Il sistema lineare $AX = b$ con A di rango massimo, ha sempre una sola soluzione.
5. Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti nello spazio vettoriale V, allora v_1 è combinazione lineare di v_2, v_3.

Risoluzione: