Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova scritta di Istituzioni di Algebra superiore del 04-07-2016
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Svolgere l'esercizio 1 e almeno uno e al più due esercizi tra i rimanenti. Il tempo a disposizione è di due ore. Non si possono usare testi o appunti. Tutte le algebre di Lie sono assunte finito-dimensionali.

Esercizio 1. Decidere se le affermazioni seguenti sono vere o false (se vere dare una dimostrazione, se false esibire un controesempio).

1. Il radicale di una forma bilineare simmetrica associativa non degenere in un'algebra di Lie è un ideale.
2. Un'algebra di Lie ha sempre un ideale risolubile massimale.
3. Un'algebra di Lie ha sempre un quoziente semisemplice non zero.
4. Una rappresentazione irriducibile di dimensione finita di un'algebra di Lie risolubile è unidimensionale.
5. Se L è un'algebra di Lie nilpotente la sua forma di Killing è identicamente nulla.
6. L'applicazione esponenziale $\exp : gl(2,\mathbb{R}) \to GL(2,\mathbb{R})$ è suriettiva.

Esercizio 2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice, $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan, Δ il sistema di radici, W il gruppo di Weyl, Δ^+ un sistema positivo e ρ il corrispondente vettore di Weyl. Sia P^+ il cono dei pesi dominanti e $(\cdot,\cdot)$ la forma di Killing di $\mathfrak{g}$.

1. Dimostrare che ρ è fortemente dominante (ovvero che $(\rho,\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \Delta^+$).
2. Sia $\mu \in P^+, \nu = w^{-1}\mu, (w \in W)$. Dimostrare che $(\nu+\rho,\nu+\rho) \leq (\mu+\rho,\mu+\rho)$ e che vale l'uguaglianza se e solo se $\mu = \nu$.

Esercizio 3. Determinare i sistemi di radici Δ) il cui gruppo di Weyl ha ordine minore o uguale a 60. (Si assuma che Δ non può essere di tipo F_4).

Esercizio 4. Sia $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}$ la Cartan diagonale e $\{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ l'insieme delle radici positive (ϵ_i è la i-esima funzione coordinata su $\mathfrak{h}$). Sia $V = \mathbb{C}^n$ la rappresentazione definitoria. Dimostrare che $V, S^k(V)$ sono rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{g}$ e determinare il peso più alto.

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.