Soluzione esonero 1

10 dicembre 2010

1.1. Esercizio. *Determinare la distanza del punto* $(0, 1)$ *dall'iperbole di equazione* $x^2 - y^2 = 1$.

SOLUZIONE:

La distanza del punto $P = (0, 1)$ dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ é, per definizione il minimo della funzione

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

relativamente al vincolo

$$E: \; x^2 - y^2 - 1 = 0$$

L'insieme E é chiuso ma non limitato: tenuto conto che

- la funzione $d(x, y)$ é non negativa,
- e che $d(x, y)$ diverge positivamente allontanandosi dall'origine,

si riconosce che la $d(x, y)$ ammette minimo su E.
Il punto in cui $d(x, y)$ assume il valore minimo é lo stesso in cui assume il valore minimo $x^2 + (y - 1)^2$.

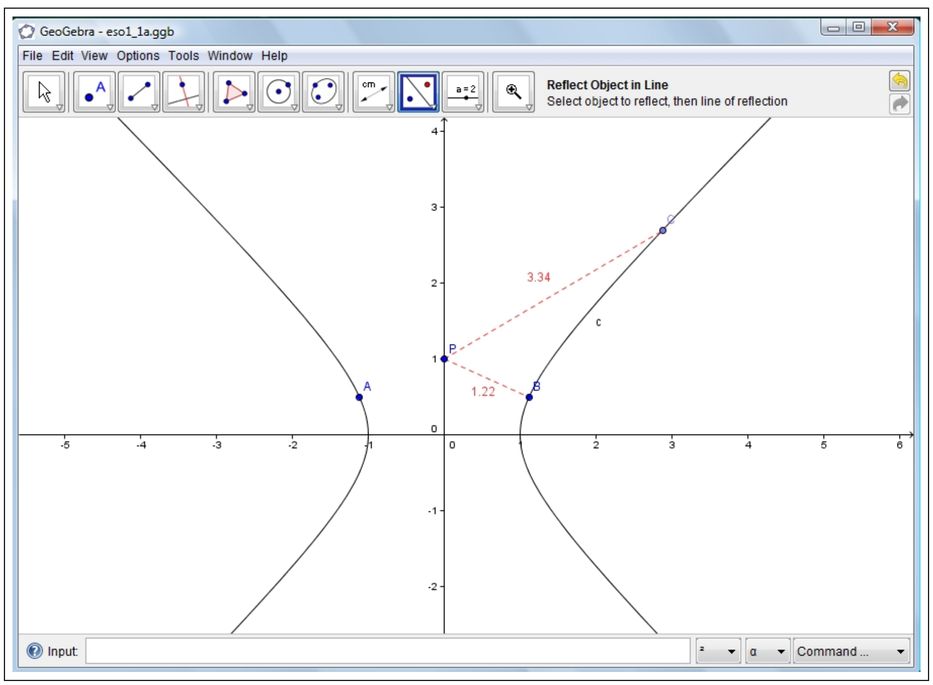

FIGURA 1. La distanza di $P = (0, 1)$ dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$

Consideriamo quindi la Lagrangiana relativa a quest'ultima:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2(y-1) - 2\lambda y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} \lambda = -1, \\ \\ y = \dfrac{1}{2} \\ \\ x = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

La funzione $x^2 + (y-1)^2$ raggiunge il suo minimo nei due punti

$$A = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad B = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

In tali punti raggiunge il minimo anche la $d(x, y)$: pertanto

$$d(A) = d(B) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1,224$$

é la distanza di $P = (0, 1)$ dall'iperbole assegnata.

1.2. Esercizio. *Dato l'insieme E delimitato da*

$$(2x + 3y)^2 + (x - 4y)^2 = 25,$$

calcolare, servendosi di un opportuno cambiamento di coordinate affini, l'integrale doppio

$$\iint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Indicate con

$$\begin{cases} u = 2x + 3y \\ v = x - 4y \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} x = \dfrac{4u + 3v}{11} \\ \\ y = \dfrac{u - 2v}{11} \end{cases}$$

si ha

$$|J(u, v)| = \frac{1}{11}$$

Tenuto conto che

$$(x, y) \in E \quad \Leftrightarrow \quad (u, v) \in C: \; u^2 + v^2 \leq 25$$

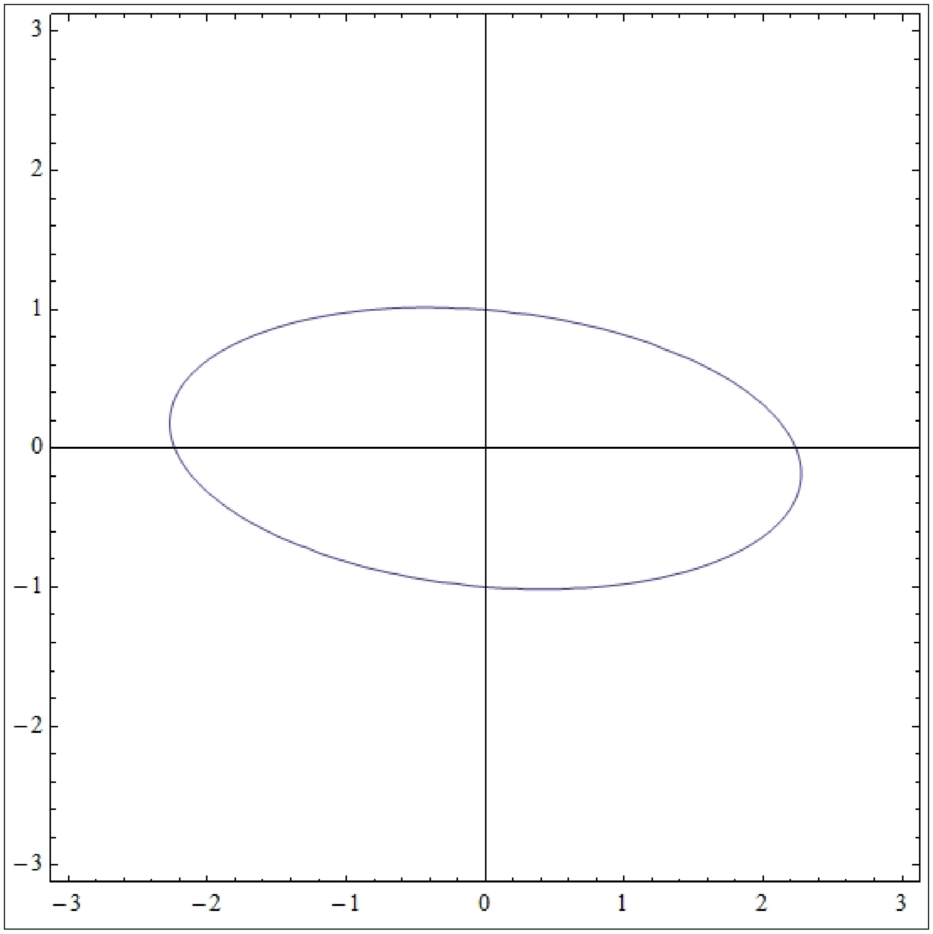

FIGURA 2. $(2x+3y)^2+(x-4y)^2=25$

si ha pertanto

$$\iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_C \left\{ \left(\frac{4u+3v}{11}\right)^2 + \left(\frac{u-2v}{11}\right)^2 \right\} \frac{1}{11}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{11^3} \iint_C (17u^2+13v^2+20uv)\,du\,dv$$

Servendosi delle coordinate polari si perviene quindi all'integrale

$$\frac{1}{11^3}\int_0^{2\pi} (17\cos^2(\vartheta)+13\sin^2(\vartheta)+20\cos(\vartheta)\sin(\vartheta))d\vartheta \int_0^5 \rho^3\,d\rho = \frac{5^4}{11^3\,4}\,30\,\pi$$

Il valore ottenuto é approssimativamente 11.064.

Osservazione 1.1. *Tenuto conto che*

$$(2x+3y)^2 + (x-4y)^2 = 5x^2 + 25y^2 + 4xy$$

e tenuto conto che

$$|4xy| \le 2(x^2+y^2)$$

si ha che

$$3x^2 + 23y^2 \le 5x^2 + 25y^2 + 4xy \le 7x^2 + 27y^2$$

Ovvero indicate con

$$A: 7x^2 + 27y^2 \le 25, \qquad B: 3x^2 + 23y^2 \le 25$$

le due regioni delimitate dalle ellissi canoniche (rossa e verde) riesce, vedi Figura 3,

$$A \subset E \subset B$$

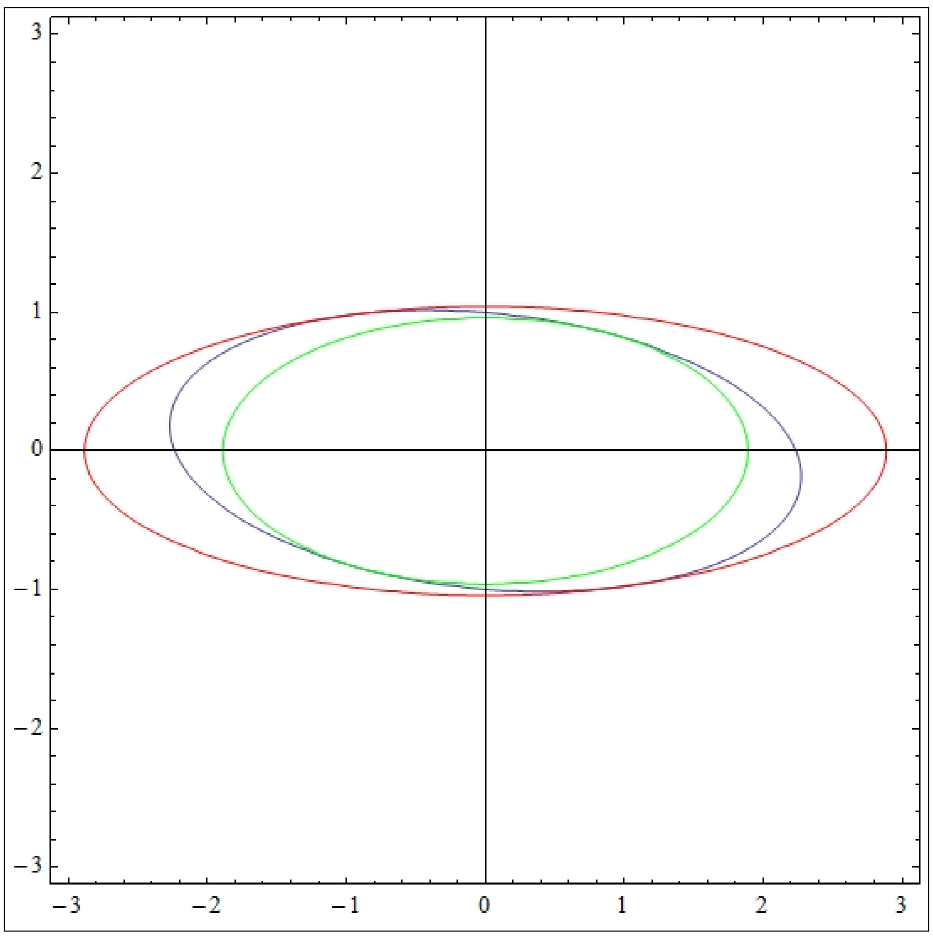

FIGURA 3. $A \subset E \subset B$

Riesce pertanto anche

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy \le \iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy \le \iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

1.3. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$$

- *calcolare, senza giustificare i passaggi, l'espressione della derivata* $F'(x)$*;*
- *giustificare l'espressione trovata;*
- *dimostrare che vale la relazione*

$$F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$$

  e riconoscere che

$$F(x) = F(0)\,e^{-x^2/4}.$$

Soluzione:

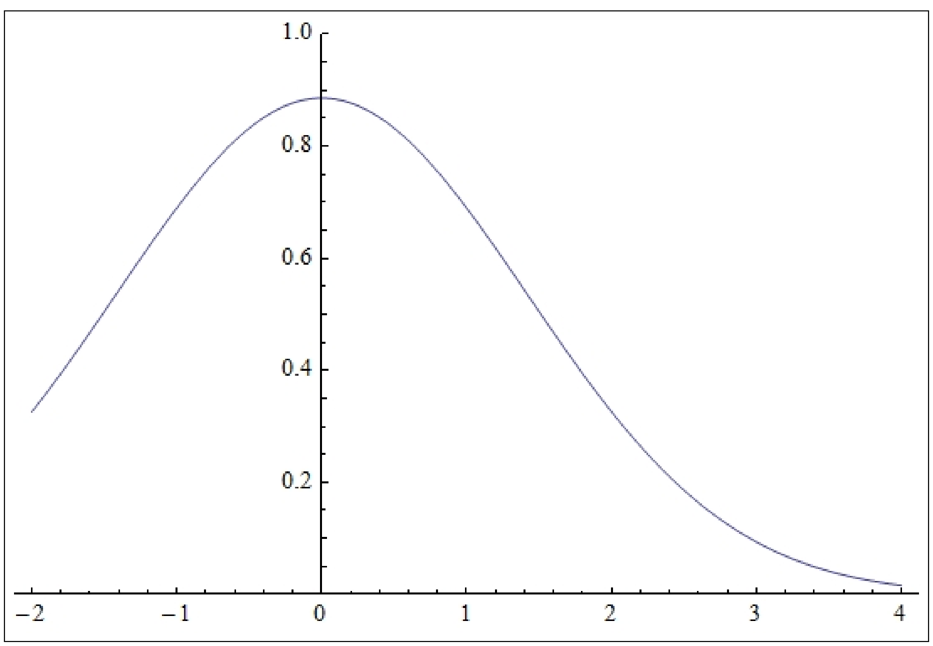

Figura 4. $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$

Derivando sotto il segno di integrale si ottiene

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-t^2} \sin(xt)\, t\, dt$$

espressione che si giustifica osservando che sia la funzione integranda $e^{-t^2} \cos(xt)$ che la derivata rispetto ad x $e^{-t^2} \sin(xt)\, t$ sono dominate

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0, +\infty) : \begin{cases} \left| e^{-t^2} \cos(xt) \right| \le e^{-t^2} \\ \\ \left| e^{-t^2} \sin(xt)\, t \right| \le e^{-t^2}\, t \end{cases}$$

da funzioni di t dotate di integrale improprio assolutamente convergente in $[0, +\infty)$.

Integrando per parti nell'espressione trovata per $F'(x)$ si ha del resto

$$F'(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty -2t\, e^{-t^2} \sin(xt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt)\, x\, dt$$

da cui

$$F'(x) = -\frac{x}{2}\, F(x)$$

La relazione osservata, un'equazione differenziale lineare del primo ordine in $F(x)$, equivale[1] a

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{x}{2} \quad \to \quad (\ln(F(x)))' = -\frac{x}{2} \quad \to \quad \ln(F(x)) = -\frac{x^2}{4} + c$$

da cui

$$F(x) = e^c\, e^{-x^2/4} \quad \to \quad F(x) = F(0)\, e^{-x^2/4}$$

1.4. Esercizio.

- *Calcolare al variare di $\alpha > 0$ l'integrale improprio*

$$\iint_E \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^\alpha}\, dx\, dy$$

  essendo $E : \ \{x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < R^2\}$;
- *calcolare al variare di β l'integrale improprio*

$$\iint_F \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^\beta}\, dx\, dy$$

  essendo $F : \ \{x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > R^2\}$.

---

[1] supponendo di aver giá dimostrato che o $F(x)$ é identicamente nulla oppure non si annulla mai

SOLUZIONE:

Gli insiemi E ed F assegnati suggeriscono l'uso delle coordinate polari

$$\iint_E \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} (\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta))\,d\vartheta \int_0^R \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}}\,d\rho =$$

$$= 2\int_0^R \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}}\,d\rho = \frac{2}{3-2\alpha}\,\rho^{3-2\alpha}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \begin{cases} \dfrac{2R^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} & se \quad \alpha < 3/2 \\ +\infty & se \quad \alpha \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\iint_F \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\beta}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} (\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta))\,d\vartheta \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\beta-2}}\,d\rho =$$

$$= 2\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\beta-2}}\,d\rho = \frac{2}{3-2\beta}\,\rho^{3-2\beta}\Big|_{\rho=R}^{\rho=+\infty} = \begin{cases} \dfrac{-2R^{3-2\beta}}{3-2\beta} & se \quad \beta > 3/2 \\ +\infty & se \quad \beta \leq 3/2 \end{cases}$$

1.5. Esercizio. *Assegnata la funzione* $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2$

- *provare che la linea di livello* $F(x,y) = 0$ *coincide in un intorno del punto* $P_0 = (1,0)$ *con il grafico di una funzione* $x = g(y)$
- *determinare l'equazione della retta tangente alla linea di livello* $F(x,y) = 0$ *nel punto* $P_0 = (1,0)$
- *esaminare se la linea di livello* $F(x,y) = 0$ *coincide o meno in un intorno dell'origine con il grafico di una funzione* $y = p(x)$ *o* $x = q(y)$.

SOLUZIONE:

Per la prima domanda, il teorema di Dini richiede che

$$F(1,0) = 0, \quad F_x(1,0) \neq 0,$$

condizioni che, effettivamente, si verificano.
La retta tangente ha equazione

$$F_x(1,0)(x-1) + F_y(1,0)(y-0) = 0 \quad \to \quad 2(x-1) = 0 \quad \to \quad x = 1$$

Nel punto $(0,0)$ non sono soddisfatte le condizioni del teorema di Dini, infatti si ha

$$F(0,0) = 0, \quad F_x(0,0) = 0, \quad F_y(0,0) = 0$$

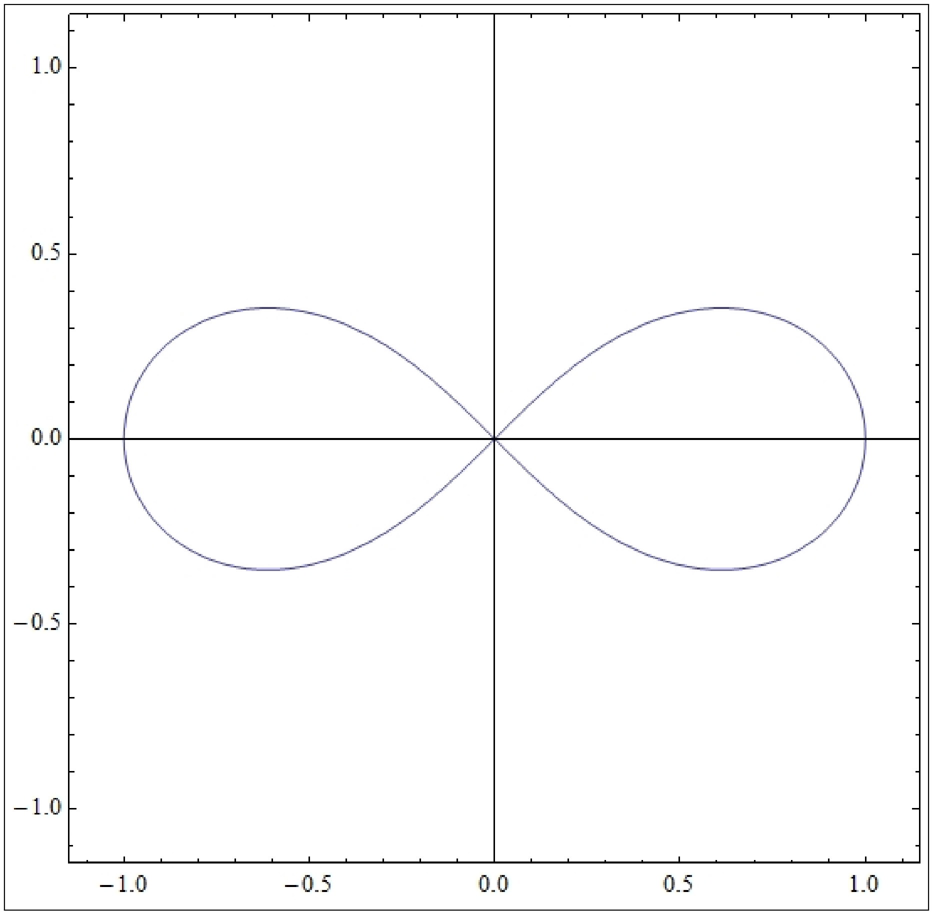

FIGURA 5. $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$

Tuttavia, tenuto conto che le condizioni di Dini sono sufficienti ma non necessarie potrebbe ancora essere possibile che E_0 coincidesse localmente con un grafico cartesiano rispetto ad una variabile o all'altra.
Invece si puó riconoscere che in nessun intorno del punto $(0,0)$ la linea di livello E_0 coincide con il grafico di $y = p(x)$ o $x = q(y)$ perché essa ammette il punto $(0,0)$ come centro di simmetria:

> *se* $(x_0, y_0) \in E_0$ *allora, di conseguenza anche i tre punti simmetrici* $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$ *appartengono a* E_0.

Quindi E_0 non puó coincidere, neanche localmente, né con un grafico $y = p(x)$ né con un grafico $x = q(y)$, situazioni che implicano, la prima, che per un fissato x_0 ci sia un solo y_0 ovvero, la seconda, che per un fissato y_0 ci sia un solo x_0.