ANALISI VETTORIALE

Esercizi pre-ESO 2

5 febbraio 2011

1.1. Esercizio. *Dato il problema di Cauchy,*

$$\begin{cases} y' = (y+1)y(y-1) \\ y(0) = \Lambda \end{cases}$$

- *dire quali delle successive affermazioni è vera.*
  - *Se $\Lambda \in \{-1, 0, 1\}$ la soluzione è costante.*
  - *Se $\Lambda \in (0, 1)$ la soluzione è monotona e limitata.*
  - *Se $\Lambda > 1$ la soluzione esplode in tempo $T_1 > 0$ finito.*
  - *Se $\Lambda < -1$ la soluzione esplode in tempo $T_2 > 0$ finito.*
- *determinare la soluzione esplicita.*

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é un'equazione autonoma: $y' = f(y)$, se $f(c) = 0$ allora la funzione costante

$$y(t) \equiv c$$

é soluzione dell'equazione: pertanto la prima affermazione, *Se $\Lambda \in \{-1, 0, 1\}$ la soluzione è costante.* é vera.

Se $\Lambda \in (0, 1)$ la soluzione $y(t)$ non puó incontrare, per il teorema di unicitá né la soluzione $y(t) \equiv 0$ né la soluzione $y(t) \equiv 1$: quindi

$$0 < y(t) < 1$$

Tenuto inoltre conto che

$$y \in (0, 1) \quad \to \quad (y+1)y(y-1) < 0$$

risulta $y'(t) < 0 \quad \to \quad y(t) \searrow$, decrescente.

Se $\Lambda > 1$ la soluzione $y(t)$, per la stessa ragione precedente si mantiene $y(t) > 1$.
Ma allora

$$(y+1)y(y-1) > 0 \quad \to \quad y(t) \nearrow \quad \textit{crescente}$$

quindi

$$y(t) > \Lambda \quad \to \quad (y+1)y(y-1) > (\Lambda - 1)y^2$$

La soluzione $y(t)$ pertanto cresce piú rapidamente della soluzione $Y(t)$ del problema

$$\begin{cases} Y' = (\Lambda - 1)Y^2 \\ Y(0) = \Lambda \end{cases} \quad \to \quad Y(t) = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda(\Lambda - 1)t}$$

$$y(t) > Y(t) \quad \to \quad \sup_{t \in J} y(t) \geq \sup_{t \in J} Y(t)$$

da cui l'asserto, *la soluzione esplode in tempo $T_1 > 0$ finito*, tenuto presente che

$$\lim_{t \to 1/\Lambda(\Lambda-1)} Y(t) = \infty$$

Si osservi che l'espressione assegnata $f(y)$ é funzione dispari

$$f(-y) = -f(y)$$

ne segue che

$$y' = f(y) \quad \to \quad -y' = f(-y)$$

ovvero che se y é soluzione dell'equazione anche $-y$ lo é.

Il caso $\Lambda < -1$ é analogo a quello $\Lambda > 1$ tenuto conto che se $y(t)$ é soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = (y+1)y(y-1) \\ y(0) = \Lambda < -1 \end{cases}$$

allora $-y(t)$ é soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = (y+1)y(y-1) \\ y(0) = -\Lambda > 1 \end{cases}$$

e quindi ....esplode anch'essa in tempo $T_2 > 0$ finito.
Le soluzioni dell'equazione diverse dalle tre soluzioni d'equilibrio

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1$$

si cercano, come per tutte le equazioni autonome, nella forma

$$\int \frac{1}{(y+1)y(y-1)}, dy = \int dt$$

Osservato che

$$\frac{1}{(y+1)y(y-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{y-1}\right) - \frac{1}{y}$$

se ne trae

$$\log\left(\frac{\sqrt{|y+1||y-1|}}{|y|}\right) = t + c \quad \to \quad \frac{\sqrt{|y+1||y-1|}}{|y|} = K\,e^t$$

Ovvero

$$\frac{|y^2-1|}{y^2} = K^2\,e^{2t}$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} \Lambda^2 - 1 < 0 & \rightarrow \quad \dfrac{1-y^2}{y^2} = K^2\, e^{2t} \quad \rightarrow \quad y^2 = \dfrac{1}{1+K^2\, e^{2t}} \\[2ex] \Lambda^2 - 1 > 0 & \rightarrow \quad \dfrac{y^2-1}{y^2} = K^2\, e^{2t} \quad \rightarrow \quad y^2 = \dfrac{1}{1-K^2\, e^{2t}} \end{cases}$$

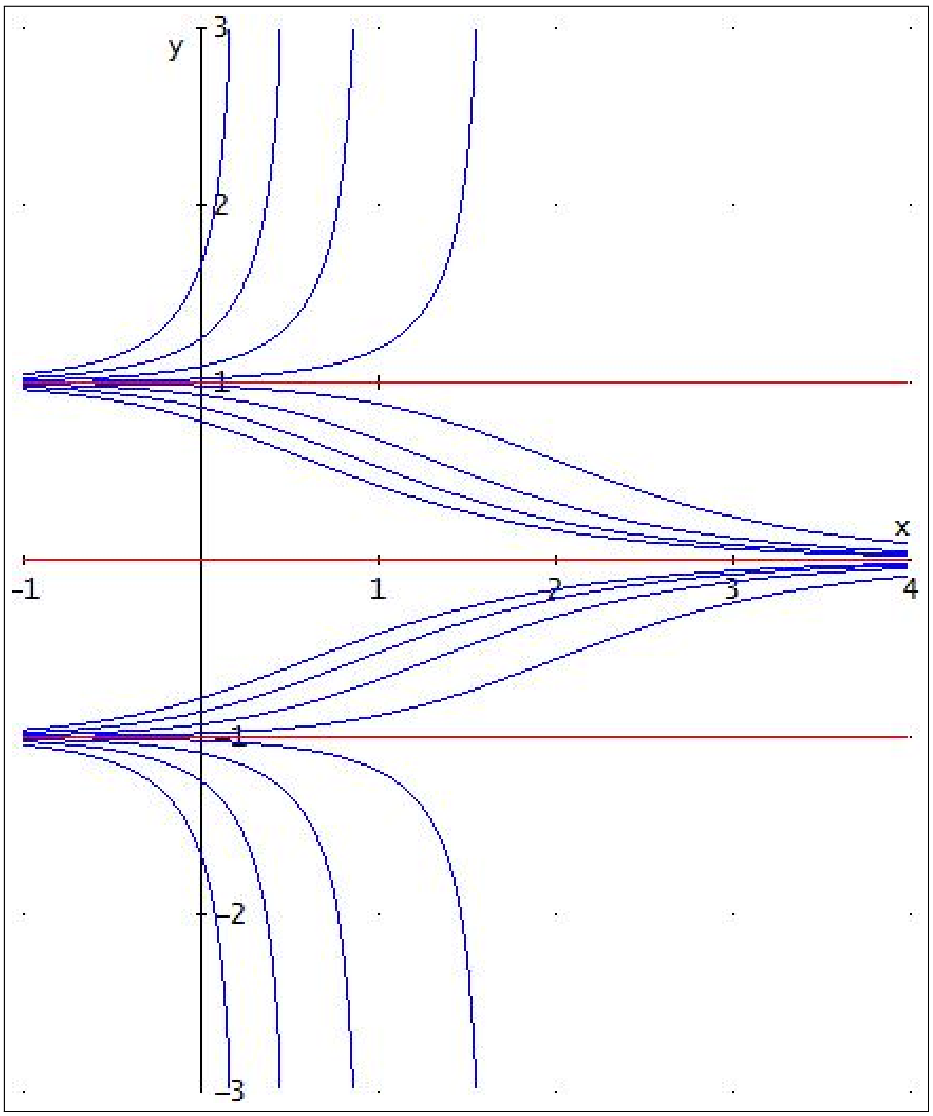

FIGURA 1. $y' = (y+1)y(y-1)$

Da cui, inoltre,

$$\begin{cases} \Lambda > 1 & y = \sqrt{\dfrac{1}{1 - K^2\, e^{2t}}} \\[2ex] \Lambda \in (0,1) & y = \sqrt{\dfrac{1}{1 + K^2\, e^{2t}}} \\[2ex] \Lambda \in (-1,0) & y = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + K^2\, e^{2t}}} \\[2ex] \Lambda < -1 & y = -\sqrt{\dfrac{1}{1 - K^2\, e^{2t}}} \end{cases}$$

1.2. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale autonoma*

$$y' = \frac{1}{1+y}$$

- *si determinino almeno tre sue soluzioni,*
- *si determini la soluzione del problema di Cauchy* $y(0) = 0$
- *si provi che le soluzioni* $y(t)$ *dell'equazione sono tutte funzioni monotone.*

Soluzione:

All'equazione assegnata possono abbinarsi problemi di Cauchy

$$y(t_0) = y_0$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \neq -1$.
In altri termini vale in teorema d'esistenza e unicitá per i problemi

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con y_0 in uno dei due semipiani $y_0 < -1, \quad y_0 > -1$.
L'equazione assegnata é di tipo autonomo $y' = f(y)$: la soluzione del problema $y(t_0) = y_0$ si cerca quindi nella forma

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} dt \quad \to \quad \int_{y_0}^{y} (1+y)\, dy = t - t_0$$

Da cui

$$y + \frac{1}{2} y^2 = t - t_0 + y_0 + \frac{1}{2} y_0^2 \quad \to \quad y^2 + 2y - (2t + c) = 0$$

Da cui segue, con la normale formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$y(t) = -1 \pm \sqrt{1 + 2t + c}$$

La determinazione del segno $\pm$ da scegliere e della costante c avviene al modo seguente:

$$\begin{array}{lll} y_0 < -1 & \rightarrow & y(t) = -1 - \sqrt{1+2t+c} \\ y_0 > -1 & \rightarrow & y(t) = -1 + \sqrt{1+2t+c} \\ y(t_0) = y_0 & \rightarrow & 1 + 2t_0 + c = |y_0 + 1|^2 \end{array}$$

La soluzione con $y(0) = 0$ corrisponde a $1 + c = 1$ quindi

$$y(t) = -1 + \sqrt{1 + 2t}$$

Le soluzioni $y(t)$ dell'equazione sono necessariamente monotone in quanto

$$y'(t) = \frac{1}{1 + y(t)}$$

e il secondo membro ha segno costante in ciascuno dei due semipiani $y < -1, \;\; y > -1$ in cui l'equazione é definita.
Le soluzioni pertanto di problemi di Cauchy con $y_0 < -1$ saranno a derivata negativa, quindi monotone decrescenti, le soluzioni con $y_0 > -1$ saranno a derivata positiva, quindi monotone crescenti.

1.3. Esercizio. *Dato il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0 \\ u(0) = a, \qquad u'(0) = 0 \end{cases},$$

si scriva l'espressione esplicita della soluzione al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ e si determini per quali valori di a la soluzione è monotona.

Soluzione:

L'equazione assegnata é lineare del 2^0 ordine, omogenea a coefficienti costanti: due soluzioni linearmente indipendenti si determinano a partire dall'equazione algebrica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$u(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2\,t} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 & = a \\ -c_1 + 2c_2 & = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{a}{3}\, \left(2e^{-t} + e^{2t}\right)$$

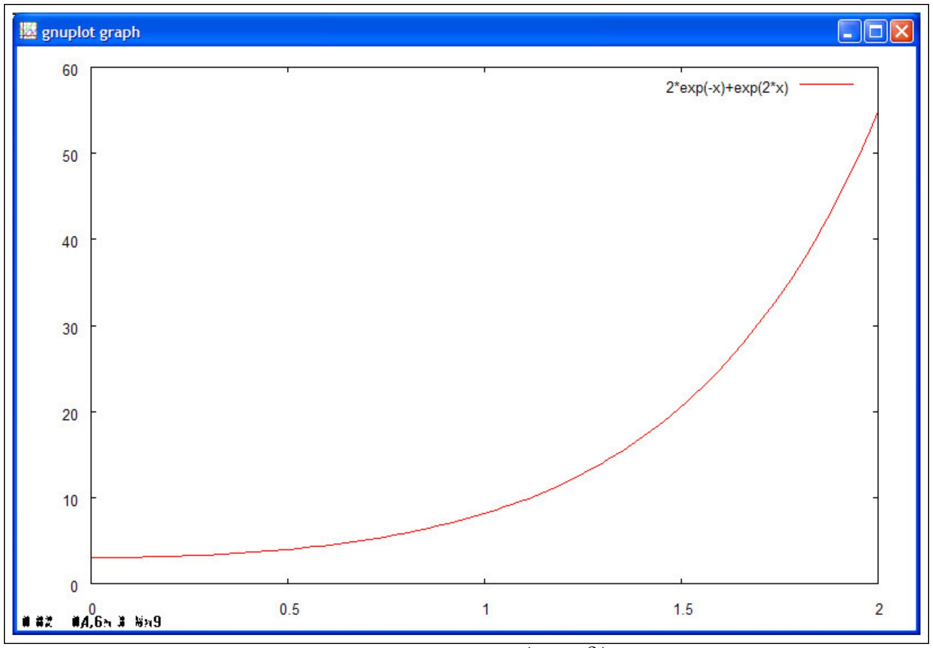

FIGURA 2. $u(t) = (2e^{-t} + e^{2t}) \qquad a = 3$

Le soluzioni $u(t)$ sono monotone crescenti se $a > 0,\ t \geq 0$, monotone decrescenti se $a > 0,\ t \leq 0$: viceversa se $a < 0$.
Per $a = 0$ la soluzione é, ovviamente, la costante nulla.
La soluzione $u \equiv 0$ é una soluzione d'equilibrio, non stabile: infatti basta partire da un dato iniziale $a \neq 0$ per allontanarsi definitivamente (e rapidamente) dall'equilibrio.

Osservazione 1.1. *Indicata con $u_a(t)$ la soluzione del problema di Cauchy assegnato*

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0 \\ u(0) = a, \qquad u'(0) = 0 \end{cases},$$

riesce evidentemente

$$u_a(t) = a\, u_1(t)$$

essendo $u_1(t)$ la soluzione del problema relativo ad $a = 1$.

1.4. Esercizio. *Data la seguente equazione differenziale*

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = \sin(t),$$

si discuta l'esistenza di soluzioni infinitesime per t che tende a $+\infty$.

SOLUZIONE:

Soluzioni dell'omogenea $u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = 0$,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} - 2\,i \\ \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} + 2\,i \end{cases}$$

$$v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$$

Soluzione dell'equazione completa:

$$y(t) = A\,\cos(t) + B\,\sin(t) \quad \to$$

$$(-A + 2B + 5A)\cos(t) + (-B - 2A + 5B)\sin(t) = \sin(t)$$

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 0 \\ -B - 2A + 5B = 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{10} \\ \\ B = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{10}\,\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$$

Le soluzioni dell'equazione non omogenea assegnata sono tutte espresse nella forma

$$Y(t) = e^{-t/2}\,\{c_1\,\cos(2t) + c_2\,\sin(2t)\} + \left\{-\frac{1}{10}\,\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)\right\}$$

La prima metá degli addendi che compongono $Y(t)$ é infinitesimi, l'altra metá sono periodici: quindi nessuna delle funzioni $Y(t)$ puó essere infinitesima !

1.5. Esercizio. *Si consideri l'equazione differenziale complessa*

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = e^{i\omega t}.$$

- *si calcoli l'integrale generale dell'equazione omogenea associata,*
- *si calcoli una soluzione particolare dell'equazione completa,*
- *si scriva la parte reale della soluzione particolare per $\omega = 1, 2$ e se ne calcoli il massimo.*

SOLUZIONE:

L'equazione omogenea é giá stata studiata nel precedente Esercizio: le sue soluzioni sono

$$v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$$

Le soluzioni dell'equazione completa sono, per ω qualsiasi

$$y(t) = \frac{1}{-\omega^2 + 2\,i\,\omega + 5}\, e^{i\,\omega\,t}$$

ovvero, evidenziando parte reale e parte immaginaria,

$$y(t) = \frac{5 - \omega^2 - 2\,i\,\omega}{(5-\omega^2)^2 + 4\,\omega^2}\, \{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\}$$

La parte reale é pertanto:

$$\frac{(5-\omega^2)\cos(\omega t) + 2\,\omega\,\sin(\omega t)}{(5-\omega^2)^2 + 4\,\omega^2}$$

$$\begin{cases} \omega = 1 & \to \quad \dfrac{4\cos(t) + 2\,\sin(t)}{20} \\ \\ \omega = 2 & \to \quad \dfrac{\cos(2t) + 4\,\sin(2t)}{17} \end{cases}$$

La ricerca del massimo

La funzione di cui cercare il massimo é

$$\varphi(t) = \frac{4\cos(t) + 2\,\sin(t)}{20}$$

nel punto t_{MAX} riesce:

$$\begin{cases} \varphi''(t_{MAX}) + 5\varphi(t_{MAX}) = \cos(t_{MAX}) \\ \varphi''(t_{MAX}) + \varphi(t_{MAX}) = 0 \end{cases}$$

avendo tenuto conto che

- $\varphi(t)$ soddisfa l'equazione differenziale e nei punti t_{MAX} riesce $\varphi'(t_{MAX}) = 0$
- $\varphi(t)$ soddisfa anche l'equazione $u'' + u = 0$

Riesce pertanto:

$$4\varphi(t_{MAX}) = \cos(t_{MAX}) \quad \to \quad \varphi(t_{MAX}) = \frac{1}{4}\cos(t_{MAX})$$

Il valore t_{MAX} si deduce da $\varphi'(t_{MAX}) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{4\cos(t_{MAX}) + 2\,\sin(t_{MAX})}{20} = \dfrac{1}{4}\cos(t_{MAX}) \\ \\ -4\sin(t_{MAX}) + 2\cos(t_{Max}) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} -\cos(t) + 2\sin(t) = 0 \\ -\cos(t) + 2\sin(t) = 0 \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{\sin(t_{MAX})}{\cos(t_{MAX})} = \frac{1}{2} \quad \to \quad t_{MAX} = 0.463648 \pm\, k\,\pi$$

Discorso analogo per $\omega = 2$

1.6. Esercizio. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = P(t)y(t) \\ y(0) = c \end{cases}$$

- *Trovare la soluzione in dipendenza del parametro c quando $P(t) = 1 + 3t^2$*
- *Trovare la soluzione quando $P(t) = t^2$ e $c = 0$.*
- *Infine considerare il caso P polinomio arbitrario e c costante arbitraria.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione assegnata é lineare del primo ordine, omogenea:

$$y' = P(t)y(t) \quad \to \quad y(t) = K\,e^{\displaystyle\int_0^t P(\tau)\,d\tau}$$

quindi,

- nel caso

$$P(t) = 1 + 3t^2 \quad \to \quad \int_0^t P(\tau)\,d\tau = t + t^3 \quad \to \quad y(t) = K\,e^{t+t^3}$$

  la condizione iniziale

$$y(0) = c \quad \to \quad K = c \quad \to \quad y(t) = c\,e^{t+t^3}$$

- nel caso $c = 0$ non importa neanche sapere quale sia $P(t)$: la soluzione é

$$y(t) \equiv 0$$

- se P é un polinomio qualsiasi riesce

$$y(t) = c\,e^{Q(t)}, \quad Q(t) = \int_0^t P(\tau)\,d\tau$$

1.7. Esercizio. *Scrivere la soluzione generale dell'equazione*

$$y'(x) + \frac{1}{x(1+x)} y(x) = 0. \tag{1}$$

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é lineare, omogenea, del primo ordine:

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \left(\log\left(\frac{|x|}{|1+x|}\right)\right)'$$

é definito in $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$: cioé é definito in tre intervalli diversi

$$I_1 := (-\infty, -1), \quad I_2 := (-1, 0), \quad I_3 := (0, +\infty)$$

É ragionevole attendersi una diversa espressione delle soluzioni in ciascuno dei tre intervalli.

$$y(x) = c\, e^{-\log\left(\frac{|x|}{|1+x|}\right)} = \begin{cases} c_1 \dfrac{1+x}{x} & x \in I_1 \\ c_2 \dfrac{1+x}{x} & x \in I_2 \\ c_3 \dfrac{1+x}{x} & x \in I_3 \end{cases}$$

I problemi di Cauchy proponibili per l'equazione assegnata sono i seguenti

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0 \\ y(x_1) = y_1 & x \in I_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0 \\ y(x_2) = y_2 & x \in I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0 \\ y(x_3) = y_3 & x \in I_3 \end{cases}$$

Le rispettive soluzioni $y_k(x)$, vedi Figura 3, saranno funzioni definite nei corrispondenti intervalli I_k.
É evidente che:

- $\forall k$
$$y_k' = -\frac{1}{x(1+x)} y_k(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \to \quad \lim_{x \to -1} y_k'(x) = -1$$
- qualunque siano $x_1 \in I_1$, y_1 riesce
$$\lim_{x \to -\infty} y_1(x) = \frac{x_1 y_1}{1+x_1}, \quad \lim_{x \to -1^-} y_1(x) = 0$$

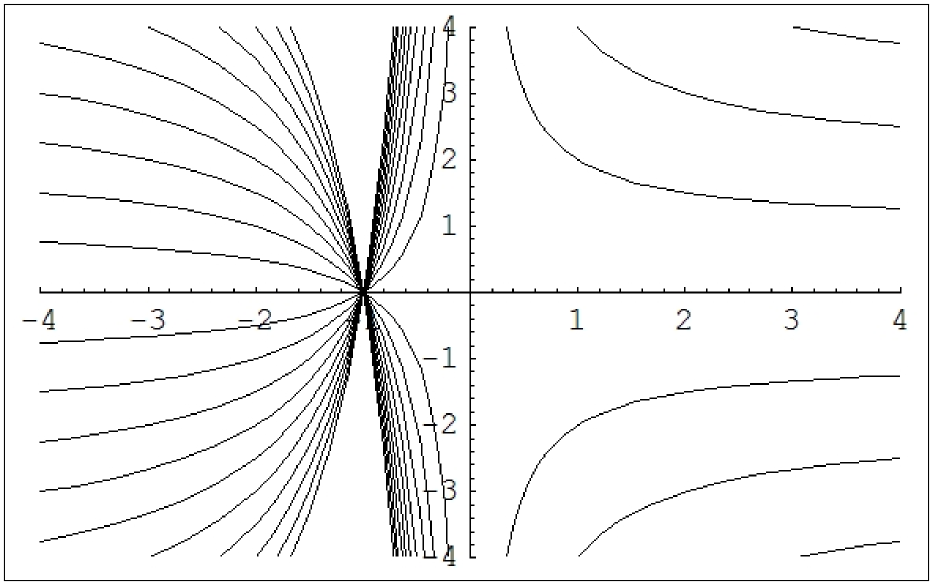

FIGURA 3. Le soluzioni di $y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0$

- qualunque siano $x_2 \in I_2,\ y_2$ riesce

$$\lim_{x\to -1^+} y_2(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} y_2(x) = \begin{cases} +\infty & se \quad y_2 > 0 \\ -\infty & se \quad y_2 < 0 \end{cases}$$

- qualunque siano $x_3 \in I_3,\ y_3$ riesce

$$\lim_{x\to 0^+} y_3(x) = \begin{cases} +\infty & se \quad y_3 > 0 \\ -\infty & se \quad y_3 < 0 \end{cases}, \qquad \lim_{x\to +\infty} y_3(x) = 0$$

In Figura 4 il campo vettoriale

$$T := \left\{ \frac{|x|\,|1+x|}{\sqrt{x^2\,(1+x)^2 + y^2}},\ -\frac{y\,|x|\,|1+x|}{x\ (1+x)\ \sqrt{x^2\,(1+x)^2 + y^2}} \right\}$$

delle tangenti alle soluzioni dell'equazione $y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0$

1.8. Esercizio. *Dati in $\mathbb{R}^3$ il dominio*

$$D = \left\{(x,y,z) : 0 \le x, y, z \le 1, \quad x^2 + y^2 \le 1\right\},$$

e il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (0,0,xyz)$

- *Si calcoli il flusso del campo attraverso la superficie ∂D.*
- *Si verifichi il teorema della divergenza in questo caso particolare.*

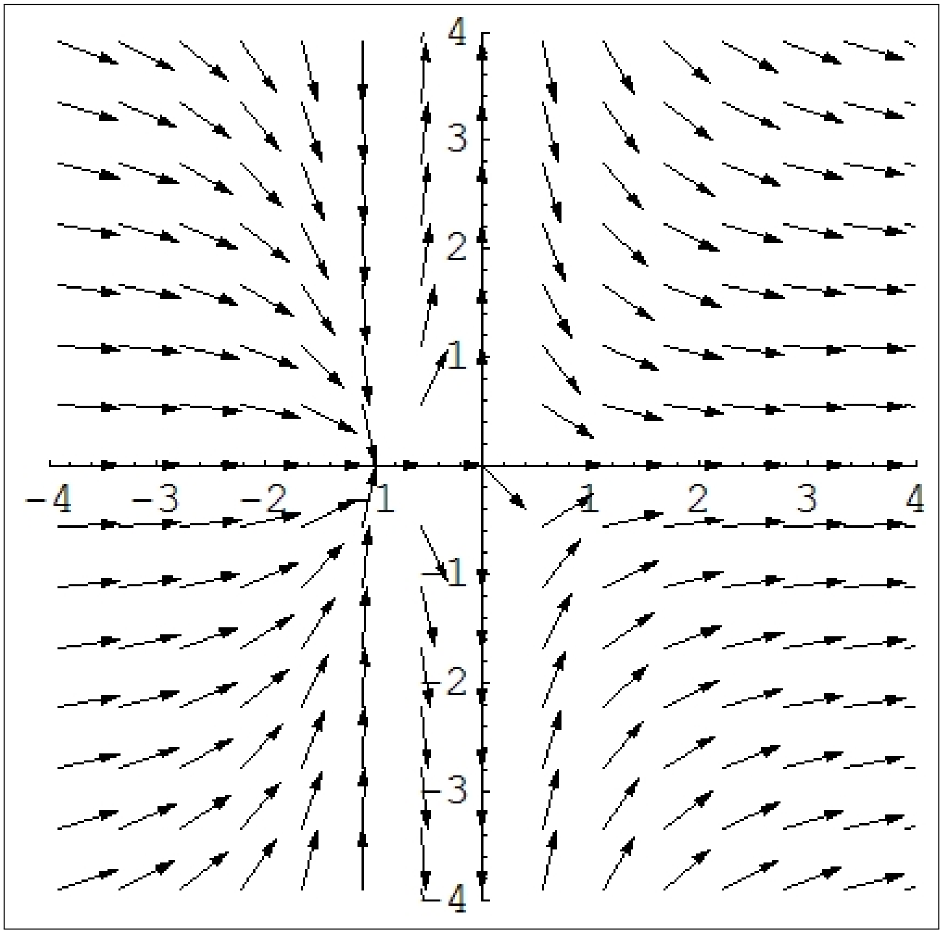

FIGURA 4. Il campo vettoriale delle tangenti

SOLUZIONE:

Il dominio D é il quarto del cilindro

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

contenuto nel primo ottante.
La ∂D é composta di 5 parti:

(1) una parte curva con normale $n = \{x, y, 0\}$
(2) una parte piana contenuta nel piano $y = 0$, con normale $n\{0, -1, 0\}$
(3) una parte piana contenuta nel piano $x = 0$, con normale $n\{-1, 0, 0\}$
(4) una parte, un quarto di cerchio, contenuto nel piano $z = 0$ con normale $n = \{0, 0, -1\}$

(5) una parte, un quarto di cerchio, contenuto nel piano $z = 1$ con normale $n = \{0, 0, 1\}$

Considerato che il campo $\overrightarrow{F}$ é parallelo all'asse z il prodotto scalare $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\nu} \neq 0$ solo sulle due basi, quarti di cerchio: su quella inferiore inoltre riesce $\overrightarrow{F} = 0$, quindi

$$\Phi(F) = \iint_B xy\, dx\, dy, \qquad B : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Phi(F) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\, \rho\, d\rho = \frac{1}{8}$$

Tenuto conto che

$$div(\overrightarrow{F}) = xy \qquad \int\iint_D div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 dz \iint_B xy\, dx\, dy = \iint_B xy\, dx\, dy = \frac{1}{8}$$

1.9. Esercizio. *Data la superficie cartesiana*

$$\Sigma : \quad z = xy, \qquad (x, y) \in B(O, 1) \subset \mathbb{R}^2,$$

si denoti con

$$X : \ \{u,\, v,\, uv\}, \quad (u, v) \in B(O, 1)$$

la sua rappresentazione parametrica.

- *si calcoli l'area di* Σ,
- *si calcoli la circuitazione del campo* $\overrightarrow{H} = (z^2, x^2, y^2)$ *lungo* $\Gamma \equiv X(\partial B)$, *percorsa nel verso antiorario,*
- *Si verifichi il teorema di Stokes in questo caso particolare, orientando il versore normale in* $(0, 0, 0)$ *in modo che risulti essere* $(1, 0, 0)$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$X(u, v) = \{u,\, v,\, uv\}, \quad u^2 + v^2 < 1$$

La superficie cartesiana $z = f(x, y)$, $f \in C^1$ é sempre regolare e orientabile.

$$Area(\Sigma) = \iint_B |X_u \wedge X_v|\, du\, dv = \iint_B \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du\, dv =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho\, d\rho = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$$

Tenuto presente che ∂B, la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 si rappresenta con

$$u(t) = \cos(t), \;\; v(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

si riconosce che

$$\Gamma := \; \{\cos(t), \sin(t), \; \cos(t)\, \sin(t)\}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ne segue quindi che, detto $\overrightarrow{\tau}$ il versore tangente

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{4\cos^4(t) + 2 - 2\cos^2(t)}} \{-\sin(t), \; \cos(t), \; \cos^2(t) - \sin^2(t)\}$$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{H} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} \left\{-\cos^3(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) + \sin^2(t)(\cos^2(t) - \sin^2(t))\right\} dt = -\frac{\pi}{2}$$

Verifica della formula di Stokes:

$$\text{rot}\,(\overrightarrow{H}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \\ z^2 & y^2 & x^2 \end{pmatrix} = \{2y, \; 2z, \; 2x\}$$

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \{y, x, -1\} \quad \to \quad \overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \{-y, \; -x, \; 1\}$$

$$\iint_\Sigma \text{rot}\,(\overrightarrow{H})\,.\,\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_B (-2y^2 - 2z + 2x) dx\, dy =$$

$$= \iint_B (-2y^2)\, dx\, dy = -\frac{\pi}{2}$$

1.10. Esercizio. *(La scala a chiocciola). Sia Σ la superficie definita dalle seguenti equazioni parametriche*

$$\varphi : Q \to \mathbb{R}^3, \quad Q = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\varphi(u, v) = \{(u + \delta)\cos(2\pi v), \;\; (u + \delta)\sin(2\pi v), \;\; v\}\,, \quad \delta > 0.$$

- *Calcolare la sua area.*
- *Calcolare la lunghezza della curva*

$$\varphi(u(t), v(t)), \quad (u(t), v(t)) = (t, t)$$

SOLUZIONE:

La superficie è non singolare

Significa riconoscere le proprietá di regolaritá della rappresentazione

(1) $\varphi(u,v) \in C^1(\mathring{Q}) \cap C^0(\overline{Q})$
(2) $\varphi(u,v)$ iniettiva $Q \quad \to \quad \mathbb{R}^3$: verificare cioé che

$$(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2) \quad \to \quad \varphi(u_1,v_1) \neq \varphi(u_2,v_2)$$

Tenuto conto che la distanza dei punti $\varphi(u,v)$ dall'asse z é $u+\delta$ ne segue che se fosse $\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2)$ si avrebbe

$$u_1 + \delta \quad = \quad u_2 + \delta$$

si riconosce quindi che se $u_1 \neq u_2$ allora sicuramente

$$\varphi(u_1,v_1) \neq \varphi(u_2,v_2)$$

Se del resto $u_1 = u_2$ allora certamente $v_1 \neq v_2$: i due punti $\varphi(u_1,v_1)$ e $\varphi(u_2,v_2)$ si trovano a due quote $z = v_1$ e $z = v_2$ diverse e quindi ancora

$$\varphi(u_1,v_1) \neq \varphi(u_2,v_2)$$

(3) $D\varphi$ di rango 2

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\varphi_1 & \frac{\partial}{\partial u}\varphi_2 & \frac{\partial}{\partial u}\varphi_3 \\ & & \\ \frac{\partial}{\partial v}\varphi_1 & \frac{\partial}{\partial v}\varphi_2 & \frac{\partial}{\partial v}\varphi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi v) & \sin(2\pi v) & 0 \\ -2\pi(u+\delta)\sin(2\pi v) & 2\pi(u+\delta)\cos(2\pi v) & 1 \end{pmatrix}$$

Dire che tale matrice ha rango 2 vuol dire che almeno uno dei tre minori di ordine 2 esistenti ha determinante $\neq 0$: tenuto conto che il minore formato con le prime due colonne ha determinante

$$2\pi(u+\delta) \geq 2\pi\delta > 0$$

la condizione rango$(D\varphi) = 2$ é verificata.

Area della superficie

Tenuto conto che

$$\begin{cases} X_u & = \{\cos(2\pi v) \quad \sin(2\pi v) \quad 0\} \\ X_v & = \{-2\pi(u+\delta)\sin(2\pi v) \quad 2\pi(u+\delta)\cos(2\pi v) \quad 1\} \\ X_u \wedge X_v & = \{\sin(2\pi v) \quad -\cos(2\pi v) \quad 2\pi(u+\delta)\} \end{cases}$$

si ha

$$Area \quad = \iint_Q |X_u \wedge X_v| \, du\, dv = \iint_Q \sqrt{1 + 4\pi^2(u+\delta)^2}\, du\, dv$$

$\boxed{\textbf{Lunghezza } \ell \textbf{ della curva}}$

$$\phi(t) = \varphi(t,t) = \{(t+\delta)\cos(2\pi t),\ \ (t+\delta)\sin(2\pi t),\ \ t\}$$

$$\phi'(t) = \{\cos(2\pi t) - 2\pi(t+\delta)\sin(2\pi t),\ \ \sin(2\pi t) + 2\pi(t+\delta)\cos(2\pi t),\ \ 1\}$$

$$|\phi'(t)| = \sqrt{2 + 4\pi^2(t+\delta)^2}$$

Ne deriva che

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{2 + 4\pi^2(t+\delta)^2}\, dt$$

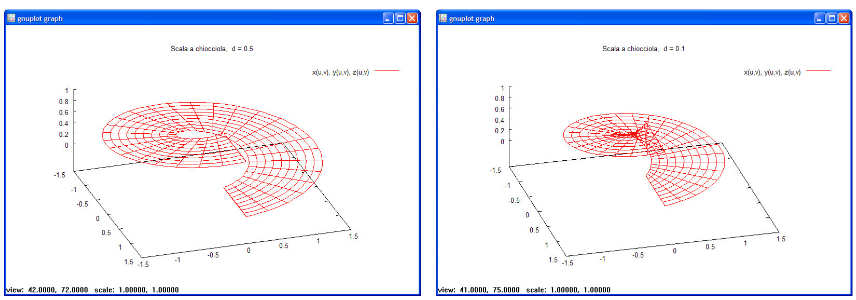

FIGURA 5. $d = 0.5, \quad d = 0.1$

1.11. Esercizio. *Sia γ il segmento di estremi*

$$P = (0,0,0), \quad Q = (1,0,0)$$

e Σ la semisfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- *determinare una rappresentazione parametrica regolare*
  - *$\phi(t)$ di γ*
  - *$X(u,v), \quad (u,v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, di Σ,*
- *scrivere le equazioni parametriche della curva $\Gamma = X(\gamma)$, immagine di γ su Σ, nella forma $\lambda(t) = X(\phi(t))$,*
- *calcolare un vettore tangente a Γ nelle due forme*

$$v = \lambda'(t), \qquad v = DX \,.\, \phi'(t)$$

- *calcolare la lunghezza di Γ.*

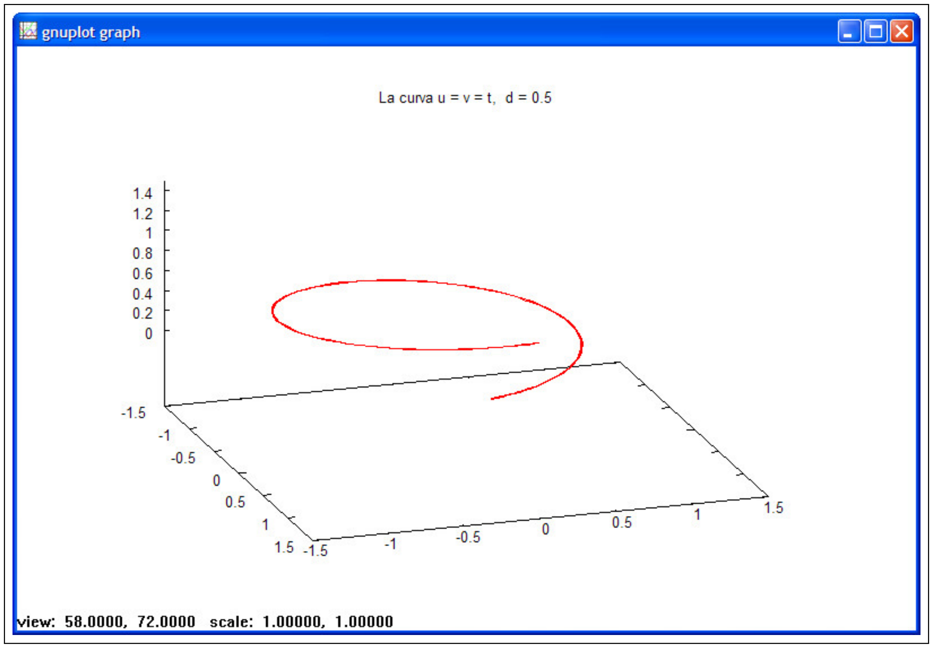

FIGURA 6. La curva $u = v = t$

SOLUZIONE:

Equazioni parametriche del segmento (curva contenuta nel piano (u, v):

$$\gamma : \quad \varphi(t) = \{t,\ 0\}, \quad t \in [0, 1]$$

Equazioni parametriche della semisfera (superficie di $\mathbb{R}^3$):

$$\Sigma : \quad X(u, v) = \{u,\ v,\ \sqrt{1 - u^2 - v^2}\}, \quad (u, v) \in D$$

Equazioni parametriche della curva (curva di $\mathbb{R}^3$):

$$\Gamma : \quad \lambda(t) = X(\varphi(t)) = \{t,\ 0,\ \sqrt{1 - t^2}\}, \quad t \in [0, 1]$$

Vettore tangente (prima forma):

$$\overrightarrow{\tau} = \left\{1,\ 0,\ -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\right\}$$

Vettore tangente (seconda forma):

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi'(t) = \{1, 0, -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\}$$

Eseguendo il prodotto, DX calcolata sui punti di γ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{1,\ 0,\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right\}$$

come nella prima forma.
Lunghezza di Γ

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

1.12. Esercizio. *Sia Σ la superficie data dalle seguenti equazioni parametriche*

$$\Psi : Q \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(u,v) = \left\{u, v, \log\left(\frac{\cos(v)}{\cos(u)}\right)\right\}.$$

dove $Q = [-\pi/4, \pi/4] \times [-\pi/4, \pi/4]$.

- *Trovare i punti in cui $\Psi_u \cdot \Psi_v = 0$.*
- *Trovare i punti in cui $|\Psi_u| = |\Psi_v|$.*
- *Calcolare $|\Psi_u \wedge \Psi_v|$.*
- *Calcolare l'area della superficie.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le equazioni parametriche assegnate equivalgono alla definizione implicita

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | e^z \cos(x) = \cos(y)$$

$$\Psi_u = \{1, 0, \tan(u)\}, \quad \Psi_v = \{0, 1, -\tan(v)\}$$

$$\Psi_u \,.\, \Psi_v = -\tan(u)\,\tan(v) = 0 \quad \to \quad \{u=0\} \vee \{v=0\}$$

$$|\Psi_u|^2 = 1+\tan^2(u), \quad |\Psi_v|^2 = 1+\tan^2(v)$$
$$|\Psi_u| = |\Psi_v| \quad \to \quad \tan^2(u) = \tan^2(v) \quad \to \quad u = \pm v$$

$$\Psi_u \wedge \Psi_v = \{\tan(u),\ \tan(v),\ 1\}$$

$$Area = \iint_Q \sqrt{1+\tan^2(u)+\tan^2(v)}\, du\, dv$$

1.13. Esercizio. *Sia γ la curva chiusa di equazioni parametriche*

$$t \to \phi(t) \equiv \left\{ \cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t), \quad \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) \right\} \quad t \in [-\pi,\ \pi]$$

- *si calcoli il vettore tangente quando $t \in (-\pi,\ \pi)$.*
- *si calcoli il vettore $\dot{\phi}(-\pi)$ e $\dot{\phi}(\pi)$.*
- *si dica se esiste il vettore tangente a γ nel punto*

$$P = \phi(-\pi) = \phi(\pi) = \left(\frac{-1}{2}, 0 \right)$$

SOLUZIONE:

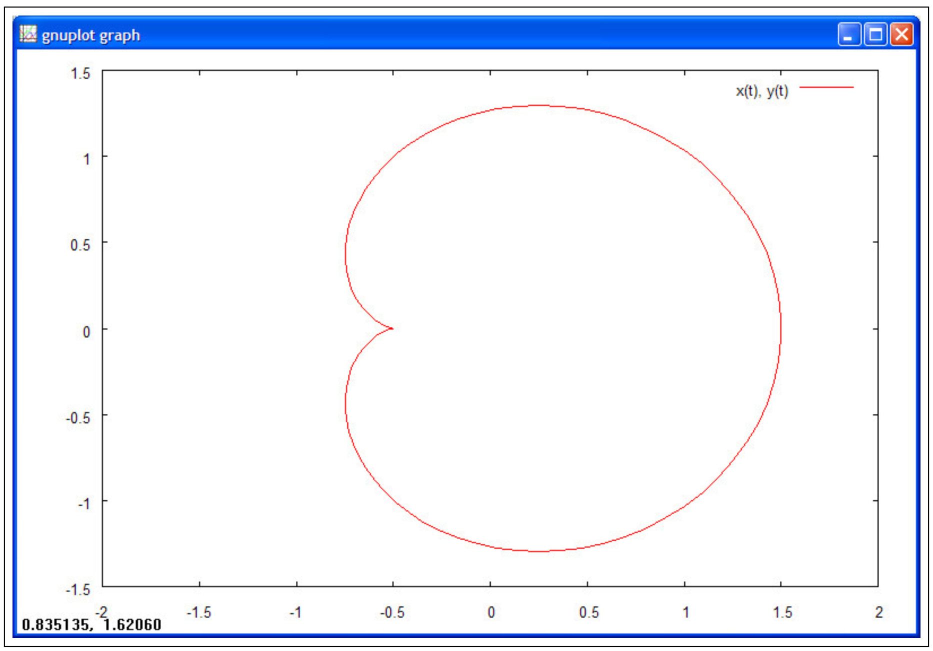

FIGURA 7. La curva γ

$$\phi'(t) = \{-\sin(t) - \sin(2t),\ \cos(t) + \cos(2t)\}$$

$$|\phi'(t)| = \sqrt{2(1 + \cos(t)}$$

$$\phi'(\pm\,\pi) = \{0,\ 0\}$$

Il versore tangente é

$$\overrightarrow{\nu}(t) = \left\{ \frac{-\sin(t) - \sin(2t)}{\sqrt{2(1+\cos(t)}},\ \frac{\cos(t) + \cos(2t)}{\sqrt{2(1+\cos(t)}} \right\}$$

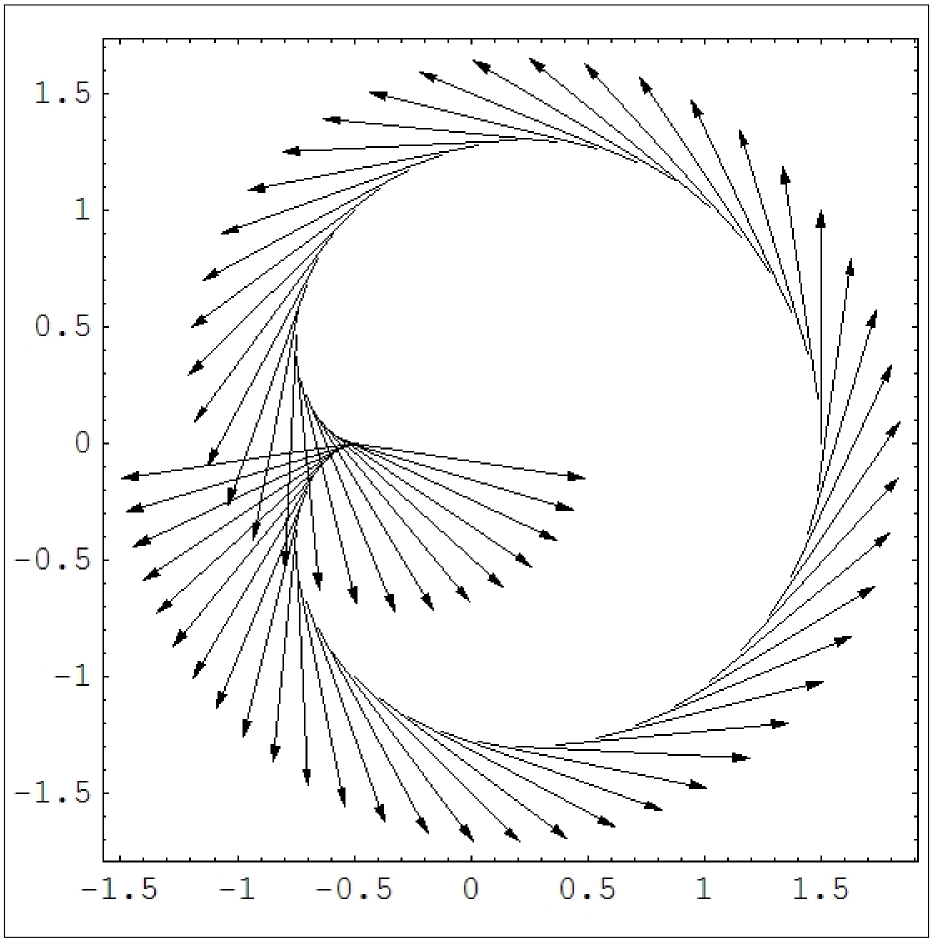

FIGURA 8. I versori tangenti a γ

$$\lim_{t\to\pi^-} \overrightarrow{\nu}(t) = \{1,\, 0\}, \quad \lim_{t\to-\pi^+} \overrightarrow{\nu}(t) = \{-1,\, 0\}$$

Nel punto $t = \pm\pi$ non c'é il versore tangente !

1.14. Esercizio. *Sia F il campo vettoriale costante $F = (2,3)$ definito in $\mathbb{R}^2$. Calcolare il flusso di tale campo vettoriale attraverso la curva γ le cui equazioni parametriche sono date dalla funzione ϕ*

$$\phi(t) = \{R\cos(t), R\sin(t)\} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e nel caso in cui γ sia un esagono regolare qualunque.

SOLUZIONE:

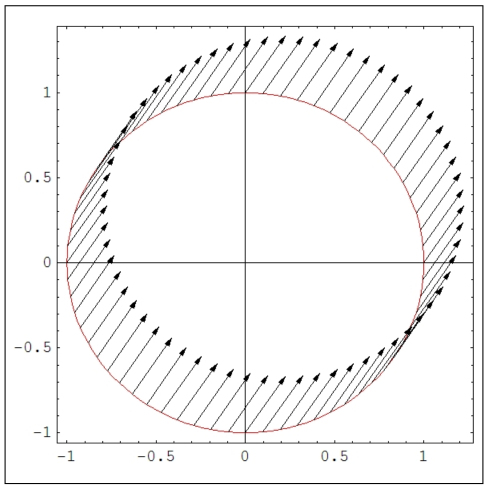

FIGURA 9. $F = (2,3)$ lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$

La Figura 9 lascia riconoscere facilmente che il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio R,

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds,$$

é nullo.
In termini di corrente di un fluido questo significa che

...tanto ne entra, quanto ne esce...

Analogo risultato si riconosce sostituendo alla circonferenza di centro l'origine un qualsiasi esagono regolare del piano.
Il risultato é in accordo col teorema della divergenza

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_{\mathbf{C}} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = 0$$

essendo

$$div(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) 2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) 3 = 0$$

1.15. Esercizio. *Sia γ la frontiera del rettangolo $Q = (0,2) \times (4,8)$. Dire in quali punti è definita la normale esterne e calcolarla. Calcolare poi il flusso del campo $\overrightarrow{F}(x,y) = \{x,\ y^2 + x\}$ attraverso γ.*

SOLUZIONE:

La frontiera γ del rettangolo Q é costituita da quattro segmenti, i quattro lati

- $\ell_1 :\ x = 2,\ 4 < y < 8,\ \overrightarrow{\nu} = \{1, 0\}$
- $\ell_2 :\ 0 < x < 2,\ y = 8,\ \overrightarrow{\nu} = \{0, 1\}$
- $\ell_3 :\ x = 0,\ 4 < y < 8,\ \overrightarrow{\nu} = \{-1, 0\}$
- $\ell_2 :\ 0 < x < 2,\ y = 4,\ \overrightarrow{\nu} = \{0, -1\}$

Non é definita la normale nei 4 vertici, punti angolosi.

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds =$$

$$\int_{\ell_1} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds + \int_{\ell_2} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds + \int_{\ell_3} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds + \int_{\ell_4} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds =$$

$$\int_4^8 2dt + \int_0^2 (t + 8^2)dt - \int_4^8 0\, dt - \int_0^2 (t + 4^2)\, dt = 104$$

Del resto servendosi del Teorema della Divergenza si ha

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = \iint_Q div(F)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_4^8 (x + 2y) dy = 104$$

1.16. Esercizio. *Sia*

$$F(x,y) = r^{\alpha - 1}\{x, y\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

un campo centrale[1] *definito in $\mathbb{R}^2$ eventualmente privato dell'origine.*

- *Calcolare il flusso attraverso una circonferenza di raggio R centrata nell'origine usando la definizione di flusso (integrale curvilineo).*
- *Dire per quali α il flusso è indipendente da R.*
- *Calcolare inoltre $\iint_{B(0,R)} \mathrm{div}(\overrightarrow{F}) dxdy$.*
- *Dire per quali α è finito, per quali è infinito (come integrale improprio) e per quali è indipendente da R.*
- *Concludere dicendo per quali α vale il teorema della divergenza, e spiegare perchè non vale quando questo è il caso.*

[1]Un campo di vettori tutti paralleli a $\{x, y\}$, $\overrightarrow{OP}$

Soluzione:

(1) Si noti che sulle circonferenze $\mathcal{C}_R$ di centro l'origine e raggio R riesce
$$\overrightarrow{F} = R^\alpha \overrightarrow{\nu}$$
essendo $\overrightarrow{\nu}$ il versore esterno.
$$\Phi = \int_{\mathcal{C}_R} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \int_{\mathcal{C}_R} R^\alpha\, ds = 2\pi\, R^{\alpha+1}$$

(2) L'indipendenza si ha solo se $\alpha + 1 = 0 \quad \to \quad \alpha = -1$: diminuzione del modulo del campo e allungamento di $\mathcal{C}_R$ al crescere di R si compensano...!

(3) Indicate con $\mathcal{B}_{r,R}$ le regioni $0 < r^2 < x^2 + y^2 < R^2$, in esse il campo F é di classe C^1 e quindi si puó applicare il Teorema della Divergenza e ottenere quindi che:
$$\iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}_R} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds - \int_{\mathcal{C}_r} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds$$
e quindi
$$\iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dxdy = 2\pi \left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right)$$
Si ha quindi, se e solo se $\alpha > -1$,
$$\lim_{r\to 0} \iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dxdy = \lim_{r\to 0} 2\pi \left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right) = 2\pi\, R^{\alpha+1}$$

(4) Per $\alpha = -1$ il valore, lo zero, é indipendente da r, R, mentre per $\alpha < -1$ l'integrale improprio di $\operatorname{div}(\overrightarrow{F})$ in $B(0, R)$ é divergente.

(5) Se $\alpha < 1$ il teorema della divergenza non puó essere applicato in $B(0, R)$ perché il campo non é di classe C^1 (per via della singolaritá nell'origine) condizione sufficiente per il teorema.

Tuttavia l'uguaglianza
$$\lim_{r\to 0} \iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dxdy = \int_{\partial B(0,R)} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds$$
nella quale il primo membro corrisponde all'integrale improprio di $\operatorname{div}(\overrightarrow{F})$ su $B(0, R)$ si mantiene per $\alpha > -1$

Si noti che
$$div(F) = 2\alpha(x^2 + y^2)^{\alpha-1} = 2\alpha\, r^{2\alpha-2}$$
é dotata di integrale improprio convergente in $B(0, R)$ solo se $2\alpha - 2 > -2 \quad \to \quad \alpha > 0$

1.17. Esercizio. *Siano u e v due funzioni di classe $C^2(\Omega)$ e continue su $\overline{\Omega}$.*
Mostrare che se v è armonica in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$, allora

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy = 0$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Applichiamo il teorema della divergenza al campo

$$\overrightarrow{F} = u\ \nabla\, v \quad \rightarrow \quad \iint_\Omega div(u\ \nabla\, v)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} u\ \nabla\, v\, .\, \overrightarrow{\nu}\, ds = 0$$

avendo usato l'ipotesi

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Riesce del resto

$$div(u\ \nabla\, v) = \nabla u\, .\, \nabla\, v + u \triangle v = \nabla u\, .\, \nabla\, v$$

avendo tenuto conto che

$$\triangle v = 0$$

Si ottiene quindi la tesi

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy = 0$$

1.18. Esercizio. *Consideriamo una corona circolare di raggi interno r ed esterno R con $0 < r < R$ e centrata in $P_0 = (x_0, y_0)$.*
Calcolare il flusso del campo

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\{x, y\}$$

attraverso la frontiera della corona al variare del punto P_0.
Discutere tre casi, a seconda che l'origine $O = (0, 0)$

- **a):** *sia esterna alla circonferenza di raggio maggiore R.*
- **b):** *interna a quella di raggio minore r*
- **c):** *interna alla corona di raggi r ed R.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Tenuto conto che il campo assegnato

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\{x, y\}$$

presenta una singolaritá nell'origine dovremo limitarci a considerare corone che non includano l'origine né all'interno né sulla frontiera.

a): sia esterna alla circonferenza di raggio maggiore R:
é lecito servirsi del teorema della divergenza per calcolare il flusso

$$\int_{\partial B} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = \iint_B div(\overrightarrow{F})\, dxdy$$

Tenuto conto che

$$div(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

si riconosce che il flusso traverso tale corona é nullo.

b): interna a quella di raggio minore r
Ancora si applica il teorema della divergenza e si riconosce che il flusso é nullo.

c): interna alla corona di raggi r ed R.
La singolaritá del campo F, l'origine, cade all'interno della corona: il teorema della divergenza non é piú lecito....

Consideriamo l'aperto Ω_ρ ottenuto privando la corona B di un cerchietto C_ρ di raggio ρ e centro l'origine, tutto interno a B: su Ω_ρ si puó applicare il Teorema della Divergenza e quindi dedurre che

$$\int_{\partial \Omega_\rho} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = 0$$

ovvero che

$$\int_{\partial B} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = \int_{\partial \mathcal{C}_\rho} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds$$

Tenuto conto che, per calcolo diretto,

$$\int_{\partial \mathcal{C}_\rho} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = 2\pi$$

si deduce che

$$\int_{\partial B} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = 2\pi$$

Osservazione 1.2. *Il campo F assegnato é un campo radiale centrale: con la abituale notazione $r = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha infatti*

$$F = \psi(r)\,\{\cos(\theta), \sin(\theta)\}, \quad \psi(r) = \frac{1}{r}$$

La sua divergenza é

$$div(F) = \psi'(r) + \frac{\psi(r)}{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\int_{\partial \mathcal{C}_\rho} \overrightarrow{F}(x,y)\,.\,\overrightarrow{\nu}(x,y)\,ds = \int_0^{2\pi} \psi(r)\,r\,d\theta = 2\pi$$

Indice analitico