Quinto fogli di esecizi

April 28, 2017

Esercizio 1. Siano G, H gruppi di Lie compatti. Dimostrare che le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali di $G \times H$ sono tutte sole del tipo $V \otimes W$, ove V, W sono rappresentazioni irriducibili di G, H, rispettivamente.

Esercizio 2. [Questo esercizio richiede qualche nozione di analisi funzionale] Sia G un gruppo di Lie compatto e $k : G \times G \to \mathbb{C}$ una funzione continua.

1. Verificare che la formula
$$(Kf)(g) = \int_G k(g,h)f(h)dh$$
definisce un operatore lineare continuo $K : (L^2(G); \| \, \|) \to (C(G); | \, |)$

2. Assumendo il teorema di Ascoli, verificare che l'operatore $K : (L^2(G); \| \, \|) \to (C(G); | \, |)$ (e quindi anche $K : (L^2(G); \| \, \|) \to (L^2(G); \| \, \|)$, è compatto

3. Se $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$, verificare che K è autoaggiunto rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Se K è un operatore autoaggiunto, far vedere che
$$\|K\| := \sup_{\|f\|=1} \|K(f)\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Kf, f \rangle|$$

5. Se K è un operatore compatto autoaggiunto, far vedere che $\|K\|$ o $-\|K\|$ è un autovalore di K.

6. Dimostrare il teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti: se H_λ è l'autospazio di autovalore λ per K, dato $\epsilon > 0$ il sottospazio $\bigoplus_{|\lambda|>\epsilon} H_\lambda$ ha dimensione finita ed $\bigoplus_\lambda H_\lambda$ è denso in $\widehat{H}$.

   (Traccia: se per assurdo $\bigoplus_{|\lambda|>\epsilon} H_\lambda$ ha dimensione infinita, esiste in tale spazio una successione numerabile di autovettori x_n. Provare che questo contraddice la compattezza di K. Sia poi E la chiusura di $\bigoplus_\lambda H_\lambda$ in $\widehat{H}$, ed F il suo ortocomplemento; far vedere che K induce un operatore compatto autoaggiunto su F, Usando la parte (5) provare che questo non è possibile.)

Esercizio 3. Con la notazione introdotta a lezione, far vedere che le mappe $s_U : U^* \otimes U \to C(G)$ inducono un isomorfismo di $G \times G$-moduli
$$(s_U) : \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{K})} U^* \otimes_{D(U)} U \to \mathcal{T}(G, \mathbb{K})$$

Esercizio 4. Siano U, V due rappresentazioni irriducibili isomorfe di un gruppo compatto G. Dimostrare che U, V, sono isometriche.

Esercizio 5. Classificare le rappresentazioni irriducibili complesse di $S^1 \times \ldots \times S^1$.

Esercizio 6. Esercizio 3.8 del testo di Sepanski, Compact Lie groups

Esercizio 7. Esercizio 3.9 del testo di Sepanski, Compact Lie groups