Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova scritta di Istituzioni di Algebra superiore del 13-02-2014
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti.

Esercizio 1. Determinare la dimensione delle rappresentazioni fondamentali di un'algebra di Lie semplice di tipo G_2. Si ricordi che tali rappresentazioni sono quelle di peso più alto ω_i, $i = 1, 2$, ove $\frac{2(\omega_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ e α_1, α_2 sono le radici semplici (α_2 è corta).

Esercizio 2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice.

1. Siano $V(\lambda), V(\mu)$ $\mathfrak{g}$-moduli di peso più alto λ, μ rispettivamente. Dimostrare che $\lambda + \mu$ è un peso di $V(\lambda) \otimes V(\mu)$.
2. Sia V la rappresentazione irriducibile finito-dimensionale di peso più alto λ. Dimostrare che V^* è irriducibile e che il suo peso più alto è $-w_0(\lambda)$, ove w_0 è l'elemento più lungo del gruppo di Weyl.

Esercizio 3. Sia Δ un sistema di radici di tipo B_4 e W il corrispondente gruppo di Weyl. Sia $\{\alpha_i\}_{i=1}^4$ una base di radici semplici, ordinate nel modo usuale con α_4 corta. Sia C la camera fondamentale corrispondente a Δ^+. Determinare $W(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) \cap \overline{C}$.

Esercizio 4. Dimostrare che un'algebra di Lie ammette un'unico ideale nilpotente massimale.

Esercizio 5. Dimostrare che se L è l'algebra di Lie libera su un insieme X e V è lo spazio vettoriale avente X per base, allora $U(L) \cong T(V)$.

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.