Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ del sistema di congruenze

$$\begin{cases} p(x) = x+1 \mod x^2+1 \\ p(x) = 6 \mod x-1 \end{cases}$$

Soluzione:

Poiché $(x^2+1, x-1) = 1$ la congruenza ha soluzione unica mod $(x^2+1)(x-1)$; tale soluzione è data da

$$p(x) = (x-1)\,p_1(x) + (x^2+1)\,p_2(x)$$

ove p_1, p_2 sono le soluzioni di $(x-1)p_1(x) = x+1 \mod x^2+1$, $(x^2+1)p_2(x) = 6 \mod x-1$. Risolvendo

$$p_1(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \equiv -x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$$

Dunque $p(x) = -x(x-1) + 3(x^2+1) = 2x^2+x+3$

Risposta:

$p(x) = \boxed{2x^2+x+3}$

Esercizio 2. Decidere, motivando la risposta, se

(a) i gruppi abeliani $\mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/18$ e $\mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/36$ sono isomorfi.

(b) i gruppi abeliani $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$ e $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/16$ sono isomorfi.

Soluzione:

(a) Ricordiamo che se in un gruppo G due elementi commutano, il loro prodotto ha ordine il minimo comune multiplo degli ordini. In particolare se $(n,m)=1$, $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m \cong \mathbb{Z}/nm$. Allora

$$\mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/18 \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/9 \cong$$

$$\cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9 \cong \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/36$$

(b) I gruppi in questione non sono isomorfi: $(\bar{0}, \bar{1}) \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/16$ ha ordine 16 e nessun elemento di $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$ può avere ordine 16.

Risposta:

$\mathbb{Z}/12\times\mathbb{Z}/18$ e $\mathbb{Z}/6\times\mathbb{Z}/36$ sono isomorfi: l'affermazione è **Vera** / **Falsa** (cerchiare la risposta corretta).

$\mathbb{Z}/4\times\mathbb{Z}/8$ e $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/16$ sono isomorfi: l'affermazione è **Vera** / **Falsa** (cerchiare la risposta corretta).

Esercizio 3. Dimostrare che un gruppo G di ordine 217 è ciclico e determinare il numero di possibili generatori in G.

Soluzione:

$217 = 7 \cdot 31$. Dai teoremi di Sylow segue che G ha un unico 7-Sylow H e un unico 31-Sylow K; inoltre $H, K \trianglelefteq G$ e $H \cap K = \{1\}$ per motivi di ordine, e $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 217$, dunque $HK = G$ e $G = H \times K$, $H \cong \mathbb{Z}_7$, $K \cong \mathbb{Z}_{31}$.

D'altra parte se $a, b \in G$, $ab = ba$, $o(ab) = \text{m.c.m.}(o(a), o(b))$. Dunque G ha un elemento di ordine 217 ed è quindi ciclico.

Il numero dei generatori è dato da

$$\varphi(231) = \varphi(7)\varphi(31) = 6 \cdot 30 = 180$$

Risposta:

Esercizio 4. Sia R un dominio di integrità. Dimostrare R ha un unico ideale massimale se e solo se gli elementi non invertibili formano un ideale.

Soluzione:

Osserviamo che $a \in R$ è invertibile se e solo se $a \notin M$ per ogni ideale massimale $M \subset R$. Se infatti $a \in M$ per qualche ideale massimale M, allora $aR \subseteq M \subsetneq R$ e quindi a non è invertibile. Viceversa se a non è invertibile, aR è un ideale proprio di R e dunque è contenuto in un ideale massimale. Se ora R è un dominio con un unico ideale massimale I, l'osservazione precedente ci dice che I è l'insieme degli elementi non invertibili.

Viceversa se l'insieme dei non invertibili è un ideale I, ed M è un ideale massimale, allora $M \subseteq I \subsetneq R$ $(1 \notin I)$ dunque $M = I$ per la massimalità ed R ha un unico ideale massimale

Risposta:

Dim. (in breve)	

Esercizio 5. Dimostrare o confutare: il polinomio $f(x) = x^5 - 5x^4 - 6x - 1$ è irriducibile in:

(a) $\mathbb{C}[x]$,

(b) $(\mathbb{Z}/2)[x]$,

(c) $\mathbb{Z}[x]$.

Soluzione:

a) I soli polinomi irriducibili su $\mathbb{C}$ sono quelli di grado ≤ 1, per il teorema fondamentale dell'algebra

b) $x^5 - 5x^4 - 6x - 1 = (x^3 + x + 1)(x^2 + x + 1)$ è una fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{Z}_2[x]$, perché i due fattori hanno grado ≤ 3 e non hanno radici

c) f non ha radici intere, quindi può spezzarsi solo come prodotto di un polinomio di secondo e di uno di terzo grado:

$$(x^5 - 5x^4 - 6x - 1) = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$$

con $c = 1$, $e = -1$ oppure $c = -1$, $e = 1$. Si vede facilmente che le condizioni sui coefficienti danno luogo a un sistema privo di soluzioni.

Risposta:

$f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x]$: l'affermazione è **Vera** / **Falsa** (cerchiare la risposta corretta).

$f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}/2[x]$: l'affermazione è **Vera** / **Falsa** (cerchiare la risposta corretta).

$f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[[x]$: l'affermazione è **Vera** / **Falsa** (cerchiare la risposta corretta).

Esercizio 6. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$$

ed il campo $\mathbb{K}$ di spezzamento per $f(x)$. Determinarne il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$.

Soluzione:

$f(x) = (x-3)(x^3+x^2+3x+1)$, e x^3+x^2+3x+1 non ha radici razionali e quindi, essendo di terzo grado è irriducibile su $\mathbb{Q}$. La sostituzione $x = y - 1/3$ cambia x^3+x^2+3x+1 in $y^3 + 8/3\, y + 2/27$ senza cambiare il discriminante, che è quindi $-4(8/3)^3 - 27(2/27)^2 \notin \mathbb{Q}^2$

Dunque $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) \cong S_3$

Risposta:

Il gruppo di Galois di $f(x)$ è