FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI
ex 2006-2007

Soluzioni Esame scritto

luglio 2009

3.1. Esercizio.
Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{e}{4x^2+9y^2}\right)$$

- *determinare l'insieme di definizione di f e le curve di livello relative ai valori* 1, -1, -2
- *calcolare il gradiente di f,*
- *calcolare gli estremi inferiore e superiore di f nell'insieme*

$$\Omega: \ 1 \leq 4x^2+9y^2 \ \leq \ e,$$

e dire se si tratta di minimo e massimo.

SOLUZIONE:

La funzione log é definita su $\mathbb{R}_+$ quindi, tenuto conto che

$$\frac{e}{4x^2+9y^2}$$

é definita per $(x,y) \neq (0,0)$ e produce solo valori positivi, l'insieme richiesto é $\mathbb{R} - (0,0)$
Le curve di livello sono:

- $$\log\left(\frac{e}{4x^2+9y^2}\right) = 1 \quad \to \quad \frac{e}{4x^2+9y^2} = e \quad \to \quad 4x^2+9y^2 = 1$$

  ellisse di centro l'origine e semiassi $1/2$ e $1/3$.
- $$\log\left(\frac{e}{4x^2+9y^2}\right) = -1 \quad \to \quad \frac{e}{4x^2+9y^2} = e^{-1} \quad \to \quad 4x^2+9y^2 = e^2$$

  ellisse di centro l'origine e semiassi $e/2$ e $e/3$
- $$\log\left(\frac{e}{4x^2+9y^2}\right) = -2 \quad \to \quad \frac{e}{4x^2+9y^2} = e^{-2} \quad \to \quad 4x^2+9y^2 = e^3$$

  ellisse di centro l'origine e semiassi $e^{3/2}/2$ e $e^{3/2}/3$

Per calcolare il gradiente puó essere utile ricordare che

$$f(x,y) = \log\left(\frac{e}{4x^2+9y^2}\right) = \log e - \log(4x^2+9y^2)$$

da cui segue, facilmente,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\dfrac{8x}{4x^2+9y^2} \\ f_y(x,y) = -\dfrac{18y}{4x^2+9y^2} \end{cases}$$

La funzione $\log(t)$ é monotona, quindi i suoi estremi al variare di $t \in [a,b]$ sono $\log(a),\ \log(b)$: pertanto

$$1 \le 4x^2+9y^2 \ \le\ e \quad \to \quad \log e - \log(e) \le \log e - \log(4x^2+9y^2) \le \log e - \log(1)$$

Gli estremi sono pertanto

$$\inf = 0, \quad \sup = 1$$

che risultano minimo e massimo di f nell'insieme chiuso e limitato Ω.

3.2. Esercizio. *Sia*

$$E := \left\{\frac{x^2}{3} + y^2 \le 1,\ \ 0 \le y \le |x|\right\}$$

- *disegnare l'insieme E e calcolarne l'area,*
- *calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_E |x|\, dx\, dy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

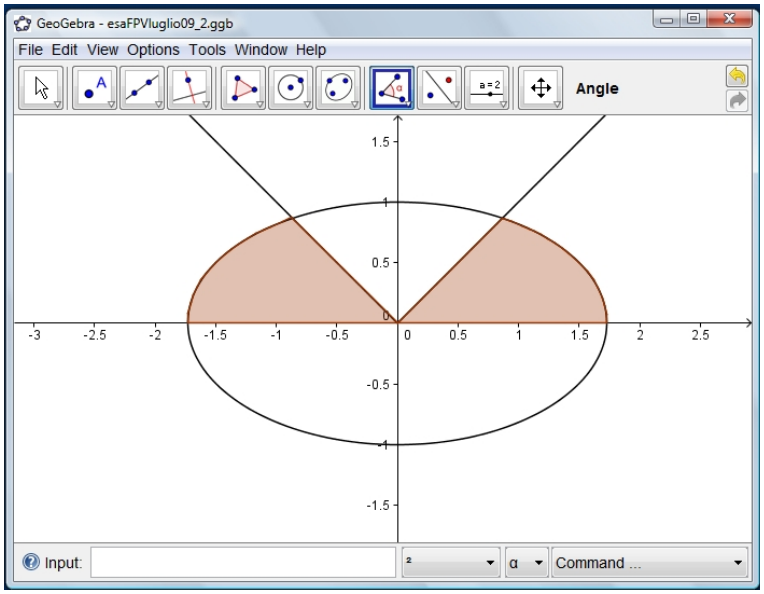

FIGURA 1. L'insieme E dell'Esercizio 2

Considerata la rappresentazione parametrica dell'ellisse

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos(\vartheta) \\ y = \sin(\vartheta) \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

e tenuto conto che

$$\vartheta = \pi/3 \quad \to \quad x = y$$

si riconosce che l'insieme E corrisponde a

$$\begin{cases} x = \rho\sqrt{3}\cos(\vartheta) \\ y = \rho\,\sin(\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le \pi/3 \end{cases}$$

con jacobiano $J = \sqrt{3}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$.
Ne segue pertanto

$$Area(E) = \iint_E dx\,dy = 2\int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{3}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Per quanto riguarda l'integrale doppio si ha analogamente

$$\iint_E |x|\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi/3} \cos(\vartheta)\,d\vartheta \int_0^1 3\rho^2\,d\rho = \sqrt{3}$$

3.3. Esercizio.
Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left\{3x^2 + 6y,\ -14yz,\ 20xz^2\right\}$$

- dire se $\overrightarrow{F}$ é conservativo,
- calcolare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento orientato da $O = (0,0,0)$, a $U = (1,1,1)$,
- detta Γ la curva di equazioni parametriche
$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3, \qquad 0 \le t \le 1$$
orientata nel verso delle t crescenti e $\overrightarrow{\tau}$ il versore tangente calcolare il lavoro
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}(x,y,z) \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

É facile riconoscere che $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ non é conservativo: basta infatti verificare che
$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6y) \ \neq \ \frac{\partial}{\partial x}(-14yz)$$
Lavoro lungo il segmento
$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\int_\mathcal{S} \overrightarrow{F}(x,y,z) \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 \left\{(3t^2 + 6t) + \ (-14t^2)\ + \ (20t^3)\right\}\, dt = \frac{13}{3}$$
Lavoro lungo Γ
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}(x,y,z) \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9) dt = 9$$