ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

5 novembre 2010

2.1. Esercizio. *Detto*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2+t^2}\, dx$$

- *determinare l'insieme $E \subseteq R$ nel quale l'integrale improprio é assolutamente convergente,*
- *provare che $F(t)$ é continua in E*
- *provare che $F(t)$ é derivabile in E*

SOLUZIONE:

- Tenuto presente che

$$\forall t > 0 : \; e^t \geq \frac{t^2}{2} \quad \rightarrow \quad \forall x \geq 1 : \; x = e^{\log(x)} \geq \frac{\log^2(x)}{2}$$

implica

$$\begin{cases} \forall x \geq 1 : & |\log(x)| \leq \sqrt{2x} \\ 0 < x \leq 1 : & \left|\log\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sqrt{\frac{2}{x}} \quad \rightarrow \quad |\log(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{x}} \end{cases}$$

si riconosce che

$$\left|\frac{\log(x)}{1+x^2+t^2}\right| \leq \frac{|\log(x)|}{1+x^2} \leq \begin{cases} |\log(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{x}} & \forall x \in (0,1] \\ \frac{\sqrt{2x}}{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{x^{3/2}} & \forall x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

Indicata con

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{x}} & x \in (0,1] \\ \frac{\sqrt{2}}{x^{3/2}} & 1 \leq x \end{cases}$$

riesce quindi

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \left|\frac{\log(x)}{1+x^2+t^2}\right| \leq g(x)$$

e tenuto presente che $g(x)$ é dotata di integrale improprio in $(0,+\infty)$ si riconosce che l'integrale improprio che definisce $F(t)$ é assolutamente convergente $\forall t \in \mathbb{R}$

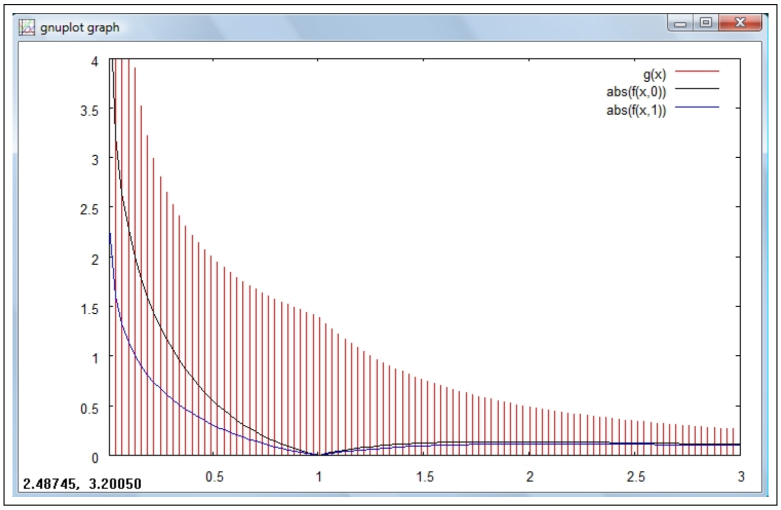

FIGURA 1. $g(x)$ sottografico tratteggiato, $f(x,0)$, $f(x,1)$ sotto...

- Tenuto presente che la funzione integranda
$$f(x,t)=\frac{\log(x)}{1+x^2+t^2} \qquad \in C^{\infty}((0+\infty)\times\mathbb{R})$$
é continua e dominata dalla $g(x)$ si riconosce che $F(t)$ é continua $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Tenuto presente che
$$f_t(x,t)=\frac{-2t\log(x)}{(1+x^2+t^2)^2}$$
e quindi
$$|f_t(x,t)| \leq \left|\frac{2t}{1+x^2+t^2}\right|\left|\frac{\log(x)}{1+x^2+t^2}\right| \leq g(x)$$
avendo cioé riconosciuto che $f_t(x,t)$ é dominata[1], se ne deduce

[1]Si tenga conto che
$$\left|\frac{2t}{1+x^2+t^2}\right| \leq \left|\frac{2t}{1+t^2}\right|$$
e che dalla nota disuguaglianza $2|ab| \leq a^2+b^2$ si ricava $2|t| \leq 1+t^2$ ovvero che
$$\forall t \in \mathbb{R}: \ \frac{|2t|}{1+t^2} \leq 1$$

che $F(t)$ é derivabile e che

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{-2t\log(x)}{(1+x^2+t^2)^2} dx$$

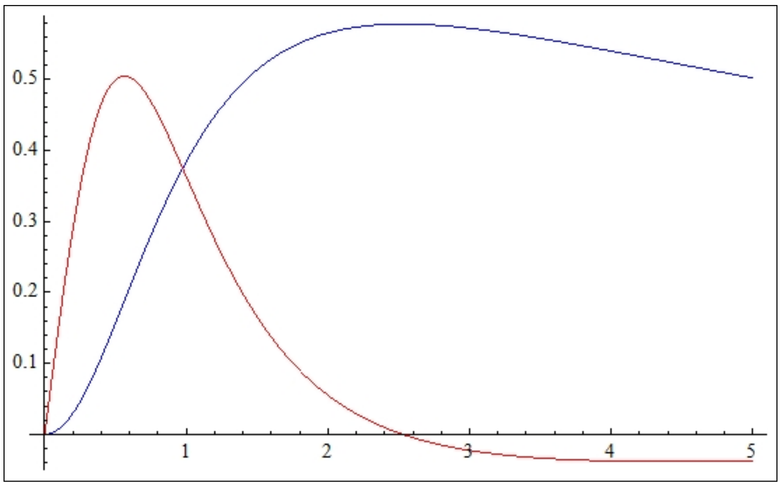

FIGURA 2. $F(t)$ in blu, $F'(t)$ in rosso, calcolate, numericamente, con *Mathematica*

2.2. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$F(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 1$$

- *verificare che essa soddisfa nel punto* $(0,1)$ *le condizioni del teorema di Dini,*
- *determinare l'equazione della tangente alla linea di livello* $E_0 : F(x,y) = 0$ *nel punto* $(0,1)$
- *detta* $f(x)$ *la funzione implicita definita dall'equazione* $F(x,y) = 0$ *in un intorno di* $(0,1)$ *determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 0$ *e ordine* 2 *relativo a tale* $f(x)$.

SOLUZIONE:

- Riesce $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0,1) = 0$ e $F_y(x,y) = 2x^2y + 4y^3 \quad \to$ $F_y(0,1) = 4 \neq 0$, cioé sono soddisfatte le condizioni del Dini.
- Detta $y = f(x)$ la funzione implicita il cui grafico rappresenta la linea di livello $E_0 :\ F(x,y) = 0$ in un intorno di $(0,1)$ riesce

$$f(0) = 1, f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = 0$$

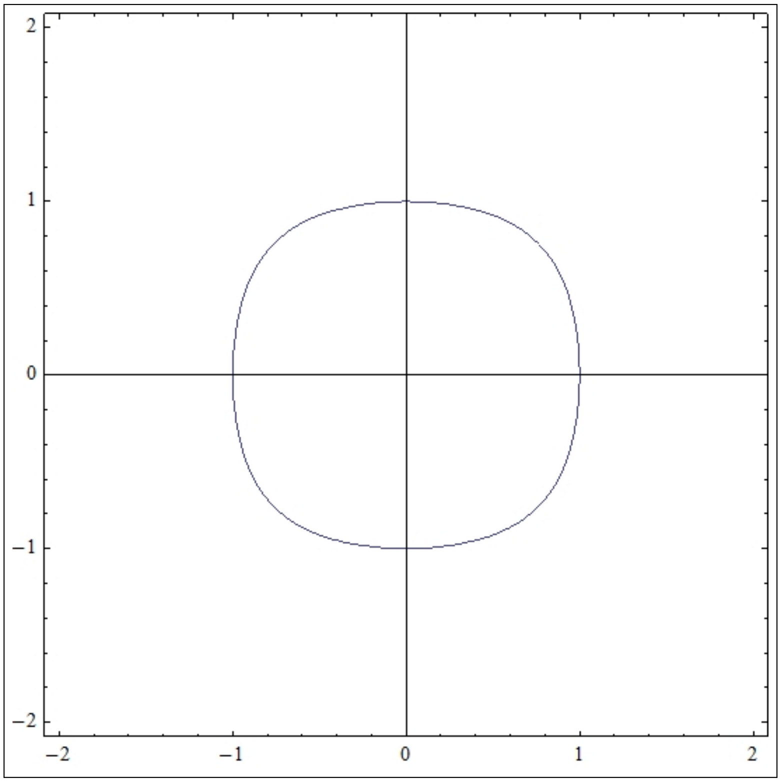

FIGURA 3. $x^4 + x^2y^2 + y^4 - 1 = 0$

pertanto la retta tangente alla linea E_0 in $(0, 1)$ é la retta

$$y = 1$$

- Il polinomio di Taylor é, per definizione

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Tenuto conto che

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \to \quad f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_x f')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy} f')}{F_y^2}$$

Svolti i conti si ottiene quindi

$$f''(0) = -\frac{1}{2}$$

Ne segue pertanto

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

Riferendosi alla linea E_0 disegnata, numericamente, con *Mathematica*, vedi Figura 3, si riconosce

– che in un intorno del punto $(0,1)$ effettivamente la linea di livello E_0 si presenti come il grafico di una funzione $y = f(x)$,
– come la parabola rivolta verso il basso $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ sia una buona approssimazione della linea di livello E_0 in un intorno di $(0,1)$.

2.3. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$F(x,y,z) = \sin(xy)\cos(z) + 3e^{x+y}z - 1$$

- *verificare che l'equazione* $F(x,y,z) = 0$ *soddisfa nel punto* $(0,0,1/3)$ *le condizioni del teorema di Dini,*
- *determinare l'equazione del piano tangente alla superficie definita dall'equazione* $F(x,y,z) = 0$ *in* $(0,0,1/3)$.

SOLUZIONE:

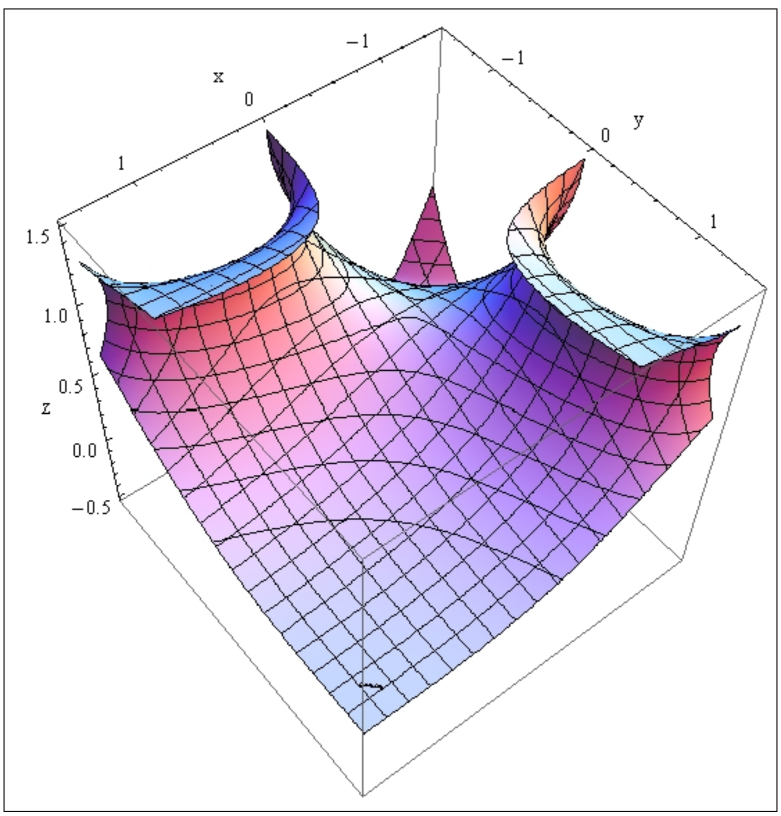

FIGURA 4. $\sin(xy)\cos(z) + 3e^{x+y}z = 1$

Tenuto conto che $F(x,y,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, che $F(0,0,1/3) = 0$ e che

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{cases} y\cos(xy)\cos(z) + 3e^{x+y}z \\ x\cos(xy)\cos(z) + 3e^{x+y}z \\ -\sin(xy)\sin(z) + 3e^{x+y} \end{cases} \quad \to \quad \nabla F(0,0,1/3) = \{1,1,3\} \neq 0$$

risultano soddisfatte, nel punto $(0,0,1/3)$ le condizioni del Dini.
L'equazione del piano tangente in $(0,0,1/3)$ é pertanto

$$F_x(0,0,1/3)(x-0) + F_y(0,0,1/3)(y-0) + F_z(0,0,1/3)(z-1/3) = 0$$

cioé

$$x + y + 3(z - 1/3) = 0$$

2.4. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$F(x,y,z) = z^2 y + x e^{zy} + \cos \pi x$$

dimostrare che in un intorno di $(1,0,0)$ l'equazione $F(x,y,z) = 0$ coincide con il grafico di $x = f(y,z)$ e determinare il piano tangente alla superficie nel punto.

SOLUZIONE:

Tenuto conto che $F(x,y,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e che

$$F(1,0,0) = 0, \quad \nabla F(1,0,0) = \{1,0,0\}$$

la superficie di livello $F(x,y,z) = 0$ coincide, in un intorno di $(1,0,0)$, per il teorema di Dini con il grafico di una funzione

$$x = f(y,z)$$

Il piano tangente alla superficie di livello in $(1,0,0)$ ha pertanto equazione

$$F_x(1,0,0)(x-1) + F_y(1,0,0)(y-0) + F_z(1,0,0)(z-0) = 0$$

cioé

$$x - 1 = 0$$

2.5. Esercizio. *Dimostrare che nell'intorno di $(x,y) = (0,0)$ esiste una funzione f di classe C^1 che si annulla in $(0,0)$ e verifica l'equazione $x + y + f(x,y) = \sin[xyf(x,y)]$.*

SOLUZIONE:

Si applica il Teorema di Dini alla funzione di *tre* variabili

$$F(x,y,z) = xyz - \sin(xyz)$$

che in $(0,0,0)$ si annulla, mentre la sua derivata

$$F_z(x,y,z) = 1 - xy\cos(xyz) \quad \to \quad F_z(0,0,0) = 1$$

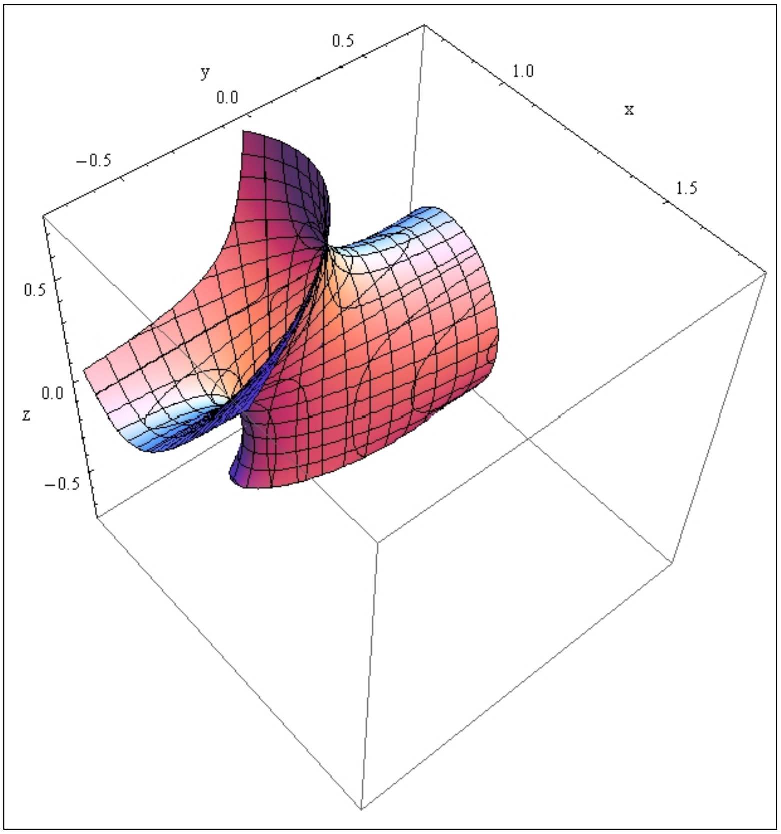

FIGURA 5. La superficie $z^2y + xe^{zy} + \cos\pi x = 0$

La superficie di livello 0 determinata cioé dall'equazione $F(x, y, z) = 0$ coincide con il grafico $z = f(x, y)$ di una funzione di classe C^1 in un intorno di $(0, 0)$, nulla in $(0, 0)$, funzione che quindi in tale intorno verifica l'equazione

$$x + y + f(x, y) = \sin[xyf(x, y)]$$

2.6. Esercizio. *Far vedere che esiste un intorno tridimensionale aperto A dell'origine in cui l'equazione*

$$F(x, y, z) = e^z + (x^2 - y^2)z - (1 + xy)e^{\sin(x^2+y^2)} = 0$$

definisce implicitamente una funzione $f(x, y)$ di classe C^∞.

SOLUZIONE:

Siccome $F(0, 0, 0) = 0$ e $F_z(0, 0, 0) = 1$, il Teorema di Dini fornisce l'esistenza dell'intorno A e della funzione implicita $f \in C^1(A)$, nonché l'espressione delle derivate parziali di f in A:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\dfrac{F_x(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))} \\ \\ f_y(x,y) = -\dfrac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\dfrac{2xf(x,y) - e^{\sin(x^2+y^2)}[y + 2x(1-xy)\cos(x^2+t^2)]}{e^{f(x,y)} + x^2 - y^2}, \\ \\ f_y(x,y) = -\dfrac{-2yf(x,y) - e^{\sin(x^2+y^2)}[x + 2y(1-xy)\cos(x^2+t^2)]}{e^{f(x,y)} + x^2 - y^2} \end{cases}$$

Da queste ultime due espressioni si vede che f_x e f_y coincidono, vedi secondi membri, con funzioni derivabili: ma allora anche f_x e f_y sono derivabili, per cui f è C^2, e cosí via, iterando espressioni analoghe si riconosce che allora, di conseguenza f riesce C^3, C^4, ... e cosí via.