Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova scritta di Istituzioni di Algebra superiore del 13-06-2016
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Svolgere l'esercizio 1 e tre esercizi tra i rimanenti. Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti. Tutte le algebre di Lie sono assunte finito-dimensionali.

Esercizio 1. Decidere se le affermazioni seguenti sono vere o false (se vere dare una dimostrazione, se false esibire un controesempio).

1. Il centro di un'algebra di Lie è un ideale.
2. L'algebra inviluppante di un'algebra di Lie non zero ha dimensione infinita.
3. L'algebra inviluppante di un'algebra di Lie non zero è sempre non commutativa.
4. Se L è un'algebra di Lie risolubile la sua forma di Killing è identicamente nulla.
5. Se L è un'algebra di Lie nilpotente la sua forma di Killing è identicamente nulla.
6. Un'algebra di Lie semisemplice di tipo E_6 ammette una sottoalgebra di tipo D_5.

Esercizio 2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice, $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan, Δ il sistema di radici, W il gruppo di Weyl, Δ^+ un sistema positivo e ρ il corrispondente vettore di Weyl. Sia P^+ il cono dei pesi dominanti e $(\cdot,\cdot)$ la forma di Killing di $\mathfrak{g}$.

1. Dimostrare che ρ è fortemente dominante (ovvero che $(\rho,\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \Delta^+$).
2. Sia $\mu \in P^+, \nu = w^{-1}\mu, (w \in W)$. Dimostrare che $(\nu+\rho,\nu+\rho) \leq (\mu+\rho,\mu+\rho)$ e che vale l'uguaglianza se e solo se $\mu = \nu$.

Esercizio 3. Sia $P \subset GL(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche definite positive. Dimostrare che l'applicazione di moltiplicazione $P \times O(n) \to GL(n, \mathbb{R})$ è una biezione. (Suggerimento: si osservi che, data $A \in GL(n, \mathbb{R})$, risulta $AA^t \in P$. Far vedere che $AA^t = B^2$ per qualche $B \in P$).

Esercizio 4. Classificare gli automorfismi dei diagrammi di Dynkin connessi. Determinare la sottoalgebra dei punti fissi se $\mathfrak{g} = sl(4, \mathbb{C})$.

Esercizio 5. Sia $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}$ la Cartan diagonale e $\{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ l'insieme delle radici positive (ϵ_i è la i-esima funzione coordinata su $\mathfrak{h}$). Sia $V = \mathbb{C}^n$ la rappresentazione definitoria. Dimostrare che $V, S^k(V)$ sono rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{g}$ e determinare il peso più alto.

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.