Terzo fogli di esecizi

April 6, 2017

Esercizio 1. Siano $G_i, i = 1, 2$ gruppi di Lie connessi; diciamo che G_1, G_2 sono localmente isomorfi se esistono intorni dell'identità $U_i \subset G_i$ e un diffeomorfismo $\Phi : U_1 \to U_2$ tale che se $x, y, \in U_1$ allora $xy \in U_1$ se e solo se $\Phi(x)\Phi(y) \in U_2$ e in tal caso $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(xy)$. Dimostrare che sono equivalenti

1. G_1, G_2 sono localmente isomorfi;
2. Esiste un gruppo di Lie semplicemente connesso G e omomorfismi suriettivi lisci con nucleo discreto $\omega_i : G \to G_i, i = 1, 2$
3. $Lie(G_1) \cong Lie(G_2)$

Esercizio 2. Dimostrare che ogni campo vettoriale invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo.

Esercizio 3. Sia $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la mappa esponenziale definita a lezione e sia $X \in \mathfrak{g}$. Verificare che

1. $\exp(tX) = \exp_X(t)$
2. $\exp((t + t')X) = \exp(tX) \exp(t'X)$
3. $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$
4. exp è liscia e il suo differenziale è l'identità.
5. $\ell_g \circ \exp_X$ è l'unica curva integrale che vale g in 0
6. Il gruppo a 1-parametro di diffeomorfismi associato a X è dato dalla moltiplicazione a destra per $\exp_X(t)$

Esercizio 4. Dimostrare che la mappa esponenziale per $GL(n, \mathbb{C})$ è suriettiva (la cosa è chiaramente falsa per $GL(n, \mathbb{R})$; potete assumere che l'esponenziale l'usuale esponenziale di matrici).