Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Prova in itinere di Istituzioni di Algebra superiore del 28-1-2016

Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti.

Esercizio 1. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice di tipo A_3. Si fissi una sottoalgebra di Borel e siano $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ le corrispondenti radici semplici (con α_1 ortogonale ad α_3). Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il modulo irriducibile di peso più alto $\alpha_1 + k\alpha_2 + \alpha_3$ ha dimensione finita e per ciascun valore eventualmente trovato calcolare tale dimensione.

Esercizio 2. Sia G il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^8$ dotato della forma bilineare simmetrica di matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}$ nella base standard. Sia $\mathfrak{g}$ la complessificazione di $Lie(G)$.

a. Determinare una base di $\mathfrak{g}$.

b. Determinare una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ e scrivere il corrispondente sistema di radici.

b. Calcolare l'ordine del gruppo di Weyl W e determinare tre copie distinte del gruppo simmetrico S_4 in W.

Esercizio 3. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice complessa di dimensione finita. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base di $\mathfrak{g}$ e sia $\{x^1, \dots, x^n\}$ la base duale rispetto alla forma di Killing. Si ponga

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i \in U(\mathfrak{g}).$$

a. Dimostrare che c appartiene al centro di $U(\mathfrak{g})$.

b. Dimostrare che c agisce scalarmente su ogni rappresentazione irriducibile di dimensione finita.

c. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan, Δ il corrispondente sistema di radici. Fissato un sistema positivo Δ^+, sia ρ il corrispondente vettore di Weyl. Dimostrare che c agisce come $(\lambda, \lambda + 2\rho)Id$ su un modulo irriducibile di peso più alto λ (λ peso integrale dominante).

Esercizio 4. Sia W il gruppo di Weyl di un sistema di radici Δ, con sistema semplice $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ e corrispondente sistema positivo Δ^+. Sia $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ un'espressione ridotta di $w \in W$. Sia $\beta_r = s_{i_1} \cdots s_{i_r - 1}(\alpha_{i_r})$, $1 \leq r \leq k$. Dimostrare che $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} = \{\alpha \in \Delta^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\}$. Provare poi che $w = s_{\beta_k} \cdots s_{\beta_1}$.