ANALISI VETTORIALE

Soluzione esonero 2

11022011

2.1. Esercizio. *Assegnato il campo*

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = \left\{x(y^2+z^2),\ y(x^2+z^2),\ z(x^2+y^2)\right\}$$

- *calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{E}$ *lungo il segmento da* $A = (-1,-1,-1)$ *a* $B = (1,1,1)$,
- *calcolare rot*$(\overrightarrow{E})$,
- *determinare un potenziale* $U(x,y,z)$ *per* $\overrightarrow{E}$.

SOLUZIONE:

Il segmento AB ha equazioni parametriche

$$x = -1+2t,\ y = -1+2t,\ z = -1+2t, \quad t \in [0,1], \quad \overrightarrow{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\{2,2,2\}$$

Riesce pertanto

$$\int_{AB} E\,.\,\tau\, ds = \int_0^1 12\, \left\{(-1+2t)^3\right\} dt = 0$$

$$\text{rot}\,(\overrightarrow{E}) = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x(y^2+z^2) & y(x^2+z^2) & z(x^2+y^2) \end{array}\right| = \{0,0,0\}$$

Essendo E definito in tutto $\mathbb{R}^3$ e avendo in tutto $\mathbb{R}^3$ rotore nullo esso é certamente conservativo, cioé ammette potenziale, cioé esiste $U(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = \nabla\, U(x,y,z).$$

La costruzione della $U(x,y,z)$ puó essere realizzata in modi diversi: ad esempio calcolando il lavoro di E dall'origine al punto (x,y,z) seguendo una poligonale coordinata

$$(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$$

Riesce pertanto

$$U(x,y,z) = \int_0^x t(0^2+0^2)dt + \int_0^y t(x^2+0^2)dt + \int_0^z t(x^2+y^2)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + z^2x^2 + z^2y^2\right)$$

Tutti i potenziali sono naturalmente espressi da

$$\frac{1}{2}\left(x^2y^2 + z^2x^2 + z^2y^2\right) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Si noti come il precedente lavoro di E fra A e B coincida con il valore $U(1,1,1) - U(-1,-1,-1)$.

2.2. Esercizio. *Assegnato il campo* $\overrightarrow{E} = \{x^2y,\, -xy^2\}$ *e detti* Ω *il cerchio* $x^2 + y^2 \leq 1$, $\overrightarrow{\nu}$ *il versore normale esterno e* $\overrightarrow{\tau}$ *il versore tangente a* $\partial\Omega$ *orientato in senso antiorario*

- *calcolare la circuitazione* $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$,
- *calcolare il flusso* $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds$.

Soluzione:

Normale e tangente in ogni punto (x, y) della circonferenza $\partial\Omega$ di centro l'origine e raggio 1 sono

$$\overrightarrow{\nu} = \{x,\, y\}, \quad \overrightarrow{\tau} = \{-y,\, x\}$$

Riesce pertanto, tenuto conto della usuale parametrizzazione di tale circonferenza si ha

- circuitazione:

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = -\int_{\partial\Omega} \left\{x^2y^2 + x^2y^2\right\}\, ds =$$

$$= -\int_0^{2\pi} 2\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta) d\vartheta = -\frac{\pi}{2}$$

- flusso:

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \int_{\partial\Omega} \left(x^3y,\, -xy^3\right)\, ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{\cos^3(\vartheta)\sin(\vartheta) - \cos(\vartheta)\sin^3(\vartheta)\right\} d\vartheta = 0$$

I valori ottenuti possono essere confermati, il primo servendosi della formula di Stokes, il secondo servendosi del teorema della divergenza: si ha infatti

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_\Omega \text{rot}_z(E)dxdy = -\iint_\Omega (x^2+y^2)dxdy = -2\pi\int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{\pi}{2} \\ \displaystyle\iint_\Omega div(E)dxdy = \iint_\Omega 0dxdy = 0 \end{cases}$$

2.3. Esercizio. *Sia Σ la superficie cartesiana*

$$z = x^2 + 4y^2, \quad x^2 + 16\,y^2 \le 1$$

- *calcolare l'area di Σ,*
- *determinare una rappresentazione parametrica del bordo di Σ,*
- *calcolare il lavoro del campo $\overrightarrow{F} = \{1,\, y,\, 0\}$ lungo il bordo di Σ percorso in senso antiorario.*

SOLUZIONE:

L'area della superficie cartesiana Σ é espressa da un integrale doppio esteso al dominio (x, y) su cui la superficie é assegnata:

$$Area = \iint_{x^2+16\,y^2\le 1} \sqrt{1+(2x)^2+(8y)^2}\,dx\,dy =$$

$$\iint_{x^2+16\,y^2\le 1} \sqrt{1+4(x^2+16y^2)}\,dx\,dy$$

Il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \dfrac{1}{4}\rho\sin(\vartheta) \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1$$

cambio di coordinate che presenta lo jacobiano $J = \frac{1}{4}\rho$, trasforma il precedente integrale doppio in

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1+4\,\rho^2}\,\frac{1}{4}\rho d\rho = \frac{1}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi$$

Il bordo di Σ é l'immagine della curva $x^2 + 16\,y^2 = 1$ tramite la $z = x^2 + 4y^2$:

$$x = \cos(\vartheta),\ y = \frac{1}{4}\sin(\vartheta),\ z = \cos^2(\vartheta) + 4\left(\frac{1}{4}\sin(\vartheta)\right)^2, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

Al crescere di ϑ il punto si muove sulla curva bordo esattamente nel verso antiorario prescritto.

Il lavoro del campo $\overrightarrow{F} = \{1,\, y,\, 0\}$ lungo il bordo di Σ é pertanto

$$\int_0^{2\pi}\left\{1\,.\,(-\sin(\vartheta)+\frac{1}{4}\sin(\vartheta)\,.\,\frac{1}{4}\cos(\vartheta)\right\}\,d\vartheta=0$$

Il valore ottenuto era assolutamente prevedibile tenuto conto che il campo F é conservativo;

$$F=\nabla\left(x+\frac{y^2}{2}\right)$$

2.4. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$y''-4y'+4y=f(t)$$

- *nel caso* $f(t)\equiv 0$,
- *nel caso* $f(t)\equiv e^{2t}$,
- *nel caso* $f(t)\equiv t\,e^{2t}$

SOLUZIONE:

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$$

offre l'unica radice $\lambda_0=2$.
Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea - caso $f(t)\equiv 0$ - sono pertanto

$$y_0(t)=c_1e^{2t}+c_2\,t\,e^{2t}$$

Una soluzione particolare relativa al caso $f(t)\equiv e^{2t}$ puó essere trovata nella forma $\overline{y}(t)=A\,t^2\,e^{2t}$: sostituendo si ottiene

$$2Ae^{2t}=e^{2t}\quad\to\quad A=\frac{1}{2}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa, caso $f(t)\equiv e^{2t}$, sono pertanto

$$y_1(t)=c_1e^{2t}+c_2\,t\,e^{2t}+\frac{1}{2}\,t^2\,e^{2t}$$

Una soluzione particolare relativa al terzo caso $f(t)\equiv t\,e^{2t}$ puó essere trovata nella forma $\overline{y}(t)=B\,t^3\,e^{2t}$: sostituendo si ottiene

$$6B\,t\,e^{2t}=t\,e^{2t}\quad\to\quad B=\frac{1}{6}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa, caso $f(t)\equiv t\,e^{2t}$, sono pertanto

$$y_2(t)=c_1e^{2t}+c_2\,t\,e^{2t}+\frac{1}{6}\,t^3\,e^{2t}$$

2.5. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y' - \frac{1}{t}y = t$$

- *determinare tutte le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa,*
- *determinare la soluzione del problema di Cauchy $y(1) = 1$.*

SOLUZIONE:

L'equazione, differenziale lineare del primo ordine, é definita per $t \neq 0$.

Omogenea:

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \quad \to \quad y_0(t) = c\, e^{\log(|t|)} = c|t|, \quad t \neq 0$$

La famiglia di soluzioni trovate equivale, stante l'arbitrarietá del fattore $c \in \mathbb{R}$, alla analoga famiglia

$$y_0(t) = c\, t \qquad t \neq 0$$

Completa:

Una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ puó essere trovata nella forma $\overline{y}(t) = u(t)\,.\,y_0(t)$: sostituendo si ottiene

$$u'(t)y_0(t) = t \quad \to \quad u'(t) = 1 \quad \to \quad u(t) = t \quad \to \quad \overline{y}(t) = t^2$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto

$$y(t) = c\, t + t^2, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Dalla precedente espressione di tutte le soluzioni é facile dedurre quella che soddisfa la condizione $y(1) = 1$, si tratta della

$$y_1(t) = t^2$$

corrispondente alla scelta $c = 0$.
É interessante notare come, pur essendo l'equazione, cioé uno dei suoi coefficienti, non definita per $t = 0$ le soluzioni sono tranquillamente prolungabili su tale punto.
Naturalmente il fatto che la funzione, ad esempio, $y_1(t) = t^2$ sia definita in tutto $\mathbb{R}$ non significa che essa é soluzione dell'equazione in tutto $\mathbb{R}$, per il semplice motivo che l'equazione stessa non é definita per $t = 0$.