ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

28 gennaio 2011

9.1. Esercizio. *Assegnato il campo vettoriale di tipo radiale* $\overrightarrow{E} = \Phi(r)\,\{x,\, y,\, z\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *e* $\Phi(r) \in C^1(\mathbb{R})$

- *calcolare il flusso uscente dalla superficie sferica* Σ_R *di centro l'origine e raggio* R*,*
- *calcolare* $\boldsymbol{\mathtt{div}}(E)$
- *verificare, calcolando l'integrale triplo*

$$\iiint_{B_R} \boldsymbol{\mathtt{div}}(E)\, dx\, dy\, dz \quad B_R : x^2+y^2+z^2 \leq R^2$$

la validitá del teorema della divergenza.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto presente che il versore normale esterno alla superficie sferica Σ_R é

$$\nu = \frac{1}{R}\{x,\, y,\, z\}$$

riesce, su Σ_R

$$\overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\nu} = \Phi(R)\left\{\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R}+\frac{z^2}{R}\right\} = R\,\Phi(R)$$

da cui

$$\iint_{\Sigma_R} \overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = R\,\Phi(R)\iint_{\Sigma_R} d\sigma = 4\,\pi\, R^3\,\Phi(R)$$

Tenuto presente che

$$\mathtt{div}(E) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(r)\,x + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(r)\,y + \frac{\partial}{\partial z}\Phi(r)\,z = 3\Phi(r) + r\,\Phi'(r)$$

riesce, servendosi delle coordinate polari sferiche

$$\iiint_{B_R} \mathtt{div}(E)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin(\psi)\, d\psi \int_0^R (3\Phi(r) + r\,\Phi'(r))\, r^2 dr =$$

$$4\pi \int_0^R \left(3\, r^2\,\Phi(r) + r^3\,\Phi'(r)\right)\, dr = 4\pi r^3 \Phi(r)\Big|_0^R = 4\pi R^3 \Phi(R)$$

I due valori naturalmente coincidono confermando la validitá del teorema della divergenza.

9.2. Esercizio. *Detta Σ la superficie cartesiana*

$$z = 3x^2 + 5y^2, \qquad (x, y) \in \Omega : \; x^2 + y^2 \leq 1$$

e detto $\mathcal{B}(\Sigma)$ il suo bordo, curva che supponiamo orientata nel verso antiorario,

- *calcolare la circuitazione*
$$\int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$
essendo $\overrightarrow{E} = \{y^2, 0, 0\}$ e $\overrightarrow{\tau}$ il versore tangente a $\mathcal{B}(\Sigma)$,
- *calcolare il rot$(\overrightarrow{E})$*
- *calcolare il flusso*
$$\iint_{\Sigma} rot(\overrightarrow{E}) \,.\, \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$
essendo $\overrightarrow{\nu}$ il versore normale a Σ orientato verso l'alto.

SOLUZIONE:

La curva $\mathcal{B}(\Sigma)$, vedi Figura 1, ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos(\vartheta) \\ y = \sin(\vartheta) \\ z = 3\cos^2(\vartheta) + 5\sin^2(\vartheta) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x' = -\sin(\vartheta) \\ y' = \cos(\vartheta) \\ z' = 4\cos(\vartheta)\,\sin(\vartheta) \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

Riesce pertanto

$$\int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} \sin^2(\vartheta)\,(-\sin(\vartheta))\; d\vartheta = 0$$

Il calcolo del rotore, condotto con il solito determinante formale, produce

$$\text{rot}\,(\overrightarrow{E}) = \{0,\, 0,\, -2y\}$$

mentre il calcolo del versore normale produce, come in tutte le superfici cartesiane $z = f(x, y)$

$$\overrightarrow{\nu} = \pm\frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}\,\{f_x,\, f_y,\, -1\} = \pm\frac{1}{\sqrt{36\,x^2 + 100\,y^2 + 1}}\,\{6\,x,\, 10\,y,\, -1\}$$

La percorrenza del bordo della superficie cartesiana $\Sigma : \; z = 3x^2 + 5y^2$ nel verso antiorario implica la scelta dell'orientamento del versore normale verso l'alto, quindi

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{36\,x^2 + 100\,y^2 + 1}}\,\{-6\,x,\, -10\,y,\, 1\}$$

L'integrale superficiale richiesto diviene pertanto

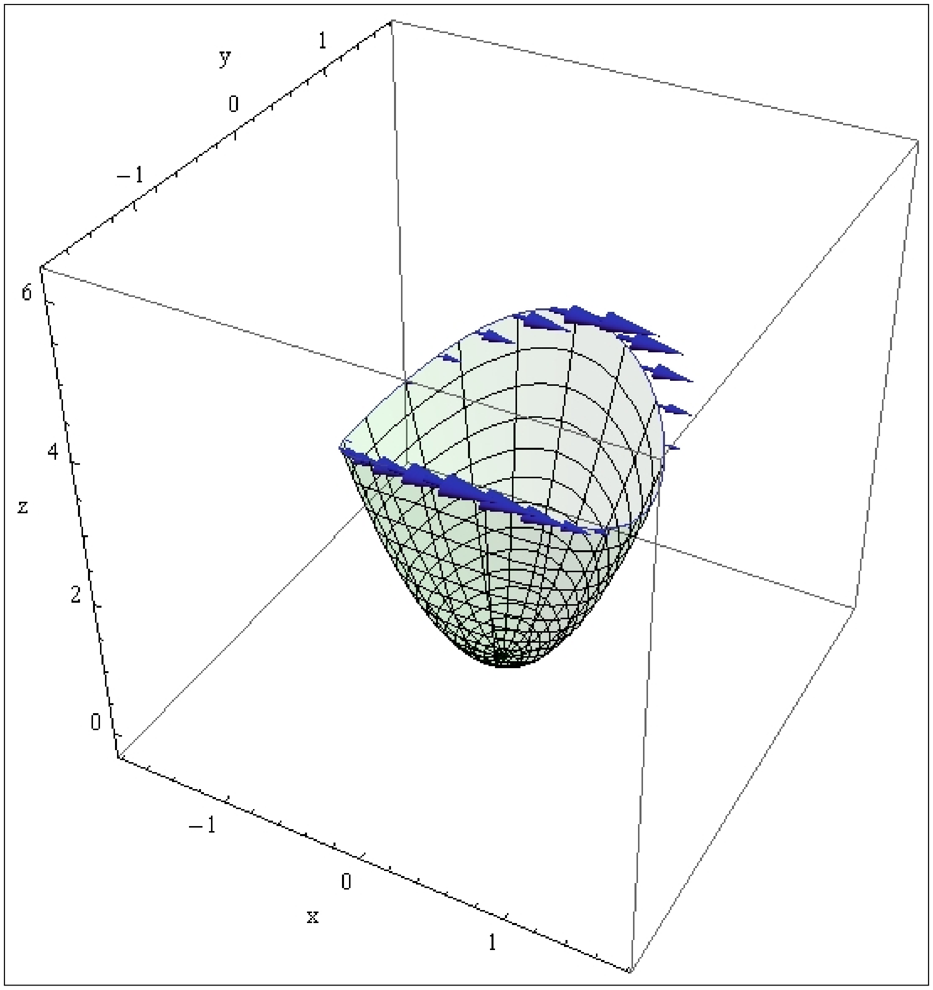

FIGURA 1. $\int_{\mathcal{B}(\Sigma)} E \,.\, \tau \, ds$

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\,(\overrightarrow{E})\,.\,\overrightarrow{\nu}\,d\sigma = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (-2y)\,dx\,dy = 0$$

risultato evidente stante la simmetria del dominio di integrazione rispetto all'origine e il carattere dispari della funzione integranda.

9.3. Esercizio. *Assegnata la funzione* $f(x, y, z) = x^2 - z^2$

- *calcolare la derivata normale* $\dfrac{df}{d\overrightarrow{\nu}}$ *sulla sfera* $\Sigma:\ x^2+y^2+z^2 = 1$ *secondo la direzione della normale esterna*
- *calcolare l'integrale superficiale* $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{df}{d\overrightarrow{\nu}}\, d\sigma$

- *calcolare, servendosi del teorema della divergenza, l'integrale superficiale* $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \frac{df}{d\overrightarrow{\nu}}\, d\sigma$ *essendo* $\mathcal{S}$ *la superficie sferica di centro il punto* $C = (1, 2, 3)$ *e raggio* $r = 2$ *e, al solito,* $\overrightarrow{\nu}$ *il versore normale esterno.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le derivate di funzioni f di due o piú variabili, relative ad una direzione assegnata mediante il corrispondente versore $\overrightarrow{v}$, si calcolano (se la funzione f é almeno di classe C^1) con la formula

$$\frac{df}{dv} = \overrightarrow{\nabla f} \, . \, \overrightarrow{v}$$

essendo il gradiente $\overrightarrow{\nabla f}$ calcolato nel punto in cui tale derivata direzionale é richiesta.
Pertanto tenuto conto che

- la direzione assegnata é quella della normale esterna alla superficie $\nu = \{x, y, z\}$,
- i punti su cui la derivata é richiesta sono quelli della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
- il gradiente di f é $\overrightarrow{\nabla f} = \{2x,\ 0,\ -2z\}$

si ha, in ciascuno di tali punti,

$$\frac{df}{d\overrightarrow{\nu}} = 2x^2 - 2z^2$$

Ne segue che

$$\iint_{\Sigma} \frac{df}{d\overrightarrow{\nu}}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (2x^2 - 2z^2)\, d\sigma =$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\psi \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(\psi)\cos^2(\vartheta) - \cos^2(\psi)\right)\sin(\psi)d\vartheta =$$

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin^3(\psi)d\psi - 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2(\psi)\sin(\psi)\, d\psi = 0$$

come si riconosce facilmente.
Il teorema della divergenza permette comunque di riconoscere che

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{df}{d\overrightarrow{\nu}}\, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla f} \, . \, \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iiint_{B} \mathtt{div}(\overrightarrow{\nabla f})dxdydz$$

Tenuto conto che

$$\mathtt{div}(\overrightarrow{\nabla f}) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \triangle f = 0$$

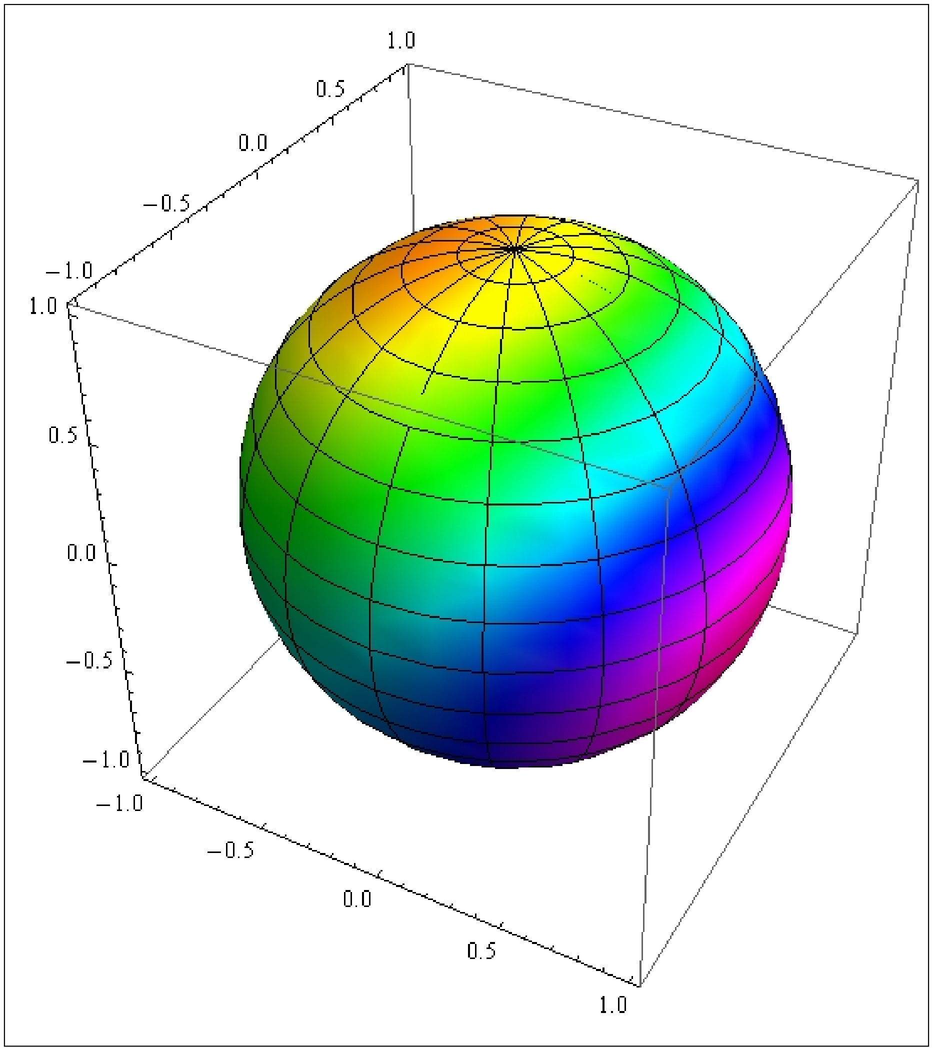

Figura 2. Il colore della $\frac{df}{d\nu}$ sulla sfera

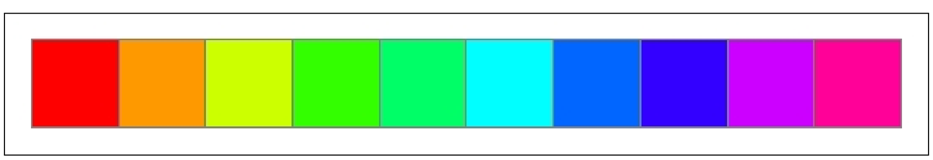

Figura 3. La scala cromatica per $-\frac{1}{2} \leq \frac{df}{d\nu} \leq \frac{1}{2}$

si riconosce, come precedentemente calcolato esplicitamente, che

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{df}{d\overrightarrow{\nu}}\, d\sigma = 0$$

É evidente che, con lo stesso uso del teorema della divergenza, si riconosce che anche l'integrale superficiale esteso alla sfera di centro $(1,2,3)$ vale zero.

.

9.4. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti* $y' + (3-5i)\,y = e^{3t}\cos(5t)$

- *trovare tutte le soluzioni* $y(t)$*,*
- *dimostrare che tutte le soluzioni* $y(t)$ *verificano la relazione* $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le soluzioni delle equazioni lineari a coefficienti costanti $y' + ay = f(t)$ sono espresse da

$$y(t) = e^{-at}\left\{c + \int_0^t e^{as} f(s)ds\right\} \qquad \forall c \in \mathcal{C}$$

quindi, nel caso assegnato,

$$y(t) = e^{-(3-5i)t}\left\{c + \int_0^t e^{(3-5i)s}e^{3s}\cos(5s)ds\right\}$$

L'espressione euleriana

$$\cos(5s) = \frac{1}{2}\left\{e^{5is} + e^{-5is}\right\}$$

agevola il calcolo dell'integrale presente nella formula precedente

$$\int_0^t e^{(3-5i)s}e^{3s}\cos(5s)ds = \frac{1}{2}\left\{\int_0^t e^{6s}ds + \int_0^t e^{(6-10\,i)s}ds\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{6\,t}-1}{6} + \frac{e^{(6-10\,i)t}-1}{6-10\,i}\right\}$$

Le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

$$y(t) = e^{-(3-5i)t}\left\{c + \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{6\,t}-1}{6} + \frac{e^{(6-10\,i)t}-1}{6-10\,i}\right\}\right\} =$$

$$c\,e^{-(3-5i)t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{(3+5i)\,t} - e^{-(3-5i)t}}{6} + \frac{e^{(3-5i\,i)t} - e^{-(3-5i)t}}{6-10\,i}\right\} =$$

$$= k\,e^{-(3-5i)t} + \frac{e^{3t}}{2}\left\{\frac{e^{5i\,t}}{6} + \frac{e^{-5i\,t}}{6-10\,i}\right\}$$

Servendosi ancora delle espressioni euleriane

$$e^{5it} = \cos(5t) + i\sin(5t), \qquad e^{-5it} = \cos(5t) - i\sin(5t)$$

si ottiene

$$y(t) = k\, e^{-(3-5i)t} + \frac{e^{3t}}{2} \left\{ \frac{\cos(5t) + i\sin(5t)}{6} + \frac{\cos(5t) - i\sin(5t)}{6 - 10\, i} \right\}$$

da cui anche

$$y(t) = k\, e^{-(3-5i)t} + e^{3t} \left\{ \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6-10i} \right) \cos(5t) + i \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6-10i} \right) \sin(5t) \right\}$$

Si riconosce nella formula precedente la struttura generale delle soluzioni delle equazioni lineari di primo ordine

$$y(t) = k\, y_0(t) + \overline{y}(t)$$

dove

- $y_0(t)$ é soluzione dell'equazione omogenea, e k una costante qualsiasi,
- $\overline{y}(t)$ é una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'espressione della

$$\overline{y}(t) = e^{3t} \{ A\cos(5t) + B\sin(5t) \}$$

con

$$A = \frac{1}{12} + \frac{1}{6-10i}, \quad B = i \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6-10i} \right)$$

non é casuale: si incontrano tali espressioni ogni volta che il termine noto sia della forma

$$e^{3t} \{ \alpha\cos(5t) + \beta\sin(5t) \}$$

Osservazione 9.1. *Indicate con $y(t) = u(t) + iv(t)$ l'equazione assegnata equivale al seguente sistema*

$$u' + iv' + (3-5i)(u+iv) = e^{3t}\cos(5t) \Leftrightarrow \begin{cases} u' + 3u + 5v = e^{3t}\cos(5t) \\ v' - 5u + 3v = 0 \end{cases}$$

9.5. Esercizio. *Determinare per quali valori complessi a le soluzioni dell'equazione $y' + ay = 5\,\sin(2t)$ sono tutte limitate.*

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione sono tutte espresse da

$$y(t) = c\, e^{-at} + 5 \int_0^t e^{a(s-t)} \sin(2s)\, ds$$

$\boxed{a \neq 2i}$

Tenuto presente che, per $a \neq 2i$ riesce

$$\int_0^t e^{a(s-t)} \sin(2s)\, ds = \frac{2e^{-at} + a\sin(2t) - 2\cos(2t)}{a^2+4}$$

e quindi

$$y(t) = k\, e^{-at} + 5\, \frac{a\sin(2t) - 2\cos(2t)}{a^2+4}$$

si riconosce che le $y(t)$ sono limitate se e solo se é limitata la funzione complessa e^{-at}: tenuto conto che se $a = \alpha + i\beta$ riesce

$$|e^{-at}| = e^{\alpha t}$$

si riconosce che e^{-at} é limitata in modulo se e solo se $a = i\beta$, cioé se ha parte reale nulla.

$\boxed{a = 2i}$

Nel caso $a = 2i$ le soluzioni diventano

$$y(t) = k\, e^{-2it} - \frac{5}{8} e^{2it} + \frac{5}{2} i e^{-2it} t$$

I primi due addendi sono limitati in modulo, mentre non lo é l'ultimo: si tratta di un fenomeno che si incontra, generalmente per equazioni del secondo ordine, e al quale si da il nome di *risonanza*.

9.6. Esercizio. *Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due numeri reali*

- *dimostrare che le combinazioni lineari $y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $|C_1| + |C_2| > 0$ non possono annullarsi più di una volta,*
- *far vedere, con qualche esempio, che l'affermazione precedente non è più vera se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono complessi.*

Soluzione:

Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due numeri reali, posto

$$y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$$

sia $C_1 \neq 0$, riesce

$$y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} \left\{ 1 + \frac{C_2}{C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right\}$$

Tenuto presente che il primo fattore é sempre diverso da zero, gli unici zeri di $y(t)$ sono gli (eventuali) zeri del secondo fattore:

$$\frac{C_2}{C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = -1$$

La monotonia della $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ implica che non ci puó essere piú di uno zero.

Diversamente vanno le cose se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono complessi: scelti ad esempio

$$\lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = i$$

si ha presi $C_1 = C_2 = 1$

$$e^{-it} + e^{it} = 2\cos(t)$$

funzione che si annulla innumerevoli volte !

9.7. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine*

$$y'' + y' - y = f(t)$$

rispettivamente nei casi di $f(t)$ *uguale a* $t,\ \sin(t),\ t\,.\,e^{4t}$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono, come ben noto,

$$y_0(t) = c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)t}$$

essendo infatti

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

le due radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa assegnata sono $y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$ essendo $\overline{y}(t)$ una soluzione dell'equazione completa.

$\boxed{f(t) = t}$

Cerchiamo direttamente una soluzione dell'equazione completa nella forma $\overline{y}(t) = At + C$ determinando opportunamente A, C:

$$A - At - C = t \quad \to \quad \begin{cases} A - C = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \quad \to \quad \overline{y}(t) = -t - 1$$

$\boxed{f(t) = \sin(t)}$

Cerchiamo direttamente una soluzione dell'equazione completa nella forma $\overline{y}(t) = A\cos(t) + C\sin(t)$ determinando opportunamente A, C:

$$\cos(t)(-2A+C)+\sin(t)(-A-2C) = \sin(t) \quad \to \quad \begin{cases} -2A + C = 0 \\ -A - 2C = 1 \end{cases} \quad \to$$

$$\overline{y}(t) = -\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t)$$

$\boxed{f(t) = t\,.\,e^{4t}}$

Cerchiamo direttamente una soluzione dell'equazione completa nella forma $\overline{y}(t) = (At + C)\,.\,e^{4t}$ determinando opportunamente A, C:

$$19e^{4t}(At+C)+9Ae^{4t} = t\,.\,e^{4t} \Leftrightarrow 19(At+C)+9A = t \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{19} \\ C = -\frac{9}{361} \end{cases}$$

$$\overline{y}(t) = (\frac{1}{19}t - \frac{9}{361})\,.\,e^{4t}$$

9.8. Esercizio. *Sia* $\overrightarrow{E} = \{y,\, 2z,\, 3x\}$

- *calcolare* $\oint_{\mathcal{C}_0} \overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\tau}\,ds$ *essendo* $\mathcal{C}_0$ *la circonferenza* $x^2+y^2 = 1$ *del piano* $z = 0$ *e* $\overrightarrow{\tau}$ *il versore tangente orientato nel verso antiorario,*
- *calcolare* $\oint_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\tau}\,ds$ *essendo* $\mathcal{C}_1$ *la curva* $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = \sin(t) + 1$, $\quad t \in [0, 2\pi]$ *e* $\overrightarrow{\tau}$ *il versore tangente orientato nel verso antiorario,*
- *calcolare l'integrale superficiale* $\iint_{\mathcal{S}} rot(\overrightarrow{E})\,.\,\overrightarrow{\nu}\,d\sigma$ *essendo* $\mathcal{S}$ *la superficie parametrica*
  $x = \cos(t), y = \sin(t), z = u(\sin(t)+1), \quad t \in [0, 2\pi],\ u \in [0, 1]$ *e* $\overrightarrow{\nu}$ *il versore normale alla superficie tale che* $\overrightarrow{\nu}(1, 0, 0) = \{1, 0, 0\}$.
- *esaminare, servendosi della formula di Stokes, i legami che intercorrono tra i tre valori trovati.*

SOLUZIONE:

Le equazioni parametriche della circonferenza sono, per $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x'(t) = -\sin(t) \\ y'(t) = \cos(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\tau}\,ds = \int_0^{2\pi} \{y(t)x'(t) + 2z(t)y'(t) + 3x(t)z'(t)\}\,dt = -\pi$$

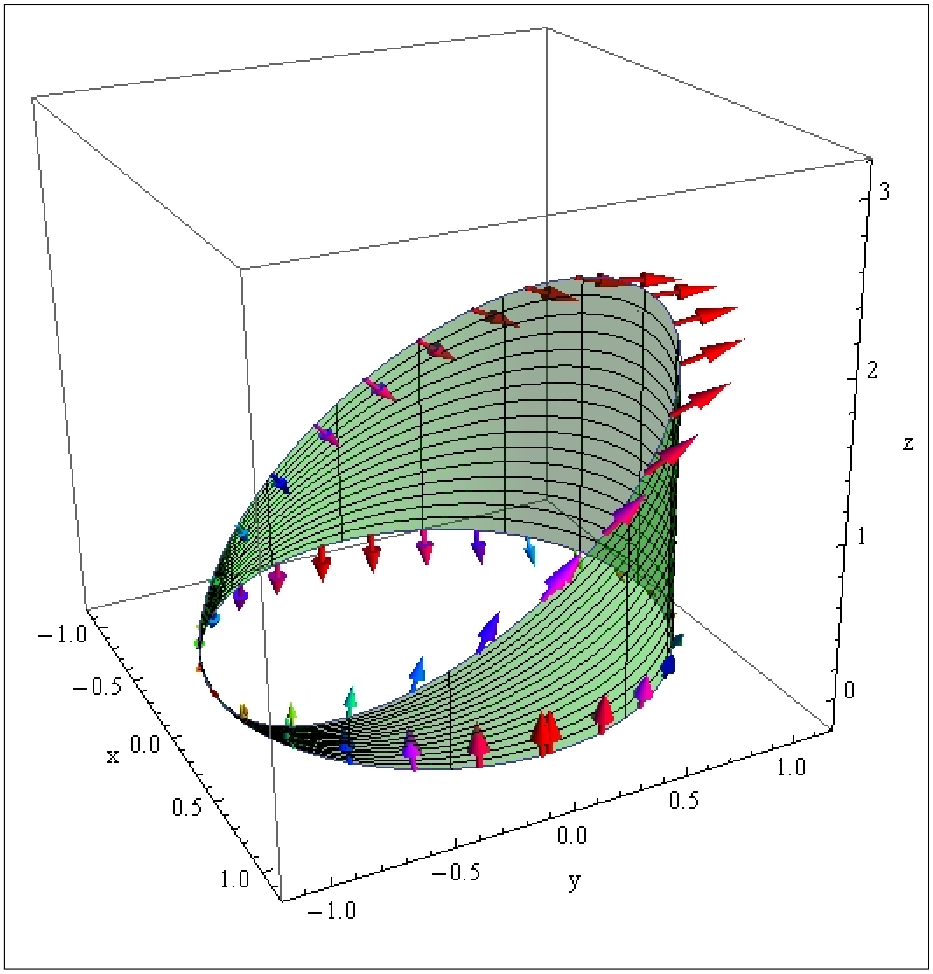

Figura 4. La superficie e il campo E sulle due curve.

La seconda curva ha equazioni parametriche, sempre per $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \sin(t) + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x'(t) = -\sin(t) \\ y'(t) = \cos(t) \\ z'(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Riesce pertanto

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{E} \, . \, \overrightarrow{\tau} \, ds = \int_0^{2\pi} \left\{ -\sin^2(t) + 2\,(\sin(t) + 1)\cos(t) + 3\,\cos^2(t) \right\} dt = 2\pi$$

Eseguito il semplice calcolo si ottiene

$$\mathrm{rot}\,(E) = \{-2,\ -3,\ 0\}$$

Tenuto conto che la superficie assegnata, una porzione di cilindro verticale ha in ogni punto (x, y, z) il versore normale ν orizzontale, cioé

$$\nu = \{x,\, y,\, 0\}$$

si riconosce che

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,(\overrightarrow{E})\,.\,\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} (-2x - 3y)\, d\sigma$$

Tenuto conto che

$$d\sigma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} dudt = (\sin(t) + 1)dudt$$

si ha

$$\iint_{\mathcal{S}} (-2x - 3y)\, d\sigma = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} (-2\cos(t) - 3\sin(t))(\sin(t) + 1)dt = -3\pi$$

Legame con la formula di Stokes:
la circonferenza $\mathcal{C}_0$ e la curva $\mathcal{C}_1$ costituiscono il bordo $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ della superficie $\mathcal{S}$: quindi, per la formula di Stokes,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,(\overrightarrow{E})\,.\,\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \int_{\mathcal{B}(\mathcal{S})} E\,.\,\tau ds$$

Tenuto presente che la formula di Stokes prevede di orientare il bordo in modo da avere la superficie sulla propria sinistra, si capisce che

- la circonferenza $\mathcal{C}_0$ dovrá essere orientata, come infatti é stato, nel verso antiorario,
- la curva $\mathcal{C}_1$ dovrá essere orientata, contrariamente a quanto é stato fatto, nel verso orario.

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,(\overrightarrow{E})\,.\,\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \oint_{\mathcal{C}_0} \overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\tau}\, ds - \oint_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{\tau}\, ds$$

Il valore -3π del flusso del rotore attraverso la $\mathcal{S}$ torna...

9.9. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine* $y'' + p\,y' + q\,y = \sin(\omega\,t)$, $p > 0,\ q > 0,\ \omega > 0$ *e provare che si tratta di funzioni* $y(t)$ *limitate.*

SOLUZIONE:

Le soluzioni $y_0(t)$ dell'equazione omogenea $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ sono determinate dalle radici λ_1 e λ_2 dell'equazione $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$:

$$y_0(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & se \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t\, e^{\lambda_1 t} & se \quad \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Le condizioni poste sui parametri p, q di essere positivi implica che le due radici hanno, in ogni caso, parte reale negativa: quindi le soluzioni $y_0(t)$ trovate sono limitate per $t \geq 0$.

Una soluzione dell'equazione completa si esprime come

$$\overline{y}(t) = A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)$$

Sostituendo si ottiene

$$\sin(t\omega)\left(B\left(q-\omega^2\right) - Ap\omega\right) + \cos(t\omega)\left(A\left(q-\omega^2\right) + Bp\omega\right) = \sin(\omega t)$$

da cui segue, per soddisfare l'uguaglianza,

$$\begin{cases} B\,(q-\omega^2) - Ap\omega = 1 \\ Bp\omega + A\,(q-\omega^2) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{-p\omega}{(p\omega)^2 + (q-\omega^2)^2} \\ \\ B = \dfrac{q-\omega^2}{(p\omega)^2 + (q-\omega^2)^2} \end{cases}$$

Da cui

$$(1) \qquad \overline{y}(t) = \frac{1}{(p\omega)^2 + (q-\omega^2)^2}\left\{-p\omega\,\cos(\omega t) + (q-\omega^2)\sin(\omega t)\right\}$$

$\boxed{\textbf{Riassumendo:}}$

Le soluzioni dell'equazione si presentano sotto tre forme diverse a seconda del segno del discriminante $p^2 - 4q$ dell'equazione caratteristica:

$\boxed{p^2 - 4q < 0}$

Le radici sono della forma $\lambda_1 = -\varepsilon^2 + i\omega_0, \quad \lambda_2 = -\varepsilon^2 - i\omega_0$ avendo posto

$$\varepsilon^2 = p/2, \quad \omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

Le soluzioni sono pertanto rappresentabili come

$$y(t) = e^{-\varepsilon^2 t}\left\{c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)\right\} + \overline{y}(t)$$

Tenuto conto che il primo addendo si smorza al crescere di t per via del fattore $e^{-\varepsilon^2 t}$ si riconosce che

$$t >> 0 \quad \rightarrow \quad y(t) \approx \overline{y}(t)$$

$\boxed{p^2 - 4q = 0}$

Le radici sono della forma $\lambda_1 = \lambda_2 = -\varepsilon^2$
Le soluzioni sono pertanto rappresentabili come

$$y(t) = e^{-\varepsilon^2 t}\left\{c_1 + c_2\,t\right\} + \overline{y}(t)$$

Anche in questo caso si riconosce che

$$t >> 0 \quad \rightarrow \quad y(t) \approx \overline{y}(t)$$

$\boxed{p^2 - 4q > 0}$

Le radici sono della forma $\lambda_1 = -\sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2$: le soluzioni sono pertanto rappresentabili come

$$y(t) = c_1\, e^{-\sigma_1^2 t} + c_2\, e^{-\sigma_2^2 t} + \overline{y}(t)$$

Anche in questo caso si riconosce che

$$t >> 0 \quad \to \quad y(t) \approx \overline{y}(t)$$

In tutti e tre i casi osservati tutte le soluzioni $y(t)$ sono funzioni limitate.

Osservazione 9.2. *Le condizioni poste sui parametri* p, q *di essere positivi corrisponde alla interpretazione meccanica:*

- $p\,y'$: *attrito (frenante) proporzionale alla velocitá,*
- $q\,y$: *richiamo elastico,*
- $p^2 - 4q < 0$: *oscillazioni smorzate,*
- $p^2 - 4q \geq 0$: *assenza di oscillazioni.*

Si osservi che il celebrato fenomeno della risonanza, compresi i suoi mitici devastanti effetti, non si realizza in presenza di attrito, cioé se $p > 0$*: soluzioni oscillanti di ampiezza crescente in modo illimitato si hanno solo per equazioni* $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega t)$.