ANALISI VETTORIALE

Esercizi pre-ESO

8 dicembre 2010

1.1. Esercizio. *Disegnare i seguenti insiemi*

$$A = \{(x, y) : x \in [-1, 1],\ -x^4 \le y \le 2x^2\},$$

$$B = \{(x, y) : y \in [-1, 1],\ -y^2 \le x \le 4y^2\}$$

e calcolarne l'area.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\text{Area}(A) = \iint_A dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x^4}^{2x^2} dy = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x^4)dx = \frac{26}{15}$$

$$\text{Area}(B) = \iint_B dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-y^2}^{4y^2} dx = \int_{-1}^{1} 5y^2 dy = 2\frac{5}{3}$$

1.2. Esercizio. *Sia D il disco di centro l'origine e raggio 2: calcolare l'integrale esteso a D delle seguenti funzioni*

$$f_1(x, y) = x + 2y,\ f_2(x, y) = x\cos(y^2 + y^3).$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Motivi di simmetria indicano per la f_1 il seguente risultato:

$$\iint_C (x + 2y)dxdy = 0$$

infatti su mezzo cerchio, $x+2y \ge 0$ la funzione integranda prende valori positivi, sull'altra metá gli stessi ma negativi.
Analogo risultato per la seconda f_2

$$\iint_C x\cos(y^2 + y^3)dxdy = 0$$

infatti per ogni fissata ordinata y la f_2 prende sul semicerchio $x < 0$ un valore e sull'altro semicerchio lo stesso ma cambiato di segno.

1.3. Esercizio. *Calcolare l'integrale esteso al quadrato*

$$Q = [-2, 2] \times [-2, 2]$$

delle funzioni

$$f_3(x, y) = x^2 + y^3, \; f_4(x, y) = xy.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\iint_Q (x^2+y^3)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} (x^2+y^3)dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} x^2 dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} y^3 dy$$

Il carattere dispari della funzione y^3 e la simmetria di Q fanno riconoscere (il calcolo diretto é comunque semplicissimo) che l'ultimo integrale a secondo membro é nullo.
Riesce pertanto

$$\iint_Q (x^2 + y^3)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} x^2 dy = 4 \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{2^6}{3}$$

Integrale della f_2:

$$\iint_Q xydxdy = 0$$

risultato ottenuto per gli stessi motivi precedenti: su mezzo quadrato riesce $xy > 0$ sull'altra metá valori opposti.

1.4. Esercizio. *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_T |xy| dx\, dy$$

dove T è il triangolo di vertici

$$A = (-1, 0), \quad B = (0, 1), \quad C = (1, 0)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Si riconosce, ancora per simmetria,

$$\iint_T |xy|dxdy = 2 \iint_{T_+} xydxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}$$

Ricordate che, qualunque sia la funzione continua $f(x,y)$ il modulo $|f(x,y)|$ ha segno costante ≥ 0 e quindi il suo integrale verrá sempre ≥ 0, tenendo conto che basta che f sia diversa da zero in un punto per essere sicuri che l'integrale verrá positivo.

1.5. Esercizio. *Disegnare*

$$D = \{(x,y) : y \geq x, 2x \geq y^2\}$$

Calcolare

$$\iint_D y\,dx\,dy.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\iint_D ydxdy = \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2x}} ydy = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{1}{2}(2^2 - \frac{1}{3}2^3) = \frac{2}{3}$$

1.6. Esercizio. *Disegnare*

$$D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 4, 4y \geq x^2 - 4x + 4\}$$

Calcolare

$$\iint_D x\,dx\,dy.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\iint_D xdxdy = \int_0^2 xdx \int_{x^2/4-x+1}^{\sqrt{4-x^2}/2} dy = \int_0^2 (\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x)dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{4-x^2}\,(4-x^2) - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 1$$

1.7. Esercizio. *Calcolare*

$$\iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$$

dove

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Serviamoci delle coordinate polari

$$\iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy = \iint_Q \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{6}\pi(9-1) = \frac{4}{3}\pi$$

1.8. Esercizio. *Disegnare*

$$D = \{(x,y) : 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-y \le 1\}$$

Calcolare

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{(x-y)^2+1}\, dx\, dy.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Consideriamo la trasformazione affine

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} u = & x+y \\ v = & x-y \end{cases}, \quad \Phi(D) = [0,1]\times[0,1] \subseteq R^2_{u,v}$$

e la sua inversa $\Psi(u,v)$

$$\Psi(u,v) = \begin{cases} x = & \frac{1}{2}(u+v) \\ y = & \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \qquad \Psi([0,1]\times[0,1]) = D$$

Riesce inoltre

$$D\Psi(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

La formula del cambiamento di coordinate é la seguente

$$\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{u}{1+v^2}\,|D\Psi(u,v)|\, dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{u}{1+v^2} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv \int_0^1 udu =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{\pi}{16}$$

1.9. Esercizio. *Sia* $C_r = \{r^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$ *con* $0 < r < 1$. *Calcolare*

$$I_r = \iint_{C_r} \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdy,\ J_r = \iint_{C_r} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy.$$

Quanto valgono $\lim_{r\to 0} I_r$ *e* $\lim_{r\to 0} J_r$ *?*

SOLUZIONE:

Coordinate polari:

$$I_r = \iint_{C_r} \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{1}{\rho^2}\rho d\rho = 2\pi \log\left(\frac{1}{r}\right) \to +\infty$$

$$J_r = \iint_{C_r} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{1}{\rho}\rho d\rho = 2\pi(1-r) \to 2\pi$$

1.10. Esercizio. *Sia* E *l'insieme del primo quadrante* $x \ge 0, y \ge 0$ *delimitato dalla parabola* $x = y^2$ *e dalla retta* $x = 1$.
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E x\,\sin(y)\,dx\,dy$$

SOLUZIONE:

Il dominio E é un dominio normale

- sia rispetto all'asse $x|\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}$
- sia rispetto all'asse $y|\quad 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1$:

si hanno pertanto due possibili formule di riduzione per l'integrale doppio assegnato.
Vedremo che una di esse é vantaggiosa, conduce a due integrazioni semplici anche facili, mentre l'altra non lo é, conduce cioé a due altre integrazioni semplici tutt'altro che facili !

$$\iint_E x\sin(y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} x\sin(y)dy = \int_0^1 x(1-\cos(\sqrt{x}))dx$$

$$\iint_E x\sin(y)dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^1 x\sin(y)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(y)(1-y^4)dy$$

La prima riduzione non produce vantaggi perché la primitiva di $x\cos(\sqrt{x})$ non é elementare.
La seconda riduzione invece é vantaggiosa: la primitiva di $y^4\sin(y)$ pur laboriosa (un certo numero di integrazioni per parti) é elementare

$$\int y^4\sin(y)dy = -\left(24-12\,y^2+y^4\right)\,\cos(y)+4\,y\,\left(-6+y^2\right)\,\sin(y)$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sin(y)(1-y^4)dy = \frac{1}{2}\left(-23+12\,\cos(1)+20\,\sin(1)\right) \cong 0.156$$

1.11. Esercizio.

i): *Dimostrare che l'equazione* $y = xy + \ln y$ *definisce in un intorno di* $P=(1,1)$ *una funzione* $y=f(x)$

ii): *Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 1$ *di ordine* 2 *della* $f(x)$.

SOLUZIONE:

- Il teorema di Dini richiede che
  - il punto assegnato $(1,1)$ soddisfi l'equazione

    $$F(x,y) = y - xy - \log(y) = 0$$

    cosa che accade,
  - in tale punto riesca $F_y(x,y) = 1 - x - 1/y \neq 0$ cosa che accade essendo $F_y(1,1) = -1$

  quindi l'equazione $F(x,y)=0$ definisce, vedi Figura **??**, per x in un intorno di $x_0 = 1$ una funzione implicita $y = f(x)$, $f(1) = 1$.
  Tale funzione $f(x)$ é, nell'intorno di $x_0 = 1$ in cui é definita anche indefinitamente derivabile.

- Il polinomio di Taylor richiesto é, per definizione

  $$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

  Per determinarlo occorre determinare i due valori $f'(1)$ e $f''(1)$:
  -
    $$f(x) - x\,f(x) - \log(f(x)) \equiv 0 \Rightarrow$$
    $$\Rightarrow f'(x) - f(x) - x\,f'(x) - f'(x)/f(x) \equiv 0$$

da cui si ricava

$$f'(1) - f(1) - 1\, f'(1) - f'(1)/f(1) = 0$$
$$\Rightarrow f'(1) = -1$$

–

$$f'(x) - f(x) - x\, f'(x) - f'(x)/f(x) \equiv 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) - f'(x) - f'(x) - xf''(x) - \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} = 0$$
$$f''(1) - f'(1) - f'(1) - 1f''(1) - \frac{f''(1)f(1) - f'^2(1)}{f^2(1)} = 0$$
$$\Rightarrow f''(1) = 3$$

Ne segue

$$P(x) = 1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2$$

ovvero

$$P(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$$

Osservazione 1.1. *L'equazione $y - xy - \log(y) = 0$ é risolvibile molto piú facilmente rispetto ad x che non rispetto da y*

$$x = g(y) = 1 - \frac{1}{y}\log(y)$$

La funzione $y = f(x)$ cercata é semplicemente l'inversa della $g(y)$ di cui sopra.
Il grafico della $x = g(y)$ si disegna facilmente, ad esempio con un GnuPlot: il grafico dell'inversa $y = f(x)$ é semplicemente, vedi Figura **??**, *il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante...*

1.12. Esercizio.
Detti $A = (0, 4)$ e $B = (-4, -4)$, trovare i punti P della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ che rendano minima e massima la somma dei quadrati

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2.$$

Soluzione:

La somma dei quadrati delle distanze del punto $P = (x, y)$ dai due punti $A = (0, 4)$ e $B = (-4, -4)$ é

$$f(x, y) = x^2 + (y-4)^2 + (x+4)^2 + (y+4)^2$$

ovvero

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2) + 8x + 48$$

Tenuto presente che i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ si rappresentano parametricamente con

$$x = 2\cos(\theta),\ y = 2\sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

il massimo e il minimo richiesti sono, vedi Figura **??**, il massimo e il minimo di

$$f[2\cos(\theta), 2\sin(\theta)] = 8[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)]+16\cos(\theta)+48 = 16\cos(\theta)+56$$

ovviamente corrispondenti a

$$\begin{cases} \text{minimo} & = & 40, & \theta = \pi \\ \text{Massimo} & = & 72, & \theta = 0 \end{cases}$$

Il metodo dei moltiplicatori

L'esercizio poteva anche essere risolto secondo l'algoritmo dei *moltiplicatori di Lagrange* introducendo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2(x^2 + y^2) + 8x + 48 + \lambda\,(x^2 + y^2 - 4)$$

e considerando il sistema formato dalle tre derivate parziali uguali a zero

$$\begin{cases} 4x + 8 + 2\lambda\, x & = 0 \\ 4y + 2\lambda\, y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 & = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2,\ \ y = 0$$

Da cui

$$f(-2, 0) = 40 \quad f(2, 0) = 72$$

1.13. Esercizio.
Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{nx}$$

- **i):** *determinare l'intervallo di convergenza della serie e studiare la convergenza agli estremi;*
- **ii):** *detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare*

$$\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx, \quad a < \log(2);$$

- **iii):** *calcolare, se esiste,*

$$\int_{-\infty}^{\log(2)} S(x)\,dx.$$

SOLUZIONE:

La serie assegnata coincide naturalmente con la seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{e^x}{4}\right)^n = \frac{e^x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{e^x}{4}\right)^{n-1}$$

che la rende simile alla derivata di una serie geometrica...

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Il criterio del rapporto applicato alla serie dell'esercizio assegnato conduce a considerare la frazione

$$\frac{(n+1)\left(\frac{e^x}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{e^x}{4}\right)^n} = \frac{n+1}{n}\frac{e^x}{4} \to \frac{e^x}{4}$$

La serie assegnata pertanto converge in corrispondenza a tutti i valori x per i quali

$$\frac{e^x}{4} < 1$$

La serie converge pertanto nell'intervallo

$$E: \ x < \log(4)$$

Nell'estremo $x = \log(4)$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{n\log(4)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} 4^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n$$

ovviamente non convergente.
Tenuto conto della relazione precedentemente osservata tra la serie assegnata e la serie geometrica, tenuto conto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

si riconosce, per $x \in E$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{nx} = \frac{e^x}{4}\, \frac{1}{(1-\dfrac{e^x}{4})^2}$$

L'integrale richiesto $\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx, \quad a < \log(2)$, é lecito perché l'intervallo proposto é contenuto nell'insieme E in cui la serie converge.
Puó calcolarsi inoltre con due strategie equivalenti:

- servendosi dell'espressione esplicita di $S(x)$

$$\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx = \int_a^{\log(2)} \frac{e^x}{4}\,\frac{1}{(1-\frac{e^x}{4})^2}\,dx = \left.\frac{1}{(1-\frac{e^x}{4})}\right|_a^{\log(2)} =$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{e^{\log(2)}}{4})} - \frac{1}{(1-\frac{e^a}{4})} = 2 - \frac{1}{(1-\frac{e^a}{4})}$$

- integrando *termine a termine*, operazione permessa essendo la serie assegnata uniformemente convergente nell'intervallo di integrazione assegnato,

$$\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\log(2)} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{nx} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(e^{n\log(2)} - e^{na}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{4}\right)^n =$$

$$= 2 - \frac{1}{1-\frac{e^a}{4}}$$

  risultato naturalmente uguale a quello precedente. . . !

La domanda relativa all'integrazione impropria

$$\int_{-\infty}^{\log(2)} S(x)\,dx = \lim_{a\to--\infty} \int_a^{\log(2)} S(x)\,dx$$

su tutta la semiretta riguarda

- esistenza dell'integrale,
- e suo valore.

E' facile rispondere contemporaneamente alle due questioni dal momento che possediamo, esplicitamente l'espressione dell'integrale su $[a, \log(2)]$, pertanto

$$\int_{-\infty}^{\log(2)} S(x)\,dx = \lim_{a\to--\infty} \left(2 - \frac{1}{1-\frac{e^a}{4}}\right) = 1$$

1.14. Esercizio.
Sia

$$f(x,y) = e^{-x^2-4y^2}$$

- *calcolare l'integrale*

$$\iint_{E_M} f(x,y)dxdy$$

  essendo E_M *la regione delimitata dall'ellisse* $x^2+4y^2 \le M^2$
- *riconoscere che* $f(x,y)$ *soddisfa la condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale esteso a tutto* R^2
- *determinare il valore di*

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy$$

SOLUZIONE:

La funzione esponenziale e^t verifica, per ogni $t > 0$ le disuguaglianze

$$e^t > 1+t, \quad e^{-t} < \frac{1}{1+t}$$

dalle quali segue

$$e^{-x^2-y^2} < \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

Tenuto presente che

$$e^{-x^2-4y^2} \le e^{-x^2-y^2} < \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

ne segue l'esistenza dell'integrale improprio in tutto il piano.
Calcoliamo l'integrale sulla regione E_M delimitata dall'ellisse

$$\frac{x^2}{M^2} + \frac{y^2}{M^2/4} = 1$$

servendosi delle coordinate polari-ellittiche

$$x = M\rho\,\cos(\theta),\; y = \frac{M}{2}\rho\sin(\theta), \quad \rho \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]$$

Lo jacobiano della trasformazione vale $\frac{1}{2}M^2\rho$ pertanto

$$\iint_{E_M} e^{-x^2-4y^2}dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-M^2\rho^2}\,\frac{M^2}{2}\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^1 e^{-M^2\rho^2}\,(2\,M^2\rho)\,d\rho = \frac{1}{2}\pi\left(1-e^{-M^2}\right)$$

Passando al limite su $M \to \infty$ si ottiene quindi

$$\int_{R^2} e^{-x^2-4y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\pi$$

1.15. Esercizio. *Dire se le funzioni*

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \qquad \frac{e^x-1}{x^2}, \qquad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[0,1]$ *e* $(0,+\infty)$.

SOLUZIONE:

- $$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}$$

  É continua in $[0,1]$, esiste infatti il limite per $x \to 0$: quindi l'integrale in tale intervallo esiste in senso classico. Si maggiora, da $x \geq 1$ in poi con

  $$\frac{1}{1+x^2}$$

  quindi esiste l'integrale, in senso improprio su $(0,+\infty)$.

- $$\frac{e^x-1}{x^2}$$

  Tenuto conto che

  $$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...$$

  si ha

  $$\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + ...\}$$

  ovvero

  $$\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$

  avendo indicato con $\varphi(x)$ la somma, continua, della serie a secondo membro.

  Tenuto conto che $\varphi(x)$ é integrabile su $[0,1]$ mentre $\frac{1}{x}$ non lo é se ne conclude che la funzione assegnata non é integrabile su $[0,1]$

  Per quanto concerne l'integrale su $(0,+\infty)$ é evidente che non esiste in quanto abbiamo giá riconosciuto la divergenza sul solo primo tratto $(0,1)$.

Tenuto conto, anche indipendentemente da quanto studiato su $(0,1)$, che la funzione assegnata

$$\frac{e^x - 1}{x^2}$$

diverge per $x \to \infty$ (l'esponenziale a numeratore infatti diverge com'é noto piú della potenza x^2 a denominatore) si riconosce nuovamente che non esiste l'integrale improprio su $(0, +\infty)$.

- $$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

  Il fattore

  $$\frac{\sin(x)}{x}$$

  é limitato da 1 e quindi

  $$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

  condizione sufficiente a riconoscere l'integrabilitá della funzione assegnata su $[0,1]$ Per quanto concerne $(0, +\infty)$ osserviamo che,

  $$(0, +\infty) = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

  su $(0,1)$ l'integrale improprio é stato giá studiato.

  Per $x \geq 1$ riesce

  $$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$

  circostanza anche questa sufficiente a riconoscere, la esistenza dell'integrale improprio su $(1, +\infty)$.

  Quindi esiste l'integrale improprio su $(0, +\infty)$.

1.16. Esercizio. *Dimostrare che la funzione*

$$x^\beta e^{-x}$$

è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1, +\infty)$ *per ogni* $\beta \in \mathbb{R}$ *e calcolare l'integrale per* $\beta = 0, 1, 2$.

SOLUZIONE:

La funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \frac{1}{m!}x^m + \ldots$$

verifica, per ogni $x \geq 0$ la diseguaglianza

$$e^x \geq \frac{1}{m!} x^m$$

qualunque il naturale m.
Pertanto

$$x^\beta e^{-x} = \frac{x^\beta}{e^x} \leq m! \frac{1}{x^{m-\beta}}$$

stima quest'ultima sufficiente per

$$m - \beta > 1$$

a riconoscere l'esistenza dell'integrale improprio su $(1, +\infty)$.
I valori richiesti sono

$$\begin{cases} \int_1^a e^{-x} dx & = e^{-1} - e^{-a} & \rightarrow & 1, \\ \int_1^a x\, e^{-x} dx & = 2\, e^{-1} - \frac{1+a}{e^a} & \rightarrow & 1, \\ \int_1^a x^2\, e^{-x} dx & = 5\, e^{-1} - \frac{2+2\,a+a^2}{e^a} & \rightarrow & 2. \end{cases}$$

1.17. Esercizio. *Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\, dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{x \log^\beta (x)}$$

é positiva su $(2, +\infty)$: pertanto per decidere se l'integrale improprio esiste basta esaminare se esiste il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \log^\beta (x)} dx$$

Il calcolo é facile:

- se $\beta \neq 1$ riesce

$$\int_2^t \frac{1}{x \log^\beta x} dx = \frac{1}{1-\beta} \left\{ (\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta} \right\}$$

- se $\beta = 1$ riesce

$$\int_2^t \frac{1}{x \log x} dx = \log(\log(t)) - \log(\log(2))$$

Pertanto nel primo caso si ha convergenza solo se $\beta > 1$, mentre nel secondo caso non c'é convergenza.
RIASSUMENDO l'integrale improprio richiesto esiste se e solo se $\beta > 1$.
Per tali valori β legittimi l'integrale vale, ovviamente,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1-\beta} \left\{ (\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta} \right\} = \frac{(\log(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

1.18. Esercizio. *Dire se è integrabile in senso improprio la funzione* $\log(x^2+y^2)$ *nell'insieme* $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. *Se integrabile. si calcoli esplicitamente tale integrale improprio.*

SOLUZIONE:

La funzione integranda diverge nell'origine.
Tenuto conto tuttavia che

$$\lim_{t \to 0^+} t^\alpha \log(t) = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

se ne deduce che

$$|t^\alpha \log(t)| \le M \quad \leftrightarrow \quad |\log(t)| \le \frac{M}{|t|^\alpha}$$

ovvero

$$|\log(x^2+y^2)| \le M \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

disuguaglianza che, scelto $\alpha < 1$ é sufficiente a garantire l'esistenza dell'integrale doppio improprio.
Il valore di tale integrale corrisponde pertanto al limite

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{B_n} \log(x^2+y^2) dx dy, \quad B_n : \sqrt{\frac{i}{n}} \le x^2+y^2 \le 1$$

Il calcolo di ciascun integrale sulle corone circolari scelte si esegue tramite le coordinate polari

$$\iint_{B_n} \log(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{1/n}}^1 \log(\rho^2) \rho d\rho = 4\pi \int_{\sqrt{1/n}}^1 \log(\rho) \rho d\rho$$

Eseguiti i calcoli riesce

$$\iint_{B_n} \log(x^2+y^2)dxdy = 4\pi \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}[\log(1/\sqrt{n}) - \frac{1}{2}] \right\} \quad \to \quad -\pi$$

1.19. Esercizio. *Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio*

$$\int\int_{R^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^\beta}\, dx\, dy$$

Soluzione:

La funzione integranda, continua in tutto R^2, verifica la disuguaglianza

$$\frac{1}{1+(x^2+y^2)^\beta} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{2\beta}}$$

dalla quale segue l'esistenza dell'integrale improprio non appena

$$2\beta > 2$$

ovvero $\beta > 1$.
Per $\beta = 1$ l'integrale diverge, infatti gli integrali sui cerchi di centro l'origine e raggio $\rho = n$ danno, come valori

$$2\pi \int_0^n \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho = \pi \log(1+n^2) \to \infty$$

ovviamente divergente.
Le funzioni costruite su valori $\beta < 1$ sono addirittura maggiori di quella relativa a $\beta = 1$; se diverge l'integrale di questa figuriamoci come divergeranno quelli per $\beta < 1$...

1.20. Esercizio. *Dire per quali β esiste l'integrale doppio improprio*

$$\int\int_C \frac{(x-y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}, \qquad C = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

e, per i β possibili, calcolare l'integrale.

Soluzione:

La funzione integranda $f(x,y)$ soddisfa, indicato con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ la disuguaglianza

$$|f(x,y)| \leq M \frac{\rho^3}{\rho^{2\beta}}$$

da cui si riconosce l'esistenza dell'integrale doppio improprio se

$$2\beta - 3 < 2, \quad \leftrightarrow \quad \beta < \frac{5}{2}$$

Per tali valori β leciti esiste l'integrale doppio improprio e vale 0 per le evidenti proprietá dispari della $f(x, y)$ al di sopra e al di sotto della retta $x - y = 0$ che divide il cerchio assegnato in due semicerchi.
Se $\beta > \frac{5}{2}$ l'integrale improprio di $|f(x, y)|$ diverge come si riconosce lavorando sulle corone circolari

$$B_n : \sqrt{\frac{1}{n}} < x^2 + y^2 \leq 1$$

Gli integrali cui si perviene, servendosi delle coordinate polari sono infatti

$$\int_0^{2\pi} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 d\theta \int_{\sqrt{1/n}}^1 \rho^{4-2\beta} d\rho =$$

$$= \frac{1}{5 - 2\beta} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{5-2\beta} - 1 \right\} \int_0^{2\pi} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 d\theta$$

nei quali é evidente la divergenza del termine

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{5-2\beta}$$

Il caso $\beta = \frac{5}{2}$ diverge anch'esso: nell'integrazione in luogo delle potenze precedenti spunta un logaritmo...

1.21. Esercizio. *Determinare il minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sulla retta $x + y = 1$.*

SOLUZIONE:

La funzione assegnata rappresenta il quadrato $\overline{OP}^2$ della distanza dell'origine O dai punti P della retta r assegnata.
Un semplice disegno, vedi Figura **??**, permette di riconoscere che il punto $Q = (1/2, 1/2)$ é il punto della retta r piú vicino all'origine e pertanto

$$\min_{(x,y) \in r} \left(x^2 + y^2 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Calcolo diretto:

Si ricava, dal vincolo $x + y = 1$ $y = 1 - x$, pertanto la funzione f sul vincolo coincide con

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

Tenuto presente che

$$(2x^2 - 2x + 1)' = 4x - 2, \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{4}$$

unico punto stazionario che é, necessariamente, di minimo:

$$\min_{(x,y)\in r} f(x, y) = f(1/2, 1/2) = 1/2$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 & = 0 \end{cases}$$

ne segue

$$x_0 = -\frac{1}{2}\lambda_0, \quad y_0 = -\frac{1}{2}\lambda_0, \quad -\lambda_0 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$$

Osservazione 1.2. *Il caso considerato non garantisce l'esistenza del massimo: infatti la funzione $f = x^2 + y^2$ é continua ma il vincolo*

$$x + y = 1$$

definisce un insieme E chiuso ma non limitato, quindi non coperto dal Teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimo e minimo di una funzione reale continua su un insieme chiuso e limitato.
É facile convincersi del resto che la funzione $x^2 + y^2$ prende sul vincolo $x + y = 1$ valori comunque grandi, ovvero é illimitata superiormente, quindi non ha massimo.

1.22. Esercizio.

- *Tra i rettangoli di perimetro assegnato determinare quelli di area massima,*
- *tra i rettangoli di area fissata determinare quelli di perimetro minimo.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Indichiamo con x e y le dimensioni del rettangolo, con $A(x,y) = x\,y$ l'area e con $P(x,y) = 2(x+y)$ il perimetro.
Il primo problema di massimo vincolato é

$$\max_{P(x,y)=p} A(x,y)$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x,y,\lambda) = A(x,y) + \lambda\,\{P(x,y) - p)\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 2y - p & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow X_0 = y_0 = \frac{p}{4}$$

Il quadrato ha, tra i rettangoli di stesso perimetro, l'area maggiore:

$$A = \frac{p^2}{4^2}$$

Osservazione 1.3. *Il problema di massimo vincolato posto prende anche il nome di problema isoperimetrico per l'ovvio richiamo al tipo di vincolo.*
Esso viene anche detto problema di Didone dalla leggenda classica che attribuisce alla regina Didone la scelta del terreno su cui fondare Cartagine, il terreno piú ampio che lei fosse riuscita a delimitare con una cinghia di cuoio ricavata dalla pelle di un solo momtone.
Il problema é naturalmente duplice: ricavare dall'unica pelle la cinghia piú lunga, quindi molto sottile, distenderla sul terreno nella forma piú conveniente in termini di area.
Il secondo punto, la forma piú conveniente, conduce, nel caso di un terreno pianeggiante, naturalmente alla circonferenza, che naturalmente l'intelligente Didone scelse.
Il problema proposto nell'esercizio precedente ha un vincolo in piú, che Didone non aveva, si deve scegliere un terreno rettangolare.
Liberandosi dall'obbligo del rettangolo, e quindi autorizzati a prendere anche cerchi, con un perimetro p si costruisce una circonferenza di raggio

$$r = \frac{p}{2\pi}$$

e quindi di area

$$A = \pi \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2}{4\pi}$$

maggiore di quella $\frac{p^2}{4^2}$ *trovata con l'obbligo di delimitare solo rettangoli. Il guadagno scegliendo, a paritá di perimetro, un cerchio anziché un quadrato*

$$\frac{4}{\pi} \simeq 1,274$$

di oltre il 27%.

Il secondo problema é

$$\min_{A(x,y)=k} P(x,y)$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x,y,\lambda) = P(x,y) + \lambda \{A(x,y) - k\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + y\lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + x\lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x\,y - k & = 0 \end{array}\right. \quad \to \ x_0 = y_0 = \sqrt{k}$$

Il quadrato ha, tra i rettangoli di stessa area, il perimetro minore.

1.23. Esercizio. *Determinare fra i rettangoli inscritti nella circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$ *quelli di area massima.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il vincolo imposto di essere inscritto nella circonferenza corrisponde a richiedere che i vertici (x, y) del rettangolo soddisfino l'equazione $x^2 + y^2 = 1$.
Indichiamo con x e y le coordinate di uno dei quattro vertici del rettangolo, le dimensioni saranno allora $2x$ e $2y$, e l'area

$$A(x,y) = 4xy$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda \left\{x^2 + y^2 - 1\right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4y + 2x\lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4x + 2y\lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{cases} \quad \to x_0 = \pm y_0 = \pm\sqrt{2}$$

Il rettangolo di maggiore area inscritto nella circonferenza di raggio 1 é il quadrato di lato $\ell = 2\sqrt{2}$.

Osservazione 1.4. *Il problema poteva essere affrontato direttamente ricordando che i punti (x, y) della circonferenza sono dati da*

$$x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0,\ 2\pi]$$

e che quindi l'area risulta

$$A(\theta) = 4\cos(\theta\sin(\theta)$$

ovvero

$$A(\theta) = 2\sin(2\theta)$$

espressione che raggiunge il massimo se

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

che conduce al quadrato....

1.24. Esercizio. *Determinare il minimo della funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

sulla retta $x + y + 1 = 0$ (legge della riflessione)

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione assegnata $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ rappresenta la somma delle lunghezze

$$\overline{OP} + \overline{PR}$$

essendo

$$O = (0, 0),\ R = (1, -1),\ P = (x, y) \in r$$

avendo indicato con r la retta $x + y + 1 = 0$.
Il problema di minimo assegnato richiede il punto $P \in r$ rispetto al quale la poligonale OPR sia di lunghezza minima.

$\boxed{\text{Soluzione geometrica}}$

Il punto O' é il simmetrico di O rispetto alla retta $x + y + 1 = 0$, pertanto

$$\overline{OP} + \overline{PR} = \overline{O'P} + \overline{PR} \geq \overline{O'Q} + \overline{QR} = \overline{OQ} + \overline{QR}$$

Il punto Q intersezione della retta $x + y + 1 = 0$ con la retta per R e O' é il punto di minimo per f.

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \lambda \{x + y + 1\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-1+x}{\sqrt{(-1+x)^2+(1+y)^2}} + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1+y}{\sqrt{(-1+x)^2+(1+y)^2}} + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 + x + y & = 0 \end{cases} \quad \to \; x_0 = 0, \quad y_0 = -1$$

Ovviamente il punto ottenuto annullando le derivate della Lagrangiana é il punto previsto geometricamente: il valore minimo é pertanto

$$f(0, -1) = 2.$$

1.25. Esercizio. *Determinare la distanza minima che intercorre tra il punto $P = (-1, 0)$ e i punti della linea $y^2 = x^3$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Possiamo tranquillamente occuparci del quadrato della distanza anziché della distanza, lavorando cosí con un'espressione senza radici: infatti nel punto (x_0, y_0) nel quale riesce minima la distanza riuscirá minimo anche il suo quadrato e viceversa.

$$L(x, y, \lambda) = (x+1)^2 + y^2 + \lambda \left\{y^2 - x^3\right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x+1) - 3\lambda x^2 & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y^2 - x^3 & = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni:

- lo si riconosce eseguendo un paio di sostituzioni e pervenendo ad equazioni di secondo grado prive di soluzione,
- oppure osservando che le linee di livello della funzione f, circonferenze di centro $(-1, 0)$ non sono mai tangenti al vincolo $y^2 - x^3 = 0$,

Tuttavia é evidente come l'origine $O = (0, 0)$ sia il punto della curva $y^2 - x^3 = 0$ piú vicino al punto $P = (-1, 0)$.
Come si spiega la questione ?
Nell'origine il gradiente dell'espressione $g(x, y) = y^2 - x^3$ che determina il vincolo

$$\nabla g = \{-3x^2,\, 2y\} \quad \to \quad \nabla g(0, 0) = \{0,\, 0\}$$

é il vettore nullo.
Tutta la teoria fatta, fondata sulla possibilitá di esplicitare dall'equazione $g(x, y) = 0$ o $y = Y(x)$ o $x = X(y)$ naufraga...
Ricordate pertanto che la tecnica della Lagrangiana funziona relativamente a

- funzioni e vincoli di classe C^1
- vincoli $g(x, y) = 0$ localmente esplicitabili, cosa che accade certamente per il Teorema di Dini se $\nabla g \neq 0$.

Osservazione 1.5. *Nell'esercizio precedente abbiamo assistito al naufragio della (peraltro sempre utilissima) tecnica dei moltiplicatori di Lagrange: osserviamo che, invece l'algoritmo apparentemente equivalente del sistema*

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ \phi_x & \phi_y \end{pmatrix} = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

avrebbe funzionato bene...

Infatti

$$f_x = 2(x + 1),\ f_y = 2y,\ \phi_x = -3x^2,\ \phi_y = 2y$$

e quindi

$$\det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ \phi_x & \phi_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2(x + 1) & 2y \\ -3x^2 & 2y \end{pmatrix} = 4y(x+1)+6yx^2 = 0 \to y = 0$$

da cui sostituendo nell'equazione del vincolo si sarebbe ricavato $x_0 = 0$, ritrovando il punto di minimo previsto.

1.26. Esercizio. *Decomporre il numero positivo a in tre addendi positivi* x, y, z, $\quad x + y + z = a$, *tali che il prodotto*

$$x^m\, y^n\, z^r$$

relativo ai tre esponenti m, n, $r \in \mathbb{N}$ *sia massimo.*

SOLUZIONE:

Conviene considerare, e cercare di rendere massimo, il logaritmo del prodotto assegnato

$$f(x, y, z) = \ln(x^m\, y^n\, z^r) = m\ln(x) + n\ln(y) + r\ln(z)$$

Indicato con $g(x, y, z) - a = 0$ il vincolo la condizione di tangenza

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \leftrightarrow \quad \left\{\frac{m}{x}, \frac{n}{y}, \frac{r}{z}\right\} \parallel \{1, 1, 1\}$$

$$x = \rho m,\ y = \rho n,\ z = \rho r, \quad \rho(m + n + r) = a$$

da cui discende che il massimo per f si realizza prendendo

$$x_0 = \frac{am}{m+n+r},\ y_0 = \frac{an}{m+n+r},\ z_0 = \frac{ar}{m+n+r}$$

Il massimo del prodotto assegnato si raggiunge naturalmente nello stesso punto e vale

$$\left(\frac{a}{m+n+r}\right)^{m+n+r} m^m\, n^n\, r^r$$

Osservazione 1.6. *L'algoritmo di risoluzione del problema di massimo del prodotto di tre variabili di somma assegnata si adatta anche al caso di un numero diverso di addendi.*
Cosí, ad esempio, include anche il quesito del precedente esercizio 7

$$a = 1, \quad m = n = 2, \quad r = 0,$$

$$\left(\frac{a}{m+n+r}\right)^{m+n+r} m^m\, n^n\, r^r = \left(\frac{1}{4}\right)^4 2^2\, 2^2 = \frac{1}{16}$$

1.27. Esercizio. *Determinare tra i triangoli di base e perimetro assegnati quello di area maggiore.*

SOLUZIONE:

Sia 1 la lunghezza della base assegnata e siano x e y gli altri due lati: il vincolo E (problema isoperimetrico) assegnato é

$$x + y + 1 = 2p, \quad x \geq 0,\ y \geq 0$$

L'insieme E é chiuso e limitato: il problema di massimo é coperto dal Teorema di Weierstrass.

L'area si puó calcolare con la formula di Erone[1]

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)}$$

Il minimo é, ovviamente, 0.

$\boxed{\text{La lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)} + \lambda(x + y + 1 - 2p)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{p(p-y)(p-1)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)}} + \lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{p(p-x)(p-1)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)}} + \lambda & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + 1 - 2p & = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava $p - y = p - x, \quad \to \quad x = y$ e dall'ultima

$$x_0 = y_0 = \frac{2p - 1}{2}$$

il triangolo isoscele: l'area che gli compete é pertanto

$$A = \sqrt{p(p - x_0)(p - y_0)(p - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{p\,(p-1)}$$

1.28. Esercizio. *Assegnato un triangolo $\triangle_{ABC}$ con tutti e tre gli angoli acuti, determinare un punto $P \in \triangle_{ABC}$ tale che la somma*

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$$

sia minima. (Punto di Fermat, vedi Courant Hilbert)

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La costruzione geometrica, tutta da giustificare, é semplice: si costruiscono sui tre lati del triangolo assegnato i tre corrispondenti triangoli equilateri e si congiungono i loro vertici esterni con i vertici del triangolo.

L'intersezione di tali segmenti individua il punto di Fermat, punto dal quale i tre vertici del triangolo sono visti sotto un angolo di 120^0

Il problema di minimo assegnato é coperto dal Teorema di Weierstrass:

- la funzione $d(P) = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ 'e ovviamente continua,

[1] http://www.matematicamente.it/cimolin/formula/formula2.htm

- l'insieme in cui varia P é il triangolo $\triangle_{ABC}$ ovviamente chiuso e limitato.

Non si tratta di un problema di massimo o minimo vincolati come i precedenti: si tratta di un problema di minimo del tutto standard !

Tuttavia si trova in questo foglio perché la sua classica soluzione si fonda su un problema di tipo vincolato:

- scelto $P \in \triangle_{ABC}$ tracciamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C passante per P,
- muovendo P su tale circonferenza non varia $\overline{CP}$ ma variano certamente $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$,
- quindi un algoritmo di ottimizzazione puó essere quello di scegliere $P \in \mathcal{C}$ in modo da rendere minima la somma $\overline{AP}+\overline{BP}$
- il problema
$$min_{\in \mathcal{C}}(AP + BP)$$
é un problema di minimo vincolato la cui soluzione é data dalla nota regola della riflessione per la quale dovrá aversi, tenuto conto che la retta CP é perpendicolare in P alla $\mathcal{C}$
$$A\widehat{P}C = B\widehat{P}C$$
- eseguendo lo stesso procedimento invece che sul vertice C su quello A o su quello B si ottengono le relazioni analoghe
$$B\widehat{P}A = C\widehat{P}A, \quad A\widehat{P}B = C\widehat{P}B$$
- ne segue
$$A\widehat{P}C = B\widehat{P}C = A\widehat{P}B$$

che quindi riconosce come il punto di minimo sia collegato al fatto di essere visto dai tre vertici sotto lo stesso angolo, naturalmente di 120^0

Osservazione 1.7. *Se il triangolo $\triangle_{ABC}$ é acutangolo o i suoi angoli interni sono minori di 120^0 esiste un punto interno che vede i tre vertici sotto un angolo di 120^0, altrimenti il punto P di minimo della $d(P)$ cade sulla frontiera.*

1.29. Esercizio. *Siano*
$$r_1 : \{y = x,\ z = 0\}, \quad r_2 : \{x + y = 1,\ z = 1\}$$
due rette di $\mathbb{R}^3$ prive di punti comuni

- *determinare $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in r_1,\ P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in r_2$ tali che*
$$\overline{P_1P_2} \le \overline{PQ} \quad \forall P \in r_1,\ Q \in r_2$$

- *Verificare che la retta per P_1 e P_2 é ortogonale alle due rette r_1, r_2 assegnate.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Indichiamo con P_1 e P_2 i punti rispettivamente delle due rette

$$P_1 = \{u, u, 0\}, \quad P_2 = \{1 - v, v, 1\}$$

$$\overline{P_1 P_2}^2 = (1 - v - u)^2 + (u - v)^2 + 1$$

Si tratta, contrariamente a quello che puó apparire di un problema di minimo definito in tutto il piano (u, v) : si tratta pertanto di cercare i punti critici della funzione $\phi(u, v) = (1 - v - u)^2 + (u - v)^2 + 1$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial u} = -2(1 - v - u) + 2(u - v) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial v} = -2(1 - v - u) - 2(u - v) = 0 \end{cases} \quad \to u_0 = v_0 = \frac{1}{2}$$

I punti piú vicini delle due rette sonoi pertanto

$$P_{10} = \{1/2, 1/2, 0\}, \quad P_{20} = \{1/2, 1/2, 1\}$$

Un vettore parallelo alla r_1 é $v_1 = \{1, 1, 0\}$, uno parallelo ala r_2 é $v_2 = \{1, -1, 0\}$ uno parallelo alla $P_{10}P_{20}$ é $v = \{0, 0, 1\}$: é facile riconoscere (prodotto scalare) che

$$v_1 \perp v, \quad v_2 \perp v$$

1.30. Esercizio. *Dato $\alpha > 0$, studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha - 1} \right)$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$0 \le \sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha - 1} = \frac{2}{\sqrt{n^\alpha + 1} + \sqrt{n^\alpha - 1}} \le \frac{2}{n^{\alpha/2}}$$

Pertanto se $\alpha > 2$ la serie assegnata é dominata dalla

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

convergente, quindi é essa stessa convergente per confronto.

Il caso $\alpha = 2$:

Consideriamo l'espressione (esatta)

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

Tenuto conto che

$$0 \leq \sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1} \leq 2\sqrt{n^2+1} \leq 2\sqrt{2n^2} = 2\sqrt{2}n$$

si riconosce che

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \geq \frac{2}{2\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n}$$

e quindi, per confronto, si riconosce che la serie assegnata, per $\alpha = 2$ é divergente.

Osservazione 1.8. *Ricordiamo la importante approssimazione*

$$\sqrt{1+x} \;\approx\; 1+\frac{x}{2}$$

tanto piú affidabile quanto piú $x \approx 0$ e serviamocene per i termini della serie:

- *uso naif*

  $$\sqrt{n^\alpha+1} \approx 1+\frac{n^\alpha}{2}$$

  poco serio: l'approssimazione sarebbe buona se $n^\alpha \approx 0$ cosa tutt'altro che vera: $n \to \infty$....
- *uso piú saggio*

  $$\begin{aligned}\sqrt{n^\alpha+1} &= n^{\alpha/2}\sqrt{1+n^{-\alpha}} \approx n^{\alpha/2}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2}\right)\\ \sqrt{n^\alpha-1} &= n^{\alpha/2}\sqrt{1-n^{-\alpha}} \approx n^{\alpha/2}\left(1-\frac{n^{-\alpha}}{2}\right)\end{aligned}$$

  da cui

  $$\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1} \approx n^{-\alpha/2}$$

- *era quindi ragionevole attendersi la condizione*

  $$\frac{\alpha}{2} > 1 \quad \to \quad \alpha > 2$$

  e la non convergenza se $\alpha = 2$.

1.31. Esercizio. *Dire se le funzioni*

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \quad \frac{e^x-1}{x^2}, \quad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[0,1]$ *e* $(0,+\infty)$.

SOLUZIONE:

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}$$

- é continua, cioé ammette limite per $x \to 0^+$
- quindi esiste l'integrale improprio su $(0,1]$.
- é dominata da
$$\left|\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$
per $x \in (0,+\infty)$
- quindi esiste l'integrale improprio su $(0,+\infty]$.

$$\frac{e^x-1}{x^2}$$

- non ammette limite, cioé diverge, per $x \to 0^+$
- non esiste l'integrale improprio su $(0,1]$ perché
$$\frac{e^x-1}{x^2} > \frac{1}{x}$$
- poiché giá sappiamo che non esiste l'integrale improprio su $(0,1]$ evidentemente non esiste neanche quello su $(0,+\infty)$.

$$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

- é dominata per $x \in (0,1]$ da
$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$
- tenuto conto che $1/\sqrt{x}$ é integrabile in $(0,1]$ ne segue che esiste l'integrale improprio della funzione assegnata su $(0,1]$.
- é dominata da
$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$

- tenuto conto che $1/|x|^{3/2}$ é integrabile in $(1, +\infty]$ ne segue che esiste l'integrale improprio della funzione assegnata su $(0, +\infty]$.

1.32. Esercizio. *Dire per quali valori di* $\alpha > 0$ *esistono finiti gli integrali impropri*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1 + \ln^2 x)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^\alpha} dx.$$

SOLUZIONE:

Tenuto conto che

$$\forall \gamma > 0 \ \exists x_\gamma \quad x > x_\gamma \quad \to \quad \ln(x) < x^\gamma$$

si ha, per $x > x_\gamma$,

$$x^\alpha(1 + \ln^2(x)) \le x^\alpha(1 + x^{2\gamma}) \le 2x^{\alpha+2\gamma}$$

da cui, passando ai reciproci

$$\frac{1}{x^\alpha(1 + \ln^2(x))} \ge \frac{1}{2x^{\alpha+2\gamma}}$$

Se $\alpha < 1$ allora é possibile scegliere γ tale che

$$\alpha + 2\gamma < 1$$

e quindi

$$\frac{1}{2x^{\alpha+2\gamma}}$$

non é integrabile in $[1, +\infty)$: e di conseguenza, per confronto, non é integrabile neanche la funzione assegnata.
Tenuto conto inoltre che

$$\frac{1}{x^\alpha(1 + \ln^2(x))} \le \frac{1}{x^\alpha}$$

ne segue che se $\alpha > 1$ la funzione assegnata é, per confronto, integrabile in $[1, +\infty)$.
Il caso $\alpha = 1$ da luogo ad un intdegrale improprio convergente come si riconosce dal calcolo esplicito

$$\int_1^L \frac{1}{x\,(1 + \ln^2(x))} dx = \arctan\left(\ln(x)\right)\Big|_1^L = \arctan(\ln(L)) \quad \to \quad \frac{\pi}{2}$$

SOLUZIONE SECONDO INTEGRALE:

Per quanto concerne gli $x \to +\infty$ si ha $\ln(1 + 1/x^2) \leq 1/x^2$ da cui

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha+2}}$$

e quindi l'integrabilitá in $[1, +\infty)$ se $\alpha + 2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$
Per quanto concerne gli $x \to 0^+$ si ha invece

$$\forall\gamma > 0 \quad \lim_{x\to 0} x^\gamma \ln(1 + 1/x^2) = 0 \quad \to \quad \ln(1 + 1/x^2) \leq \frac{1}{x^\gamma}$$

Ne segue che

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha+\gamma}}$$

maggiorazione che implica l'integrabilitá se $\alpha + \gamma < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$
Riassumendo l'integrale improprio é convergente per

$$-1 < \alpha < 1$$

1.33. Esercizio. *Dimostrare che*

- $$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\arctan x}{x^3}\, dx = 0.$$
- *se* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *é integrabile in senso improprio riesce*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} f(x)\, dx = 0.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

É chiaro che rispondendo alla seconda domanda si risponde sostanzialmente anche alla prima.

$$\left|\frac{\arctan x}{x^3}\right| \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{|x|^3}$$

ha integrale improprio assolutamente convergente in $[1, +\infty)$, quindi

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{\arctan x}{x^3}\, dx = S$$

Del resto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\arctan x}{x^3}\, dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx - \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx = 0$$

Il fatto che i precedenti conti siano riferiti alla $\dfrac{\arctan x}{x^3}$ o ad altra funzione dotata di integrale improprio convergente in $[0,+\infty)$ non cambia nulla.

Osservazione 1.9. *Il fatto che*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx = 0.$$

é del tutto ovvio tenuto conto che

$$|\arctan(x)| \le \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [n, n+1] \quad \to \quad \frac{1}{x^3} \le \frac{1}{n^3}$$

da cui

$$\left|\int_n^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx\right| \le \frac{\pi}{2n^3}\int_n^{n+1} dx = \frac{\pi}{2n^3} \quad \to \quad 0$$

1.34. Esercizio. *Dire se la funzione* $\log(x^2+y^2)$ *è integrabile in senso improprio nell'insieme* $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 < 1\}$. *Se integrabile, calcolare esplicitamente tale integrale improprio.*

SOLUZIONE:

L'esistenza (o meno) dell'integrale improprio richiesto corrisponde all'esistenza (o meno) del seguente limite

$$\lim_{r\to 0^+}\iint_{C(r,1)} \log(x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad C(r,1): \; r^2 \le x^2+y^2 \le 1$$

Servendosi delle coordinate polari l'integrale doppio sulla corona $C(r,1)$ diventa

$$\int_0^{2\pi} d\,\theta \int_r^1 \log(\rho^2)\,\rho\,d\,\rho = 4\pi\int_r^1 \log(\rho)\rho d\rho$$

Tenuto presente che la funzione integranda $\rho\,\log(\rho)$ è limitata in $(0,1]$ l'integrale improprio esiste certamente.
Esso rappresenta il volume con segno del pozzo circolare, vedi Figura **??**, profondissimo ma sempre piú stretto, le cui pareti sono il grafico della funzione di due variabili $\log(x^2+y^2)$, negativa per $x^2+y^2 < .$
Il conto esplicito, integrando per parti,

$$\lim_{r\to 0}\int_r^1 \rho\,\log(\rho)\,d\rho = -\frac{1}{4}$$

da cui

$$\iint \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = -\pi$$

1.35. Esercizio. *Dire per quali β esiste l'integrale doppio improprio*

$$\int\int_C \frac{(x-y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}, \qquad B = \{x^2+y^2 \le 1\}$$

e, per i β possibili, calcolare l'integrale.

SOLUZIONE:

Servendosi delle coordinate polari si arriva all'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{\rho^3(\cos(\theta)-\sin(\theta))^3}{\rho^{2\beta}}\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)-\sin(\theta))^3\,d\theta \int_r^1 \rho^{4-2\beta}\,d\rho$$

É evidente che l'integrale improprio, il limite per $r \to 0$, esiste se e solo se

$$4-2\beta > -1 \quad \to \quad \beta < \frac{5}{2}$$

1.36. Esercizio. Sia

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}$$

definita su $\mathbb{R}^3$. Sia $C(r,R) \equiv \{(x,y,z) : r \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le R\}$: calcolare per ogni α e $r < 1 < R$ gli integrali

$$\iiint_{C(r,1)} f(x,y,z)dxdydz, \qquad \iiint_{C(1,R)} f(x,y,z)dxdydz.$$

Discutere l'integrabilità impropria in $C(0,1)$ e in $C(1,+\infty)$ al variare di α.

SOLUZIONE:

Lo strumento naturale per calcolare gli integrali sulle sfere di $\mathbb{R}^3$ di centro l'origine e raggio r sono le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\,\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho\,\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\,\cos(\phi) \end{cases} \qquad (\rho,\psi,\theta) \in [o,r]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

con jacobiano $|J| = \rho^2\,\sin(\psi)$.

Riesce pertanto

$$\iiint_{C(r,1)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\psi)\,d\psi \int_r^1 \rho^{2-2\alpha}\,d\rho =$$

$$= 4\pi \int_r^1 \rho^{2-2\alpha}\,d\rho = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}(1-r^{3-2\alpha}) & \text{se} \quad 2-2\alpha \neq -1 \\ \\ -4\pi\log(r) & \text{se} \quad 2-2\alpha = -1 \end{cases}$$

Analogamente

$$\iiint_{C(1,R)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}(R^{3-2\alpha}-1) & \text{se} \quad 2-2\alpha \neq -1 \\ \\ 4\pi\log(R) & \text{se} \quad 2-2\alpha = -1 \end{cases}$$

L'integrabilitá, impropria, in $C(0,1)$ corrisponde all'esistenza del limite, per $r \to 0^+$ degli integrali su $C(r,1)$ e quindi l'esistenza del limite

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{4\pi}{3-2\alpha}(1-r^{3-2\alpha}) = \frac{4\pi}{3-2\alpha}$$

esistenza garantita se e solo se $3-2\alpha > 0 \quad \to \quad \alpha < 3/2$.
Analogamente l'integrabilitá, impropria, in $C(1,+\infty)$ corrisponde all'esistenza del limite, per $R \to +\infty$ degli integrali su $C(1,R)$ e quindi l'esistenza del limite

$$\lim_{R\to +\infty} \frac{4\pi}{3-2\alpha}(R^{3-2\alpha}-1) = -\frac{4\pi}{3-2\alpha}$$

esistenza garantita se e solo se $3-2\alpha < 0 \quad \to \quad \alpha > 3/2$.