ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

29 ottobre 2010

1.1. Esercizio. *Verificare se gli integrali impropri*

$$I_0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\,dx, \quad I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

convergono e, in caso affermativo, se convergono assolutamente.

SOLUZIONE:

$\boxed{I_0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\,dx}$

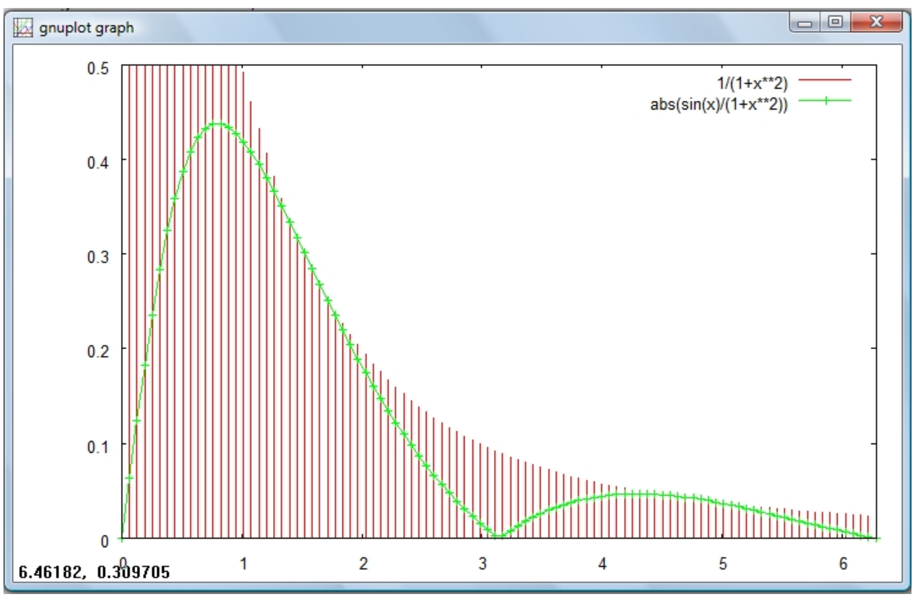

FIGURA 1. In verde il grafico di $\left|\frac{\sin(x)}{1+x^2}\right|$, in rosso, riempito, quello di $\left|\frac{1}{1+x^2}\right|$

Tenuto conto che, vedi Figura 1,

$$\forall x \in [0, +\infty) : \quad \left|\frac{\sin(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

e tenuto conto che la funzione non negativa $\dfrac{1}{1+x^2}$ é dotata di integrale improprio su $[0,+\infty)$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

si deduce, per confronto, che esiste l'integrale improprio I_0, e si dice che esiste in senso assoluto ovvero che si tratta di un integrale improprio assolutamente convergente.

$$\boxed{I_1 = \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx}$$

La maggiorazione, ovvia,

$$\forall x \in [1,+\infty): \quad \left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

non garantisce nulla in quanto la funzione maggiorante, a secondo membro, non é dotata di integrale improprio su $[1,+\infty)$.
Consideriamo pertanto il conto, quanto piú possibile esplicito, degli integrali

$$\int_1^M \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Servendosi dell'integrazione per parti si ha

$$\int_1^M \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\bigg|_1^M - \frac{3}{2}\int_0^M \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Tenuto conto che

- esiste il limite
$$\lim_{M\to+\infty} -\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\bigg|_1^M = \cos(1)$$
- esiste il limite
$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$
in quanto la funzione integranda verifica la disuguaglianza
$$\forall x \in [1,+\infty): \quad \left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$

si deduce che esiste il limite

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Tenuto conto che é noto che non esiste l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x} \right| dx,$$

per confronto

$$\forall x \in [1, +\infty) : \quad \left| \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right|$$

si riconosce che non esiste neanche l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| dx$$

$\boxed{I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\, dx}$

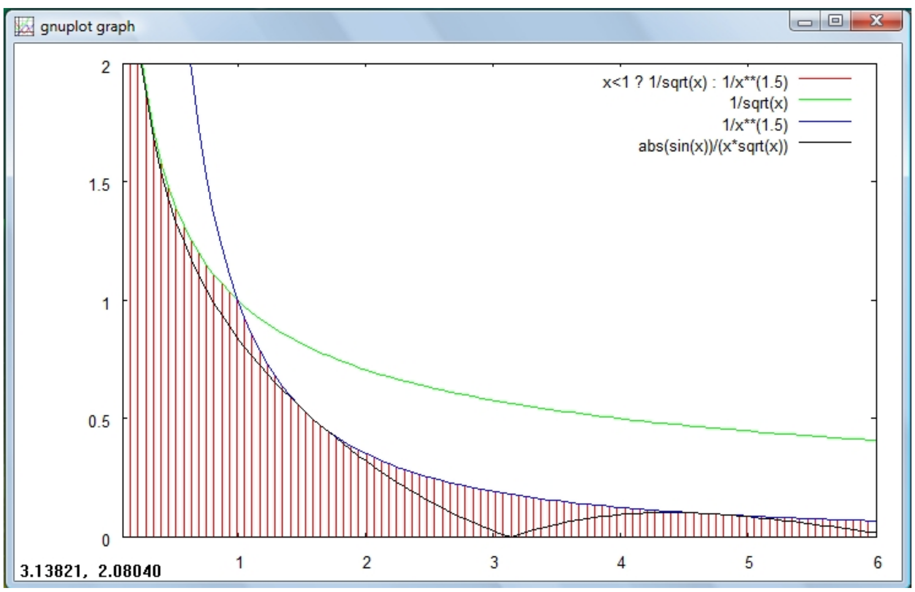

FIGURA 2. In nero il grafico di $\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right|$, in rosso, riempito, quello della sua maggiorazione $F(x)$.

L'integrale improprio possiede due tipi di singolaritá

- la divergenza della funzione integranda nell'estremo sinistro 0,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} = +\infty$$

- la illimitatezza dell'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$

Provare l'esistenza dell'integrale improprio I_2 corrisponde quindi a provare l'esistenza dei due integrali impropri

$$A = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx, \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Per quanto concerne il primo, A, tenuto conto che il rapporto $\sin(x)/x$ si mantiene limitato riesce

$$\forall x \in (0,1]: \qquad \left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{M}{|x|^{1/2}}$$

Tale disuguaglianza garantisce l'esistenza di A, come integrale improprio assolutamente convergente.
Per quanto concerne B tenuto conto che

$$\forall x \in [1,+\infty): \qquad \left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$

si riconosce l'esistenza di B, come integrale improprio assolutamente convergente.
Risulta pertanto provato che esiste l'integrale I_2, come integrale improprio assolutamente convergente.
La zona tratteggiata in Figura 2 rappresenta il sottografico della funzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & se \quad x \in (0,1) \\ \dfrac{1}{x^{3/2}} & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

maggiorante la funzione assegnata e dotata di integrale improprio su $(0,\infty)$.

1.2. Esercizio. *Verificare se gli integrali impropri* [1]

$$F = \int_0^\infty \sin((x-1)^2)\,dx, \qquad G = \int_0^\infty 2x\sin(x^4)\,dx$$

convergono e, in caso affermativo, se convergono assolutamente.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$\boxed{F = \int_0^\infty \sin((x-1)^2)\,dx}$

Servendosi della sostituzione $x-1=t$ l'integrale improprio F si traduce nell'integrale ancora improprio

$$\int_{-1}^\infty \sin(t^2)dt = \int_{-1}^1 \sin(t^2)dt + \int_1^\infty \sin(t^2)dt$$

[1] F é detto *Integrale di Fresnel*

Quindi l'esistenza (o meno) dell'integrale improprio F assegnato equivale all'esistenza dell'integrale improprio secondo addendo a secondo membro.
Consideriamo pertanto gli integrali

$$\int_1^M \sin(x^2)dx$$

la sostituzione $x = \sqrt{u}$ trasforma l'integrale precedente in

$$\int_1^{M^2} \sin(u)\frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

integrando per parti esso si trasforma in

$$-\left.\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\right|_1^{M^2} - \frac{3}{4}\int_1^{M^2} \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}du$$

Tenuto presente che

- esiste $\lim\limits_{M\to\infty} -\left.\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\right|_1^{M^2} = \frac{\cos(1)}{2}$
- esiste $\lim\limits_{M\to\infty} \frac{3}{4}\int_1^{M^2} \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}du$ perché la funzione integranda verifica la disuguaglianza

$$\left|\frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{|u|^{3/2}}$$

si riconosce che esiste l'integrale improprio $\int_1^\infty \sin(t^2)dt$ e quindi esiste l'integrale improprio F assegnato.

$\boxed{G = \int_0^\infty 2x\sin(x^4)\,dx}$

La funzione integranda $2x\sin(x^4)$ non é infinitesima per $x \to \infty$, quindi non verifica alcuna delle condizioni sufficienti di intregrabilitá basate sul confronto.
Consideriamo gli integrali

$$\int_0^M 2x\sin(x^4)\,dx$$

Servendosi della sostituzione $x^2 = u$ cioé $x = \sqrt{u}$ l'integrale si trasforma in

$$\int_0^{M^2} \sin(u^2)du$$

L'esistenza del limite

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^{M^2}\sin(u^2)du$$

si ricava servendosi del punto precedente in cui é stata provata l'esistenza di

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^{M^2}\sin(t^2)dt$$

1.3. Esercizio. *Studiare il carattere delle serie*

$$S_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2(n)},\qquad S_2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log(\log n)}.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

S_1 è una serie convergente: lo si vede col criterio integrale, dal momento che

$$n\le x\le(n+1)\quad\to\quad\frac{1}{n\log^2(n)}\ge\frac{1}{x\log^2(x)}\ge\frac{1}{(n+1)\log^2(n+1)}$$

e converge l'integrale improprio

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\log^2 x}\,dx=\lim_{K\to\infty}\int_2^K\frac{1}{x\log^2 x}\,dx=-\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\log x}\Big|_2^K=\frac{1}{\log 2}.$$

Invece S_2 è una serie divergente: anche questo si vede col criterio integrale, dal momento che, per n sufficientemente grande, $n\le x\le(n+1)\quad\to$

$$\frac{1}{n\log(n)\log(\log n)}\ge\frac{1}{x\log(x)\log(\log x)}\ge\frac{1}{(n+1)\log(n+1)\log(\log(n+1))}$$

e diverge l'integrale improprio

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx=\lim_{K\to\infty}\int_{e^2}^{K}\frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx=\lim_{K\to\infty}\log(\log(\log x))\Big|_{e^2}^{K}.$$

1.4. Esercizio.

- *Siano* $g\in C^1(\mathbb{R})$ *e* $u(x,t)=g(x-kt)$ *con* $k\in\mathbb{R}$, *calcolare* $u_t(x,t)+ku_x(x,t)$

- *Siano $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ con $f_x \in C^0(\mathbb{R}^2)$ posto*

$$U(x,t) = g(x-kt) + \int_0^t f(x-k(t-s),s)\,ds.$$

calcolare $U_t(x,t) \,+\, k\,U_x(x,t)$.

Soluzione:

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$u(x,t) = g(x-kt) \quad \to \quad \begin{cases} u_x(x,t) = g'(x-kt) \\ u_t(x,t) = -kg'(x-kt) \end{cases}$$

ne segue pertanto che la u soddisfa l'**equazione alle derivate parziali lineare e omogenea**

$$u_t(x,t) + k\,u_x(x,t) = -k\,g'(x-kt) + k\,g'(x-kt) = 0$$

detta **del trasporto**, dove k é una costante positiva col significato di velocitá.
La funzione u costruita verifica inoltre la condizione iniziale

$$u(x,0) = g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: *Sia, ad esempio $g(x) = 2\,e^{-30(x-0.5)^2}$ e sia $k = 1$: le due figure 3 seguenti mostrano il grafico della g e quello della funzione $u(x,t) = g(x-t)$: il suo grafico evidenzia l'onda rappresentata dalla $g(x)$ che al tempo $t = 0$ stava vicino a 0, al passare del tempo avanza e la troviamo via via in corrispondenza di zone x lontane dall'origine.*

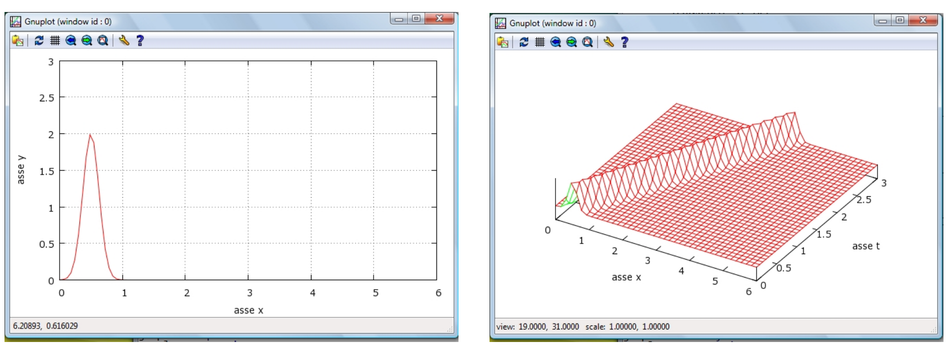

Figura 3. $g(x) = 2\,e^{-30(x-0.5)^2}$, $u(x,t) = g(x-t)$

La successiva figura 4 rappresenta il grafico della funzione $u(x,t) = g(x - \frac{t}{2})$, relativo alla scelta $k = \frac{1}{2}$, piú piccola: l'onda avanza piú lentamente.

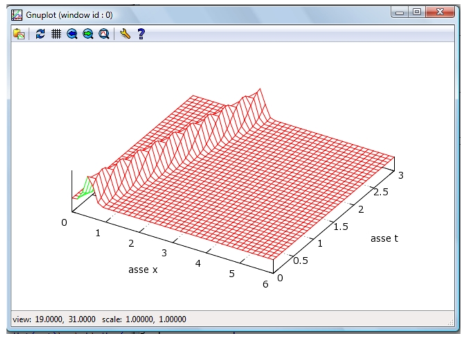

FIGURA 4. $g(x) = 2\, e^{-30(x-0.5)^2}$, $u(x,t) = g(x - t/2)$

All'integrale $\int_0^t f(x - k(t-s), s)\, ds$ si applica la regola di derivazione degli integrali (propri) dipendenti da un parametro, dunque si ha per la funzione U complessivamente

$$U(x,t) = g(x - kt) + \int_0^t f(x - k(t-s), s)\, ds \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} U_x(x,t) = g'(x-kt) + \int_0^t f_x(x - k(t-s), s)\, ds \\ U_t(x,t) = -k\, g'(x-kt) + f(x,t) - k \int_0^t f_x(x - k(t-s), s)\, ds \end{cases}$$

Questo mostra che U soddisfa l'equazione non omogenea

$$U_t(x,t) \,+\, k\, U_x(x,t) = f(x,t)$$

La funzione U costruita verifica inoltre la condizione iniziale

$$u(x,0) = g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.5. Esercizio.

- *Calcolare* $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$.
- *Senza preoccuparsi di verificare le ipotesi che giustificano il procedimento, scrivere le espressioni integrali di*

$$F'(x), F''(x), F'''(x) \dots, F^{[n]}(x)$$

in modo da ottenere in particolare

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$$

- *Giustificare il procedimento seguito nel punto precedente.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Tenuto presente del resto che per $x \neq 0$ si ha

$$\int_0^M e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} \int_0^M (e^{-xt})' dt = -\, e^{-xt}\Big|_0^M = \frac{1 - e^{-xM}}{x}$$

riesce quindi

$$\forall x > 0 : \quad \int_0^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$

Pertanto il calcolo esplicito fornisce:

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad ..., \quad F^{k]}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^k}$$

Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale

$$\forall x > 0 : \quad F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt \quad \to \quad F'(x) = \int_0^\infty -te^{-xt} dt$$

Iterando analogo procedimento si ricava

$$F^{[k]}(x) = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-xt} dt$$

da cui, confrontando il calcolo precedente per le derivate $F^{[k]}(x)$ si ottiene

$$\forall x > 0 : \quad \int_0^\infty t^k e^{-xt} dt = \frac{k!}{x^k}$$

da cui, per $x = 1$ si ha

$$\forall k = 1, 2, 3, ... : \quad \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = k!$$

Per giustificare le derivazioni sotto il segno d'integrale in un punto x bisogna ottenere una maggiorazione della funzione integranda $t^k e^{-xt}$ *in un intorno* di x, *uniforme*, cioé non dipendente da x.
Noi la otteniamo tenendo conto che, fissato comunque $\alpha > 0$, riesce

$$\forall x \in [\alpha, \infty) : \quad |t^k e^{-xt}| \leq t^k e^{-\alpha t}$$

1.6. Esercizio. *Sia*

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt^2} - e^{-t^2}}{t}, \quad x > 0.$$

- *Dimostrare che l'integrale improprio* $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\, dt$ *converge assolutamente.*
- *Calcolare* $F'(x)$*, senza verificare le ipotesi che giustificano il procedimento.*
- *Determinare* $F(x)$ *tramite l'espressione di* $F'(x)$ *trovata.*
- *Giustificare il procedimento seguito nei punti precedenti.*

SOLUZIONE:

Servendosi del teorema di Lagrange si ha, per ogni $x \in [\alpha, \beta], \ \ \alpha > 0$

$$|f(x,t)| = \left|\frac{(-xt^2+t^2)e^{-\xi t^2}}{t}\right| = \left|(1-x)te^{-\xi\, t^2}\right| \leq |1+\beta|te^{-\alpha t^2}$$

tenuto conto che $|1+\beta|te^{-\alpha t^2}$ é dotata di integrale improprio su $(0,\infty)$ se ne deduce l'esistenza dell'integrale

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt^2} - e^{-t^2}}{t}\, dt$$

Essendo inoltre $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ dominata per $x \in [\alpha, \beta]$ $F(x)$ riesce continua in tale intervallo.
Si deriva sotto il segno d'integrale:

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{t} dt = \int_0^\infty te^{-xt^2} dt = -\frac{1}{2}x$$

Tenuto presente che $f(1,t) \equiv 0 \quad \to \quad F(1) = 0$ dall'espressione trovata per $F'(x)$ si ricava

$$F(x) = \int_1^x F'(t)dt = -\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \log\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Per giustificare l'espressione di $F'(x)$ ottenuta derivando sotto il segno di integrale, basta verificare che anche la funzione $f_x(x,t)$ sia *dominata*: riesce infatti per $x \in [\alpha, \beta], \ \ \alpha > 0$

$$|f_x(x,t)| = \left|-te^{-xt^2}\right| \leq \left|-te^{-\alpha\, t^2}\right|$$