Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Quarto scritto

12 LUGLIO 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6.5	
2	6.5	
3	6.5	
4	6.5	
5	6.5	
Totale	32.5	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.*

Voto/30: ☐

Esercizio 1.

- Si consideri in $G = \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ l'operazione binaria

  $$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

  Calcolare $((1, 2) * (2, 4)) * (1/2, 3)$. Dimostrare che $(G, *)$ è un gruppo non abeliano.

  [Potete evitare di dimostrare l'associatività]

- Nel gruppo simmetrico S_8 determinare, se esiste, una permutazione pari x tale che $ax = b^2$ ove $a = (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)$, $b = (1\ 8\ 3)(2\ 3\ 4)$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 4x \equiv 5 \mod 7 \\ 4x \equiv 5 \mod 11. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 3. L'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfa:

1. $\ker T$ è generato dal vettore $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$;

2. $T \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad T \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}.$

   Scrivere la matrice A associata a T utilizzando le basi canoniche sia in partenza che in arrivo.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia V l'insieme dei polinomi nella variabile x di grado minore uguale a 3 a coefficienti reali con termine noto nullo.

- Mostrare che V è un sottospazio vettoriale dello spazio dei polinomi di grado minore uguale a 3 a coefficienti reali e calcolare la dimensione di V esibendone una base.
- Trovare una base di $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$.
- Trovare, se esiste, un isomorfismo tra V e W.

Risoluzione:

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano W_1, W_2 sottospazi di V. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sono basi di W_1, W_2, rispettivamente, allora $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $W_1 + W_2$.
2. Se due sottogruppi del gruppo simmetrico S_3 hanno lo stesso ordine, allora sono isomorfi.
3. Se due sottogruppi del gruppo simmetrico S_4 hanno lo stesso ordine, allora sono isomorfi.
4. Se A è una matrice 3×4 di rango 3 e $b \in \mathbb{R}^3$, il sistema lineare $AX = b$ ammette sempre infinite soluzioni $X \in \mathbb{R}^4$.
5. Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti nello spazio vettoriale V, allora v_1 è combinazione lineare di v_2, v_3.

Risoluzione: