Quarto fogli di esecizi

April 10, 2017

Esercizio 1. I gruppi di Lie non hanno sottogruppi piccoli, ovvero esiste un'intorno U di e tale che per ogni $g \in G \setminus \{e\}$ esiste $N = N(g)$ tale che $g^N \notin U$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo di Lie e sia $\{b_1, \ldots b_n\}$ una base di $Lie(G)$. Allora le mappe

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \exp(x_1 b_1 + \ldots b_n x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \exp(x_1 b_1) \ldots \exp(b_n x_n)$$

sono diffeomorfismi locali intorno a $0 \in \mathbb{R}^n$ e $e \in G$

Esercizio 3. Sia $\phi : G \to K$ un omomorfismo di gruppi di Lie connessi. Dimostrare che sono equivalenti

1. ϕ è suriettivo e ha nucleo discreto;
2. ϕ è un rivestimento liscio;
3. $d\phi_e : LieG \to LieK$ è un isomorfismo;
4. ϕ è un diffeomorfismo locale.

Esercizio 4. Sia $\phi : G \to K$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora, se $A = Ker(\phi)$, risulta $Lie(A) = ker\, d\phi$.

Esercizio 5. Sia consideri in $V = \mathbb{R}^n$ l'insieme $Fl_{k_1,\ldots,k_m}(V)$ delle m-ple di sottospazi $(F_1, \ldots, F_m)$ con $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_m$ e $\dim F_i = k_i$. Far vedere che $Fl_{k_1,\ldots,k_m}(V)$ è omogeneo rispetto a $GL(n, \mathbb{R})$, quindi ha una struttura di varietà Calcolare $\dim Fl_{1,3,5,7}(\mathbb{R}^8)$.

Esercizio 6. Se $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$, scrivere una forma di volume invariante a destra, una forma di volume invariante a sinistra e mostrare che non esiste una forma biinvariante.

Esercizio 7. Se V è un G-modulo finito dimensionale e W un modulo irriducibile, dimostrare che la componente isotipica di tipo W, definita come Imd_W,(ove $d_W : Hom_G(W, V) \otimes W \to V$, $d_W(\phi \otimes w) = \phi(w)$) è la somma di tutti i sottomoduli di V isomorfi a W.