Algebra 1
Proff. A. De Sole e P. Papi
Prova scritta del 30-1-2020

Esercizio 1. Risolvere al variare del parametro intero positivo a il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv a & \mod 42 \\ 6x \equiv 1 & \mod 35 \end{cases}$$

Soluzione: La prima equazione ha soluzione se e solo se $a|(2, 42) = 3$, dunque $a = 3b$ e il sistema diviene

$$\begin{cases} x \equiv b & \mod 14 \\ x \equiv 6 & \mod 35 \end{cases}$$

ovvero per il teorema cinese dei resti

$$\begin{cases} x \equiv b & \mod 2 \\ x \equiv b & \mod 7 \\ x \equiv 6 & \mod 7 \\ x \equiv 6 & \mod 5 \end{cases}$$

che ha soluzione sole se $b \equiv 6 \mod 7$, cioè $a \cong 18 \mod 21$. In tal caso la soluzione è $x = 6 + 35b \mod 70$.

Esercizio 2. Per la seguente affermazione, dire se si tratta di un'affermazione vera, fornendo una dimostrazione, o falsa, fornendo un controesempio:

Affermazione: Sia G un gruppo e sia $Z(G) \subset G$ il suo centro. Se $G/Z(G)$ è ciclico, allora $G = Z(G)$.

Soluzione: L'affermazione è vera. Proviamo che se $G/Z(G)$ è ciclico allora G è abeliano, dunque $G = Z(G)$. Supponiamo che $G/Z(G)$ sia ciclico, generato da a. Dati $x, y \in G$, $x = a^h z_1, y = a^k z_2$ con $z_1, z_2 \in Z(G)$ si ha

$$xy = a^h z_1 a^k z_2 = a^{h+k} z_1 z_2 = a^{h+k} z_2 z_1 = a^k z_2 a^h z_1 = yx.$$

Esercizio 3. Dimostrare che, in ogni gruppo di ordine 231, l'11-Sylow è contenuto nel centro.

Soluzione: Dai teoremi di Sylow segue subito che l'11-Sylow è unico, quindi normale; avendo cardinalità prima, è ciclico: Sia N tale sottogruppo; allora G agisce per coniugazione su N, dando luogo a un omomorfismo $\psi : G \to Aut(N) \cong C_{10}$. Tale omomorfismo deve essere banale, perchè nessun divisore di 231 diverso da 1 divide 10. Pertanto $N \subset Z(G)$ (in dettaglio: ψ_g è la mappa $n \mapsto gng^{-1}$; tale mappa è l'identità per ogni g, ovvero per ogni g risulta $gn = ng$, quindi $N \subset Z(G)$).

Esercizio 4. Per la seguente affermazione, dire se si tratta di un'affermazione vera o falsa, fornendo una dimostrazione.

Affermazione: La mappa $[a+bi] \mapsto [a+b]$ definisce un'omomorfismo di anelli $\varphi : \mathbb{Z}[i]/(5+6i) \to \mathbb{Z}/(11)$.

Soluzione: L'applicazione φ è ben posta e additiva, ma non è un omomorfismo:

$$\varphi([i][i]) = \varphi([-1]) = [10] \neq [1] = \varphi([i])\varphi([i])$$

Esercizio 5. (a) Stabilire se l'anello $R = \mathbb{Z}[i]/(7-6i)$ è un dominio e/o un campo.

(b) Stabilire se $a = [1+4i] \in R$ è invertibile.

Soluzione: Risulta $7-6i = -i(2-i)(1+4i)$, dunque l'ideale generato da $7-6i$ non è né primo (né in particolare massimale), e dunque il quoziente non è né un dominio né un campo. Poichè $a = [1+4i] = [0] \in R$, a non è invertibile.

Esercizio 6. Determinare il grado del campo di spezzamento $\mathbb{K}$ di $x^6 - 4$ su $\mathbb{Q}$.

Soluzione: Risulta $x^6 - 4 = (x^3+2)(x^3-2)$, e i fattori sono irriducibili per il criterio di Eisenstein con $p = 2$; se ξ è una radice primitiva terza dell'unità, le radici del polinomio sono $\{\pm\sqrt[3]{2}, \pm\xi\sqrt[3]{2}, \pm\xi^2\sqrt[3]{2}\}$. Pertanto il campo di spezzamento è $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi)$. Il grado dell'estensione è 6, perchè

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$$

I gradi delle estensioni intermedie si calcolano tramite i gradi dei polinomio minimi di $\sqrt[3]{2}$ su $\mathbb{Q}$ e di ξ su $Q(\sqrt[3]{2})$, che sono $x^3 - 2, x^2 + x + 1$ rispettivamente