ANALISI VETTORIALE

Soluzione scritto

19 settembre 2011

4.1. Esercizio. *Assegnata la superficie cartesiana*

$$\mathcal{S}: \ z = x^2 - y^2 + 5, \quad x^2 + y^2 \le 1$$

- *calcolare l'area di* $\mathcal{S}$
- *calcolare il volume di*

$$\Omega: \ 0 \le z \le x^2 - y^2 + 5, \ x^2 + y^2 \le 1$$

SOLUZIONE:

Tenuto conto che

$$\mathcal{S}: \ z = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \quad \to \quad Area(\mathcal{S}) = \iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

riesce, servendosi delle coordinate polari,

$$Area(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \simeq 1.7\pi$$

Si noti come l'area della superficie $\mathcal{S}$, che non é piana, risulti maggiore di quella, π, del cerchio $x^2 + y^2 \le 1$ sul quale é costruita !

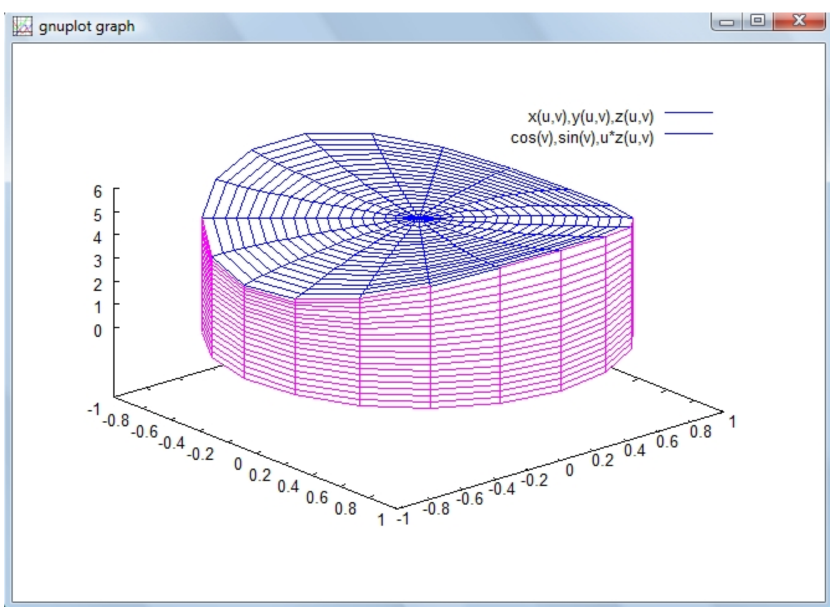

FIGURA 1. $\mathcal{S}: \ z = x^2 - y^2 + 5, \quad x^2 + y^2 \le 1$

Per quanto concerne il volume $\mathcal{V}$, tenuto conto che

$$(x,y)\in\Omega \quad \to \quad f(x,y)>0$$

si ha, servendosi ancora delle coordinate polari,

$$\mathcal{V}=\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))+5\right)\rho\,d\rho=5\pi$$

La simmetria della copertura $\mathcal{S}$ faceva del resto prevedere che il volume $\mathcal{V}$ sarebbe dovuto essere lo stesso del cilindro $x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 5$.

4.2. Esercizio. *Assegnato il campo vettoriale*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)\,\{x,\,y,\,z\}$$

- *calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ *lungo la semicirconferenza*
$$z=0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2=1$$
percorsa in senso antiorario,
- *calcolare il flusso di* $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ *uscente dalla sfera di centro l'origine e raggio* 3*,*
- *calcolare un potenziale di* $\overrightarrow{F}(x,y,z)$*.*

Soluzione:

La semicirconferenza $\mathcal{C}$ assegnata ha la seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x=\cos(\theta) \\ y=\sin(\theta) \qquad \theta\in[0,\pi] \\ z=0 \end{cases}$$

Il lavoro $\mathcal{L}$ richiesto é pertanto dato dal seguente integrale

$$\mathcal{L}=\int_{\mathcal{C}}\overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{t}\,ds=\int_0^{\pi}\left[-\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin(\theta)\cos(\theta)\right]d\theta=0$$

Il risultato nullo per il lavoro era del resto prevedibile dal momento che il campo $\overrightarrow{F}$, radiale, é, in ogni punto, ortogonale alla circonferenza $\mathcal{C}$[1]

Il flusso $\mathcal{F}$ uscente dalla superficie sferica $\mathcal{S}$ é, per definizione,

[1] Si tratta di un fenomeno generale: in ogni punto di una superficie la normale é ortogonale alle tangenti delle curve geodetiche passanti per tale punto.

$$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{n}\, d\sigma$$

Tenuto conto che, avendo indicato con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si ha

$$\overrightarrow{n} = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\}$$

e quindi

$$\overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{n} = r^3 = 3^3$$

da cui, tenuto conto che l'area della sfera di raggio 3 vale $4\pi\, 3^2$ riesce

$$= \iint_{\mathcal{S}} 3^3\, d\sigma = 4\pi\, 3^5$$

Osservato che il campo F é radiale

$$F = r^3 \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\}$$

un potenziale, ancora di tipo radiale $V(r)$ é fornito da una primitiva del fattore r^3,

$$V(r) = \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{4} \left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

4.3. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y' = (y+1)(y-2)$$

- *determinare le soluzioni costanti,*
- *determinare la soluzione che verifica la cond. iniziale* $y(0) = 0$.

Soluzione:

Le soluzioni costanti di un'equazione di tipo autonomo $y' = f(y)$ sono tutte e sole le costanti c tali che $f(c) = 0$.
Nel caso proposto

$$f(y) = (y+1)(y-2) \quad \to \quad (y+1)(y-2) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ si cerca con l'algoritmo formale

$$\int_0^y \frac{dy}{f(y)} = \int_0^x dx, \quad \to \quad \int_0^y \frac{dy}{(y+1)(y-2)} = x$$

Tenuto presente che

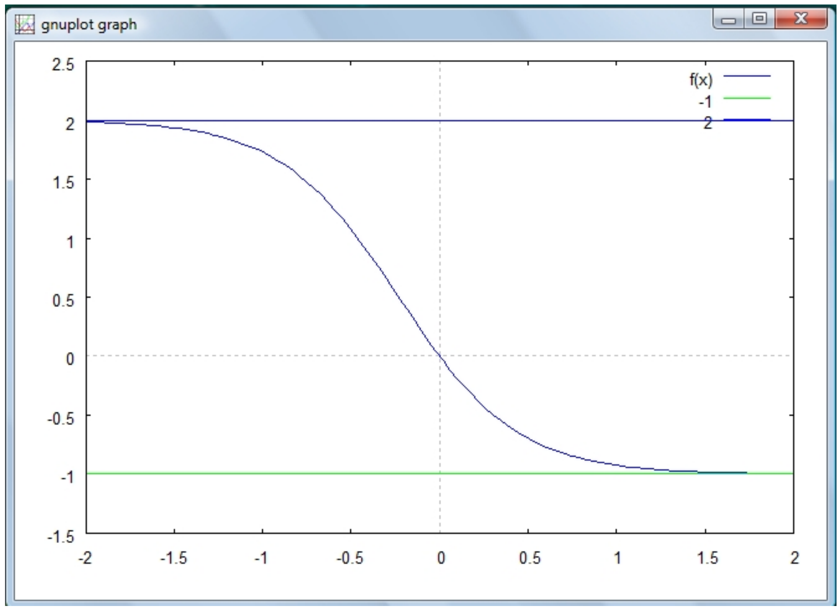

FIGURA 2. $y' = (y+1)(y-2), \quad y(0) = 0$

$$\frac{1}{(y+1)(y-2)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1}\right\}$$

riesce

$$\frac{1}{3}\left\{\log(|y-2|) - \log(2) - \log(|y+1|)\right\} = x$$

Tenuto presente che l'esistenza delle due soluzioni costanti -1 e 2 implica per la soluzione y che soddisfa la condizione $y(0) = 0$ le limitazioni

$$-1 \; < \; y \; < \; 2$$

e quindi

$$|y-2| = 2-y, \quad |y+1| = y+1$$

riesce quindi

$$\log(2-y) - \log(2) - \log(y+1) = 3x \quad \to \quad \log\left(\frac{2-y}{2(y+1)}\right) = 3x$$

Da cui

$$\frac{2-y}{2(y+1)} = e^{3x} \quad \to \quad y = \frac{2(1-e^{3x})}{2e^{3x}+1}$$

4.4. Esercizio. *Sia $\mathcal{S}$ la superficie determinata dall'equazione*

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$$

- *determinare il piano tangente nel punto $P_0 = (2, 0, 0)$,*
- *determinare una rappresentazione parametrica di $\mathcal{S}$*
- *determinare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

su $\mathcal{S}$.

SOLUZIONE:

La superficie $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$ ovvero

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

é l'ellissoide di centro l'origine e semiassi $2, \sqrt{2}, 2$.

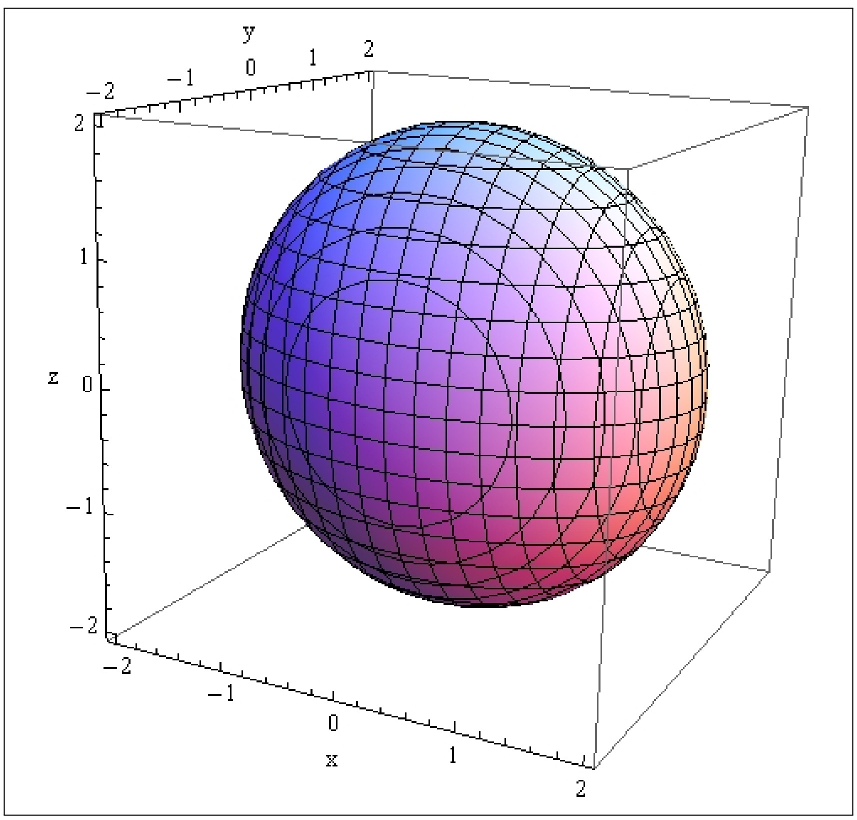

FIGURA 3. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$

Il piano tangente ad una superficie assegnata tramite l'equazione $F(x, y, z) = 0$ nel punto (x_0, y_0, z_0) é dato da

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Si ha pertanto, nel caso assegnato

$$(x-2)F_x(2, 0, 0)+(y-0)F_y(2, 0, 0)+(z-0)F_z(2, 0, 0) = 0 \quad \to \quad 4(x-2) = 0$$

$$\to \quad x = 2$$

Una rappresentazione parametrica della superficie, scritta nella forma

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$$

si ricava, adattando le coordinate polari sferiche, nella forma seguente

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \\ \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \\ \dfrac{z}{2} = \cos(\varphi) \end{cases} \quad \to$$

$$\begin{cases} x = 2\,\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \\ y = \sqrt{2}\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, \pi] \\ \\ z = 2\,\cos(\varphi) \end{cases}$$

La funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

assegnata rappresenta il quadrato della distanza del punto (x, y, z) dall'origine: tenuto presente che la superficie $\mathcal{S}$ é un ellissoide centrato nell'origine e di assi coincidenti con gli assi cartesiani, risulta evidente che i punti di minimo e/o di massimo sono le intersezioni dell'ellissoide con gli assi.

Minimo e massimo sono pertanto minimo e massimo dei tre numeri $\{2^2,\ \sqrt{2}^2,\ 2^2\}$: ne segue

$$min = 2, \quad max = 4$$

4.5. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \sin(y)\, dy$$

- *dire per quali valori x é definita,*
- *per quali x é derivabile,*
- *servendosi della sostituzione $y = x + u$ provare che $F(x)$ é periodica di periodo 2π.*

SOLUZIONE:

Tenuto presente che per ogni $A < B$ si ha

$$\int_A^B \left| e^{-(x-y)^2} \sin(y) \right| dy \leq \int_A^B e^{-(x-y)^2}\, dy = \int_{A-x}^{B-x} e^{-u^2}\, du \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

si riconosce che l'integrale improprio assegnato é assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$: quindi la funzione $F(x)$ é definita in tutto $\mathbb{R}$.

Tenuto presente che anche l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2(x-y)\, e^{-(x-y)^2} \sin(y)\, dy$$

é assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ si riconosce che la funzione $F(x)$ é derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e riesce

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2(x-y)\, e^{-(x-y)^2} \sin(y)\, dy$$

Servendosi della sostituzione indicata si ha

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(x+u)\, du$$

Con tale espressione riesce del resto

$$F(x+2\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(x+2\pi+u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(x+u)\, du$$

e quindi

$$F(x+2\pi) = F(x)$$

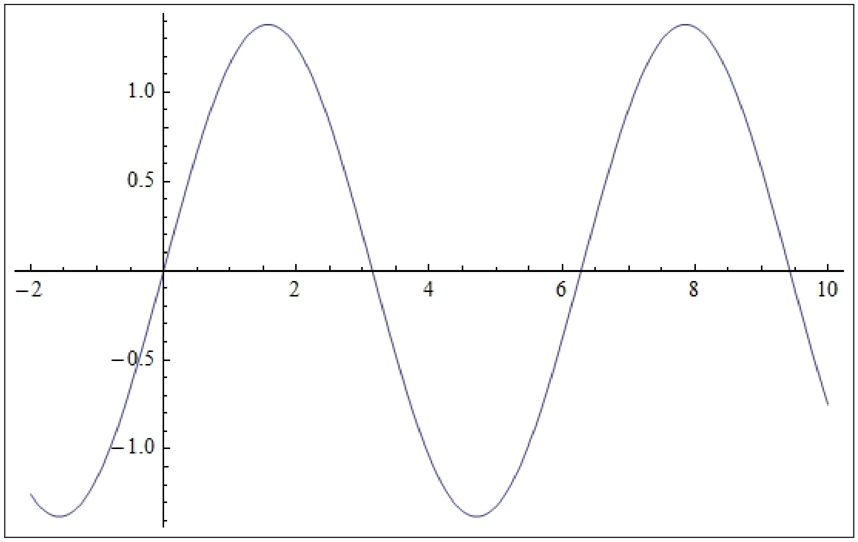

FIGURA 4. $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \sin(y)\, dy$