ANALISI VETTORIALE

Soluzione scritto

11 luglio 2011

3.1. Esercizio. *Assegnati i tre problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{t} = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{2y}{t} = \dfrac{1}{t^3} \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{2y}{t} = \dfrac{e^t}{t^3} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

- *determinare le soluzioni $y_1(t)$, $y_2(t)$ dei primi due,*
- *detta $y_3(t)$ la soluzione del terzo problema di Cauchy provare che riesce $y_1(t) \leq y_2(t) \leq y_3(t)$ per ogni $t \geq 1$.*

SOLUZIONE:

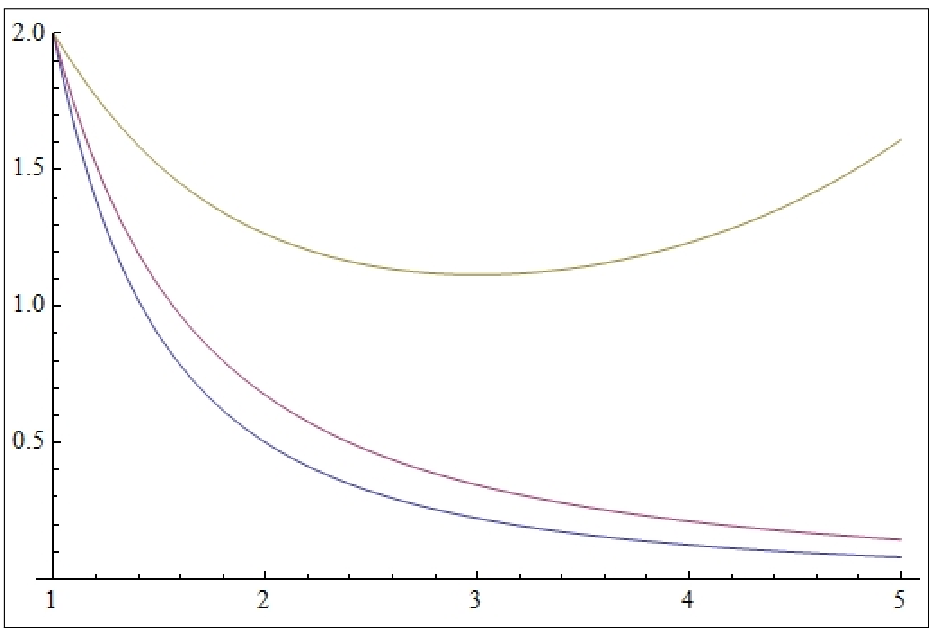

FIGURA 1. $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$

Primo problema:

$$y_0(t) = \frac{c}{t^2} \to y_1(t) = \frac{2}{t^2}$$

Secondo problema:

$$y_0(t) = \frac{c}{t^2} \quad \overline{y}(t) = u(t)\,\frac{1}{t^2} \to u'(t)\,\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^3}$$

da cui

$$u'(t) = \frac{1}{t} \to u(t) = \ln(t) \to \overline{y}(t) = \frac{\ln(t)}{t^2}$$

e quindi, $\forall\, t \geq 1$

$$y_2(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{\ln(t)}{t^2} \geq \frac{2}{t^2} = y_1(t)$$

$\boxed{\text{Terzo problema:}}$

$$y_0(t) = \frac{c}{t^2} \quad \overline{y}(t) = u(t)\,\frac{1}{t^2} \to u'(t)\,\frac{1}{t^2} = \frac{e^t}{t^3}$$

da cui

$$u'(t) = \frac{e^t}{t} \to u(t) = \int_1^t \frac{e^\tau}{\tau}\,d\tau \geq \int_1^t \frac{1}{\tau}\,d\tau = \ln(t)$$

e quindi, $\forall\, t \geq 1$

$$y_3(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{\displaystyle\int_1^t \frac{e^\tau}{\tau}\,d\tau}{t^2} \geq \frac{2}{t^2} + \frac{\ln(t)}{t^2} = y_2(t)$$

3.2. Esercizio. *Sia E l'insieme del piano delimitato dalla parabola $x - y^2 = 0$ e dalla retta per $(1, 1)$ e $(4, -2)$, calcolare:*

- *l'area di E,*
- *l'integrale doppio $\displaystyle\iint_E xy^2 dxdy$,*
- *il volume del solido ottenuto ruotando E intorno all'asse y.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

I due punti $(1, 1)$ e $(4, -2)$ stanno sulla parabola e la retta per essi é $x + y - 2 = 0$.
L'insieme E é pertanto il dominio normale rispetto all'asse y

$$y^2 \leq x \leq 2 - y, \qquad -2 \leq y \leq 1$$

Si ha pertanto

$$Area(E) = \iint_E dxdy = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y} dx = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy = \frac{9}{2}$$

$$\iint_E xy^2 dxdy = \int_{-2}^{1} y^2\,dy \int_{y^2}^{2-y} x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} y^2\,\left((2-y)^2 - y^4\right)\,dy$$

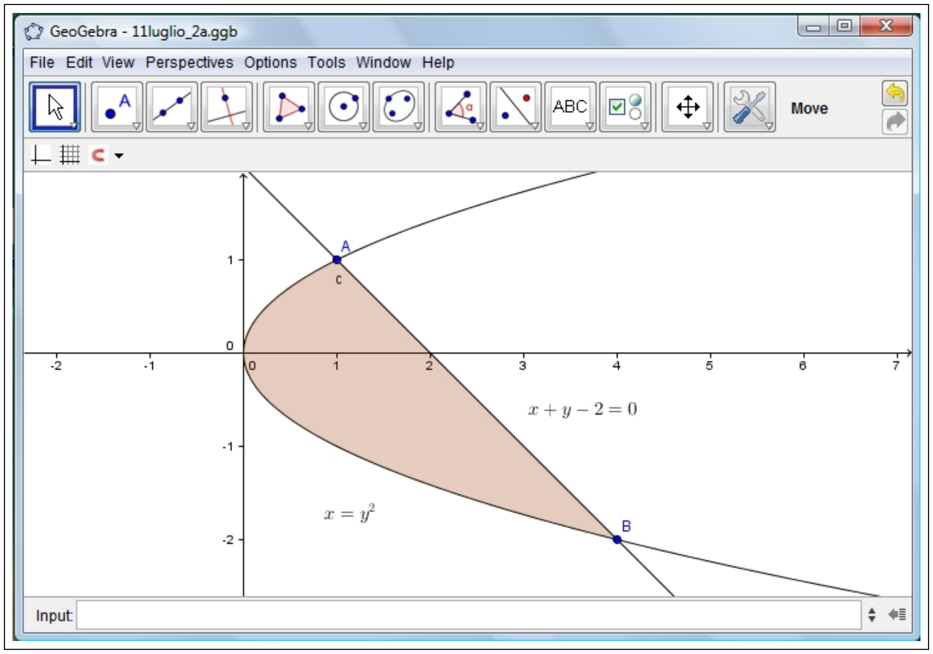

FIGURA 2. L'insieme E, normale rispetto ad y

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left(-\frac{y^6}{2}+\frac{y^4}{2}-2y^3+2y^2\right)\,dy = \frac{531}{70}$$

Detto S il solido ottenuto ruotando E intorno all'asse y si riconosce che le sue sezioni ad ogni quota $y \in [-2, 1]$ sono corone circolari di area

$$\pi\left((2-y)^2 - y^4\right)$$

riesce pertanto

$$Volume(D) = \int_{-2}^{1} \pi\left((2-y)^2 - y^4\right)\,dy = \frac{72}{5}\,\pi$$

3.3. Esercizio. *Detta* $\mathcal{S}: \; x^2 + 5y^2 + z^2 = 5$ *determinare:*

- *il piano tangente alla superficie* $\mathcal{S}$ *nel punto* $(0, 1, 0)$,
- *in quali punti di* $\mathcal{S}$ *i piani tangenti sono paralleli all'asse* z,
- *in quali punti di* $\mathcal{S}$ *il piano tangente a* $\mathcal{S}$ *é parallelo al piano* $4x + 5y - 4z = 0$.

SOLUZIONE:

Prima domanda

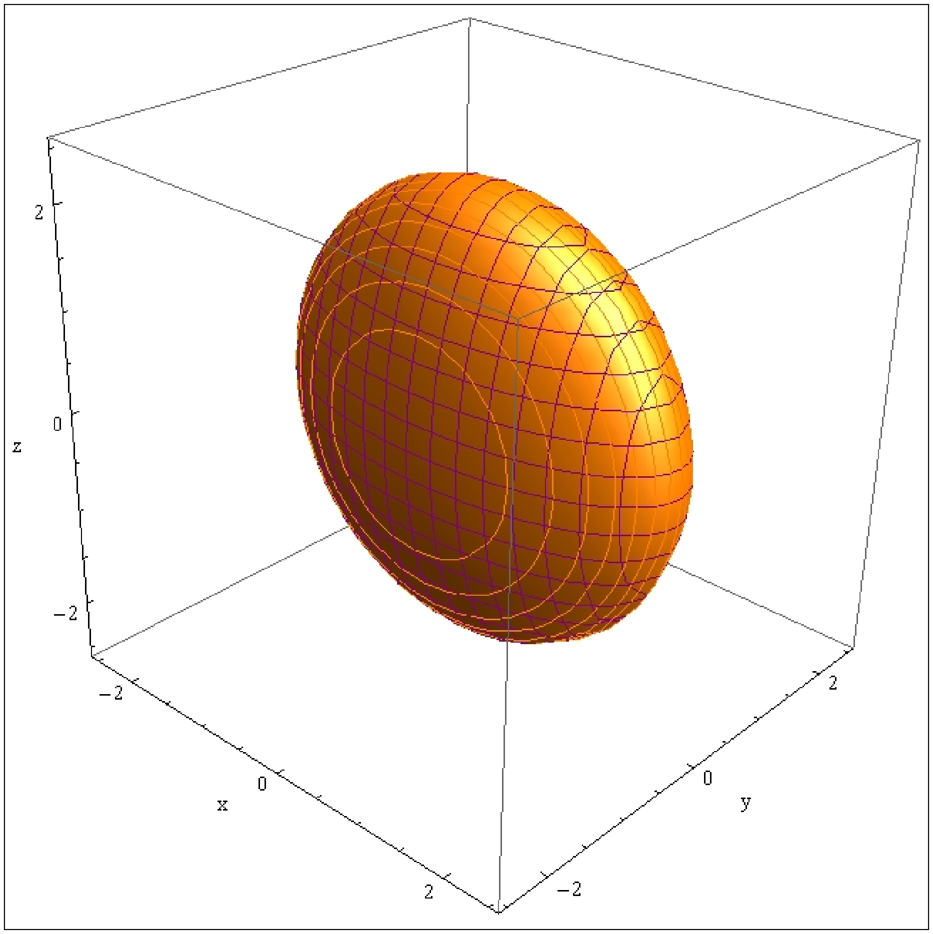

FIGURA 3. $x^2 + 5y^2 + z^2 = 5$

$$\begin{cases} f_x = 2x & f_x((0,1,0)) = 0 \\ f_y = 10y & f_y((0,1,0)) = 10 \\ f_z = 2z & f_z((0,1,0)) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 10(y-1) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

$\boxed{\text{Seconda domanda}}$

I piani paralleli all'asse z sono quelli che hanno il coefficiente di z nullo: quindi

$$\begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 10y \\ f_z = 2z \end{cases} \quad \rightarrow \quad z = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 5y^2 = 5$$

Sono l'ellisse intersezione della superficie con il piano $z = 0$.

Terza domanda

Un piano $ax + by + cz + d = 0$ é parallelo a $4x + 5y - 4z = 0$ se e solo se

$$a = 4\rho, \quad b = 5\rho, \quad c = -4\rho$$

Questo avviene per i punti (x, y, z) nei quali riesce

$$2x = 4\rho, \quad 10y = 5\rho, \quad 2z = -4\rho$$

che appartengono alla superficie se e solo se

$$\left(\frac{4\rho}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{5\rho}{10}\right)^2 + \left(\frac{4\rho}{2}\right)^2 = \frac{37}{4}\rho^2 = 5$$

da cui

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{20}{37}}$$

I punti sono pertanto i due simmetrici rispetto all'origine

$$A = \left(2\sqrt{\frac{20}{37}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{20}{37}}, -2\sqrt{\frac{20}{37}}\right), B = \left(-2\sqrt{\frac{20}{37}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{20}{37}}, 2\sqrt{\frac{20}{37}}\right)$$

3.4. Esercizio. *Sia* $E: \quad x^3 - 3x^2 + x + 2 + y^2 - 3y = 0$

- *provare che in un intorno del punto $(0, 1)$ E coincide con il grafico di una funzione $y = f(x)$ continua e derivabile,*
- *provare che in un intorno del punto $(0, 1)$ E coincide con il grafico di una funzione $x = g(y)$ continua e derivabile,*
- *determinare il polinomio di Taylor di secondo grado e punto iniziale $y_0 = 1$ relativo alla funzione $g(y)$.*

SOLUZIONE:

Tenuto presente che il punto $(0, 1)$ soddisfa l'equazione e che in tale punto riescono

$$f_x(0, 1) = 1, \qquad f_y(0, 1) = -3$$

il teorema di Dini garantisce che in un intorno del punto $(0, 1)$ l'insieme E coincide sia con il grafico di una funzione $y = f(x)$ che di una $x = g(y)$.
Per quanto concerne il polinomio di Taylor di secondo grado di $g(y)$ in un intorno di $y_0 = 1$ esso é

$$P_g(y) = g(1) + g'(1)(y - 1) + \frac{g''(1)}{2}(y - 1)^2$$

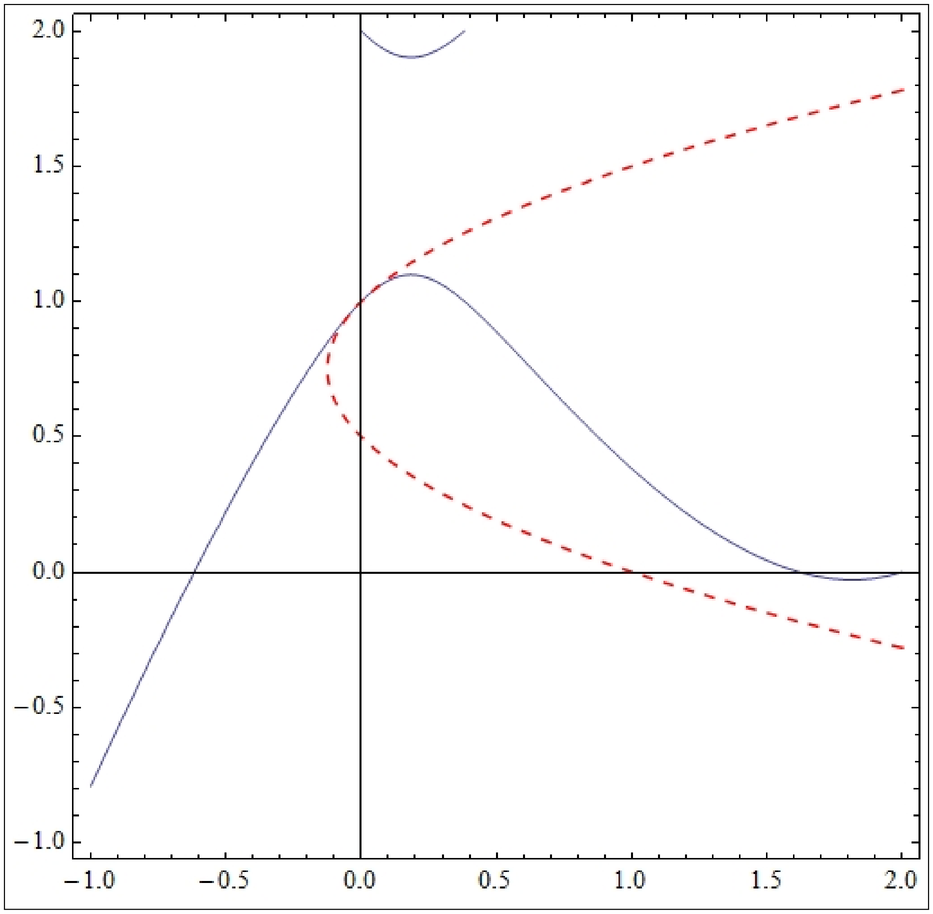

FIGURA 4. $x^3 - 3x^2 + x + 2 + y^2 - 3y = 0, \quad x = P_g(y)$

Tenuto presente che dalla $f[g(y), y] \equiv 0$ si ricavano

$$\begin{cases} g(1) = 0 & \\ f_x g' + f_y = 0 & g'(1) = 1 \\ f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g' + f_x g'' + f_{yy} = 0 & g''(1) = 4 \end{cases}$$

si ottiene

$$P_g(y) = (y-1) + 2(y-1)^2 = 2y^2 - 3y + 1$$

3.5. Esercizio.

- *determinare l'insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ degli x per i quali esiste finito l'integrale improprio*

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2 + t^4}\, dt$$

- *provare che per $x \in E$ riesce*
$$F'(x) + \frac{1}{2x^2 + x^4} + \int_x^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2+t^4)^2}\,dt = 0$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Tenuto conto che per $x \neq 0$ l'espressione
$$\frac{1}{x^2+t^2+t^4}$$
é dotata di integrale improprio rispetto a t assolutamente convergente in ogni intervallo, si riconosce che $F(x)$ é definito per ogni $x \neq 0$.
Tenuto presente che
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+t^2+t^4}\right)\right| = \frac{2|x|}{(x^2+t^2+t^4)^2}$$
e che inoltre l'espressione a secondo membro é dotata, per $x \neq 0$ di integrale improprio rispetto a t assolutamente convergente in ogni intervallo, si riconosce che
$$F'(x) = -\frac{1}{x^2+x^2+x^4} - \int_x^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2+t^4)^2}\,dt$$