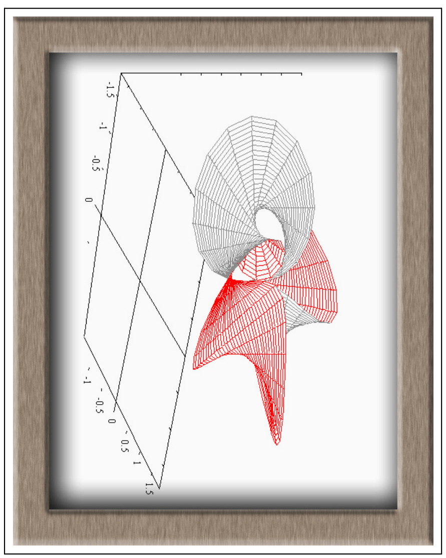
ANALISI VETTORIALE

2008-2009 (Esercizi, esoneri, esami)



prof. L.Lamberti
http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti

Esercizi del Corso di **Analisi Vettoriale**
Corso di Laurea In Fisica
anno accademico 2005-2006

Il disegno di copertina, un nastro di Möbius doppiamente ritorto, é stato realizzato con GnuPlot,

```
set parametric
set urange [ 0.00 : 6.28 ]
set vrange [ -0.50 : 0.50 ]
set xrange [ -1.80 : 1.80 ]
set yrange [ -1.80 : 1.80 ]
set zrange [ -1.50 : 1.50 ]
x(u,v) = (1 + 2*v*sin(2*u))*cos(u)
y(u,v) = (1 + 2*v*sin(2*u))*sin(u)
z(u,v) = 2*v*cos(2*u)
splot x(u,v), y(u,v), z(u,v)
```

Appunti rivisti con la collaborazione degli studenti del Corso di Analisi Vettoriale 2004

Eleonora Amici,
Rocchina Caivano,
Vittorio Campanella,
Arianna Carbone,
Dario Dell'Arciprete,
Gaia Donati,
Cristiano Fanelli,
Giorgio Ferrari,
Niccoló Loret,
Chiara Sabelli,
Filippo Guarnieri,
Natascia Vignaroli,
Alessandra Vittorini.

Ultima revisione 28 settembre 2008

Indice

Parte 1

Le esercitazioni 2003/2004

CAPITOLO 1

Le soluzioni del foglio 1

1. Esercizio

- *Giustificare l'affermazione seguente: l'equazione* $\sin(xy) = 0$ *non definisce implicitamente una funzione in un intorno di* $(0, 0)$.
- *Sia* $g : R^2 \to R$ *definita come segue:*

$$g(x, y) = xy + (y + 1)\sin x + y^2 \ .$$

Dire se l'equazione $g = 0$ *definisce implicitamente in un intorno di* $(0, 0)$ *una funzione* h *della variabile* x *e/o della variabile* y.
- *Dire se la funzione* h *ammette minimo o massimo relativo in zero.*

Soluzione 1

i In corrispondenza ad $x = 0$ tutto l'asse y é soluzione: quindi non é vero che (sia pur localmente) l'insieme delle soluzioni sia un grafico $y = f(x)$

Analogamente, in corrispondenza ad $y = 0$ tutto l'asse x é soluzione: quindi non é vero che (sia pur localmente) l'insieme delle soluzioni sia un grafico $x = g(y)$

L'insieme E formato dalle soluzioni dell'equazione $\sin(xy) = 0$ é composto

- dagli assi
- dalle infinite iperboli

$$xy = k\pi$$

ii

$$\begin{aligned} g_x &= y + (y + 1)\cos x \\ g_y &= x + \sin x + 2y \end{aligned}$$

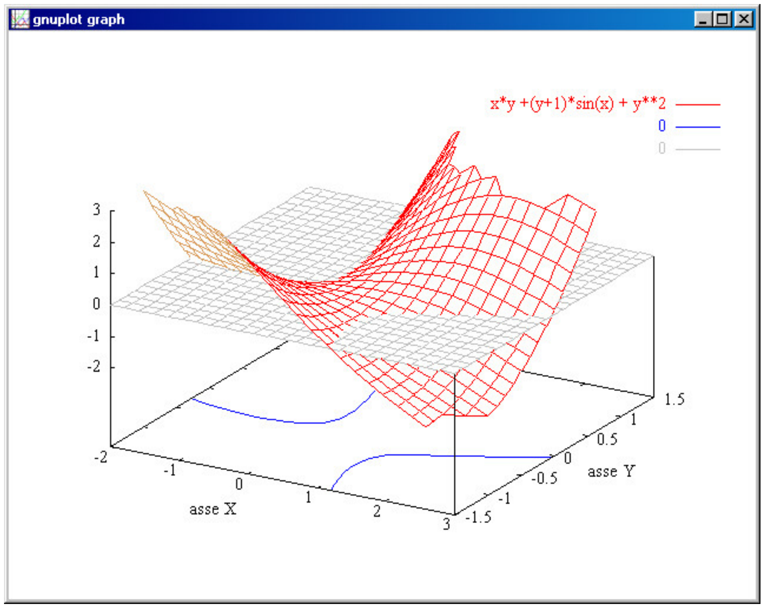


FIGURA 1. Il grafico di $g(x, y) = xy + (y + 1)\sin x + y^2$ il piano $z = 0$ e la linea di livello 0 per la $g(x, y)$.

Tenuto conto che $g_x(0, 0) = 1$ ne segue che l'insieme $g(x, y) = 0$ in un intorno dell'origine coincide con il grafico di una funzione $x = h(y)$ vedi Figura 1.

$\boxed{\text{iii}}$

Derivata prima:

$$g_x.h_y + g_y = (y + (y + 1)\cos h(y))h'(y) + x + \sin h(y) + 2y$$

Nel punto $(0, 0)$ riesce

$$g_x.h_y + g_y = h'(0) = 0$$

Derivata seconda:

$$g_{xx}h'^2 + g_{xy}h' + g_x h'' + g_{yx}h' + g_{yy}$$

Nel punto $(0, 0)$ riesce:

$$h''(0) + g_{yy}(0, 0) = 0 : \quad \to h''(0) = -g_{yy}(0, 0) = -2$$

Quindi:

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) < 0, \quad \to \quad \text{Massimo}$$

2. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = e^{x^2+2y} - y\cos x - 1 \ ,$$

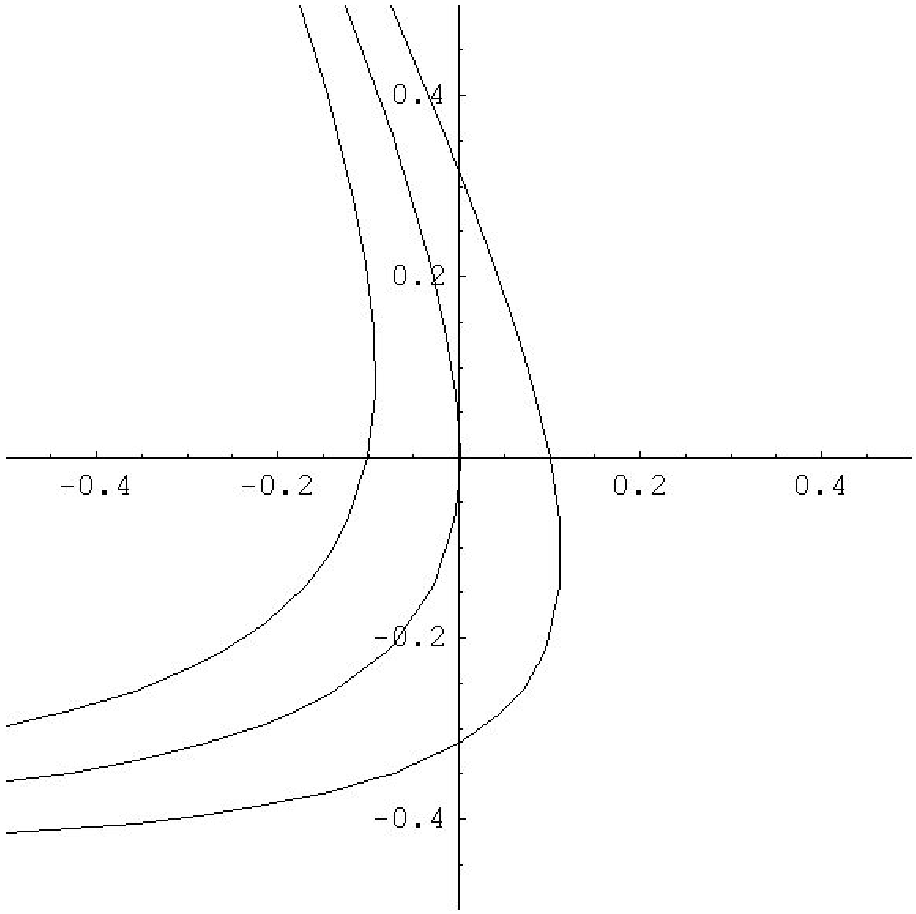


FIGURA 2. Esercizio 1: Tre linee di livello di $g(x, y)$: quella passante per l'origine é il grafico della funzione $x = h(y)$ con un massimo in $y = 0$

- *dimostrare che* $F(x, y) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $f(x)$ *;*
- *calcolare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \ .$$

Soluzione 2

i

$$F(0, 0) = 0$$

$$F_x = 2xe^{x^2+2y} + y \sin x, \quad F_y = 2e^{x^2+2y} - \cos x$$

$$F_x(0, 0) = 0, \ F_y(0, 0) = 1 \neq 0$$

La derivata F_y diversa da zero garantisce la $y = f(x)$

$\boxed{\text{ii}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

Si tratta del quoziente di due infinitesimi, il teorema di Hôpital consente di studiare il quoziente delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2+2y} + y\sin x}{(\cos x - 2e^{x^2+2y})2x}$$

ovvero, ponendo al posto di y la $f(x)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2+2f(x)} + f(x)\sin x}{(\cos x - 2e^{x^2+2f(x)})2x}$$

decomponendo la frazione si ottiene

$$\frac{e^{x^2+2f(x)}}{\cos x - 2e^{x^2+2f(x)}} + \frac{f(x)}{\cos x - 2e^{x^2+2f(x)}}\frac{\sin x}{2x}$$

Termini che, tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

tendono, per $x \to 0$, a

$$\frac{e^0}{1-2e^0} + \frac{0}{1-2e^0}\frac{1}{2} = -1$$

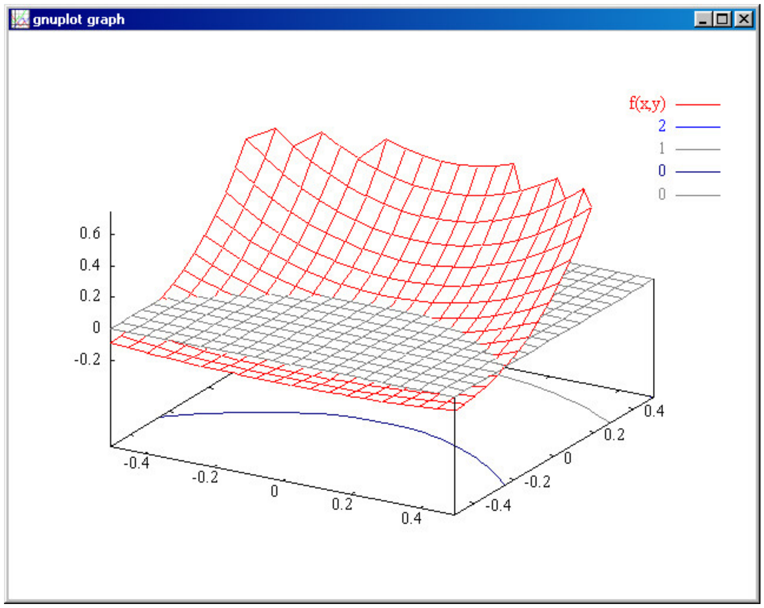


FIGURA 3. Il grafico di $F(x,y) = e^{x^2+2y} - y\cos x - 1$, e le linee di livell1 0, 1, 2

3. Esercizio

Assegnato il sistema

$$\begin{cases} e^y + z + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

dimostrare che in un intorno del punto (0,0,1) il sistema definisce implicitamente due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ tali che $(x, \alpha(x), \beta(x))$ siano soluzioni del sistema. Calcolare poi $\alpha'(0), \beta'(0)$.

$\boxed{\textbf{Soluzioni 3}}$

Il sistema assegnato produce l'intersezione tra il grafico

$$z = 2 - x - e^y$$

e la sfera

$$x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{5}{4}$$

$\boxed{\text{i}}$ Il punto $(0,0,1)$ soddisfa il sistema.
La matrice jacobiana

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} e^y & 1 \\ 2y+1 & 2z \end{pmatrix}$$

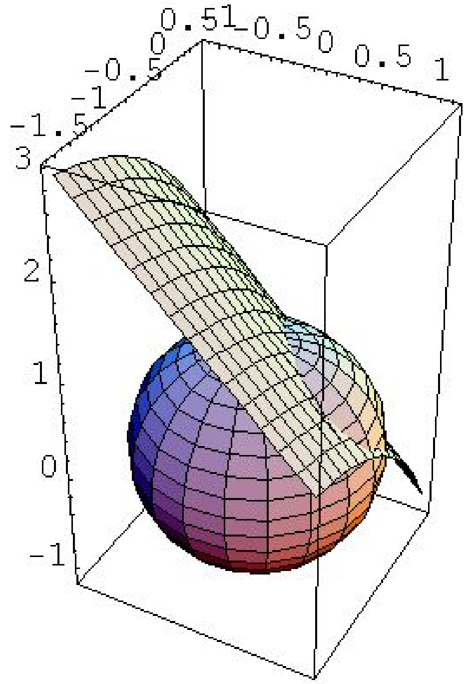


Figura 4. L'intersezione, la curva $(x, \alpha(x), \beta(x))$, determinata dal sistema dell'esercizio 3: una sfera e una superficie...

Nel punto $(0, 0, 1)$ riesce

$$\det \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Il determinante diverso da zero assicura che le soluzioni del sistema sono, in un intorno di $(0, 0, 1)$, rappresentate dalla curva di equazioni parametriche

$$x, \alpha(x), \beta(x))$$

$\boxed{\text{ii}}$ Le derivate nel punto $(0, 0, 1)$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} 1 & +\alpha'(0) & +\beta'(0) & = 0 \\ 0 & +\alpha'(0) & +2\beta'(0) & = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\alpha'(0) = -2, \quad \beta'(0) = 1$$

In un intorno del punto $(0, 0, 1)$ il sistema assegnato determina una curva che in tale punto ha tangente parallela al vettore

$$(1, \quad -2, \quad 1)$$

4. Esercizio

Sia

$$F(x,y,z) = x^2y + ze^{xy} + \cos(\pi z)\ ,$$

- *dimostrare che l'equazione* $F(x,y,z) = 0$ *definisce implicitamente una superficie* $z = f(x,y)$ *in un intorno del punto (0,0,1) ;*
- *determinare il piano tangente alla superficie nel punto (0,0,1).*

Soluzioni 4

i Il punto $(0,0,1)$ soddisfa l'equazione $F(x,y,z) = 0$

$$F_z = e^{xy} - \pi\sin(\pi z):\ \ F_z(0,0,1) = 1 \neq 0$$

quindi l'insieme degli zeri dell'equazione $F(x,y,z) = 0$ si rappresenta come $z = f(x,y)$

ii Le derivate:

$$F_x + F_z f_x = 0, \quad F_y + F_z f_y = 0$$

Calcolando F_x ed F_y nel punto $(0,0,1)$ riesce

$$f_x(0,0) = 1, \quad f_y(0,0) = 0$$

Il piano tangente richiesto é quindi

$$z = 0$$

5. Esercizio

*Un tendone ha la forma di un cilindro circolare retto sormontato da un cono; sapendo che la base ha il diametro di m.*10 *e la superficie totale esterna dev'essere di mq.*100π*, determinare le altezze* H *del cilindro e* h *del cono in modo che il volume sia massimo.*

Soluzioni 5

i La superficie esterna é data da

$$S(h,H) = 10\pi\left(H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2}\right)$$

La condizione $S = 100\pi$ implica

$$H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2} = 10$$

ovvero

$$H = 10 - \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2} \tag{1}$$

Le condizioni, implicite nel problema che $h \geq 0$, e $H \geq 0$ implicano

$$h \in I = [0, \sqrt{400-25}]$$

Il volume é dato da

$$V(h,H) = 25\pi(H + \frac{1}{3}h)$$

tenuto conto della (5) si ha quindi

$$v(h) = 25\pi\left(10 - \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2} + \frac{1}{3}h\right)$$

La derivata rispetto ad h é

$$v'(h) = 25\left(1 - \frac{3\,h}{2\,\sqrt{25+h^2}}\right)\pi$$

Si annulla per $h = 2\sqrt{5}$, punto nel quale cade il massimo relativamente all'intervallo I lecito. Il massimo volume si ha pertanto in corrispondenza a tale valore e risulta

$$25\left(10 - \frac{5\sqrt{5}}{6}\right)\pi$$

L'esercizio poteva essere svolto anche tramite l'algoritmo dei moltiplicatori di Lagrange: sia

$$L(h,H,\lambda) = 25\pi(H + \frac{1}{3}h) + \lambda\left\{10\pi\left(H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2}\right) - 100\pi\right\}$$

Il sistema delle derivate della $L(h,H,\lambda)$ da annullare é il seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial h}L = & 25\pi\frac{1}{3} + 10\lambda\pi\frac{h}{2\sqrt{25+h^2}} = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial H}L = & 25\pi + 10\lambda\pi = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}L = & 10\pi\left(H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2}\right) - 100\pi = 0 \end{cases}$$

ovvero semplificando dove possibile

$$\begin{cases} \frac{5}{3} + \lambda\frac{h}{\sqrt{25+h^2}} & = 0 \\ \\ 5 + 2\lambda & = 0 \\ \\ H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2} & = 10 \end{cases}$$

Il sistema determina i valori

$$\lambda = -\frac{5}{2}, \quad h = 2\sqrt{5}, \quad H = 10 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

valori che individuano lo stesso valore massimo del volume trovato prima.

OSSERVAZIONE 5.1. *Aveva senso chiedere il massimo della funzione continua volume* $25\pi(H + \frac{1}{3}h)$ *?*
Sí perché la regione Ω *dove si facevano variare i due parametri* h *e* H *era chiusa e limitata*

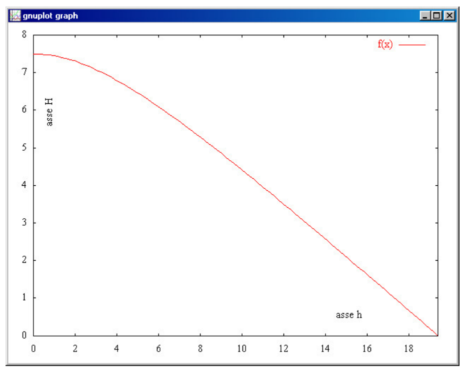


FIGURA 5. Il grafico é la regione Ω su cui variano h e H

6. Esercizio

Determinare il massimo e il minimo della funzione $G(x, y) = x - 2y$ *sul vincolo* $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$.

$\boxed{\textbf{Soluzioni 6}}$

$\boxed{\text{i}}$ Sistema

$$\begin{cases} 1 + \lambda(2x - 4) & = 0 \\ -2 + \lambda(2y - 2) & = 0 \end{cases}$$

Deve essere necessariamente $\lambda \neq 0$ e quindi si ricava

$$x = 2 - \frac{1}{2\lambda}, \quad y = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

Sostituendo nell'equazione del vincolo si ha

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

I punti individuati sul vincolo sono

$$P_1 = (2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 1 + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}), P_2 = (2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 1 - 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$$

$$G(P_1) = -5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, G(P_2) = 5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{\text{ii}}$

7. Esercizio

Data l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ e la retta AB passante per i suoi vertici $A = (2,0)$ e $B = (0,1)$, determinare sull'ellisse un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.

Soluzione 7

La retta ha equazione

$$\frac{x}{2} + y = 1$$

L'area del triangolo APB é data dal semiprodotto della base

$$\overline{AB} = \sqrt{5}$$

per l'altezza, la distanza $\overline{PH}$ di P dalla retta per A e B. Quindi l'area é massima quando é massima la distanza,

$$\overline{PH} = \frac{|\frac{x}{2} + y - 1|}{\sqrt{5}}$$

del punto P dalla retta $\frac{x}{2} + y = 1$, o, equivalentemente, quando é massima

$$5\overline{PH}^2 = (x + 2y - 2)^2$$

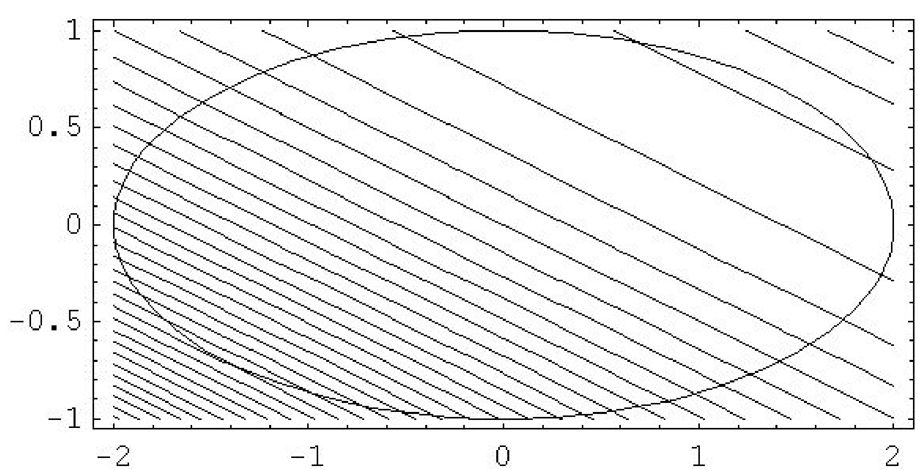


FIGURA 6. Esercizio 8: L'ellisse, vincolo, e le linee di livello della funzione area

Sistema:

$$\begin{cases} (x+2y-2)+2\lambda x & = 0 \\ 2(x+2y-2)+8\lambda y & = 0 \\ x^2+4y^2 & = 4 \end{cases}$$

Le prime due equazioni forniscono il sistema lineare

$$\begin{cases} (x+2y-2)+2\lambda x & = 0 \\ 2(x+2y-2)+8\lambda y & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$\{\lambda = 0 : \; x+2y-2=0\}\,, \; \left\{\lambda \neq 0 : \; x = \frac{2}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right\}$$

Le intersezioni con l'ellisse sono:

- per il primo tipo i soli due estremi A e B, in corrispondenza ai quali si ottengono triangoli APB di area 0
- per il secondo tipo, intersecando con l'ellisse si ottengono
$$x = \frac{2}{\lambda+2}, \; y = \frac{1}{\lambda+2} : \quad \to \lambda = \pm\sqrt{2}-2$$
- I punti sono pertanto

$$P_1 = \left\{x = \sqrt{2}, \, y = 1/\sqrt{2}\right\}, \; P_2 = \left\{x = -\sqrt{2}, \, y = -1/\sqrt{2}\right\}$$

Esclusi i primi due triangoli AAB e ABB relativi al primo caso, i due triangoli AP_1B e AP_2B hanno rispettivamente aree

$$area(P_1) = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad area(P_2) = \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Nel punto P_2 si raggiunge il massimo assoluto, nel punto P_1 si incontra un massimo locale o relativo.

I punti dell'ellisse si rappresentano parametricamente con

$$x = 2\cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il grafico nella seguente Figura (2) rappresenta l'area del triangolo in funzione del parametro θ che determina il punto P:

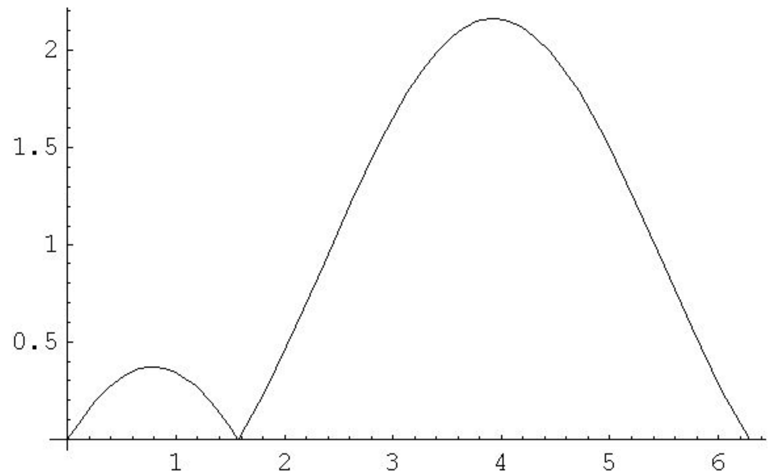


Figura 7. Esercizio 8: Grafico dell'area in funzione dell'argomento relativo al punto P

CAPITOLO 2

Le soluzioni del foglio 2

1. Esercizio

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (y + 3x, 2y - x)$ *per far compiere ad una particella un giro dell'ellisse* $4x^2 + y^2 = 4$ *in senso orario.*

1.1. Soluzione. L'ellisse proposta, ∂E

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

ha equazioni parametriche

$$x = \cos(t), \quad y = 2\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Al crescere di t l'ellisse viene percorsa in senso antiorario.

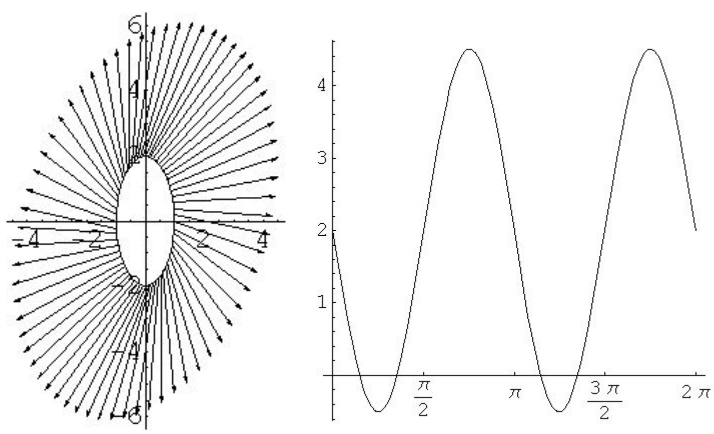


FIGURA 1. Il campo F sull'ellisse assegnata, a destra il grafico del prodotto scalare$F \times t$ con t orientata nel verso orario.

Il disegno di Figura 1 mostra come il prodotto scalare $F \times t$ da integrare faccia prevedere un risultato positivo.
Il lavoro richiesto é, tenuto conto del verso di percorrenza,

$$L = -\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds =$$

$$-\int_0^{2\pi} \{(y(t)+3x(t))\,x'(t)+(2y(t)-x(t))\,y'(t)\}\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \{[2\sin(t)+3\cos(t)]\,[-\sin(t)]+[6\sin(t)-\cos(t)]\,2\cos(t)\}\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} -2\sin^2(t)-2\cos^2(t)dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi$$

1.2. Usiamo il Teorema di Stokes. I segni $-$ corrispondono alla richiesta di percorrere l'ellisse nel senso orario, che é l'opposto di quello offerto dalla parametrizzazione.

$$-\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\,ds = -\iint_E [(2y-x)_x-(y+3x)_y\ ]\,dxdy =$$

$$= -\iint_E (-2)\ dxdy = 4\pi$$

OSSERVAZIONE 1.1. *L'espressione trovata nell'integrale doppio, $F_{2,x}-F_{1,y} \neq 0$ si puó leggere anche dicendo che*

il campo $\overrightarrow{F}$ non é irrotazionale e, quindi non é conservativo.

2. Esercizio

Calcolare l'area della regione limitata dalla retta $y = x$ e dalla curva γ di equazioni parametriche $(x(t), y(t)) = (t^2+t, t^4+t)$ con $t \in [0, 1]$.

2.1. Soluzione. La regione é riportata in Figura 2

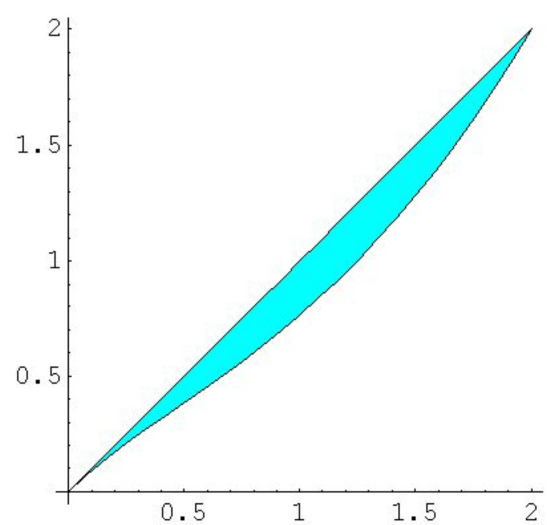


FIGURA 2. La regione di cui cercare l'area

Le formule per l'area, basate sul teorema della divergenza o sul teorema di Stokes sono tre

$$\begin{cases} \text{Area}(E) = & \frac{1}{2}\int_{\partial E}\{x,y\}\times\nu\, ds \\ \text{Area}(E) = & \int_{\partial E}\{x,0\}\times\nu\, ds \\ \text{Area}(E) = & \int_{\partial E}\{0,y\}\times\nu\, ds \end{cases}$$

Scegliamo la prima

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E}\{x,y\}\times\nu\, ds$$

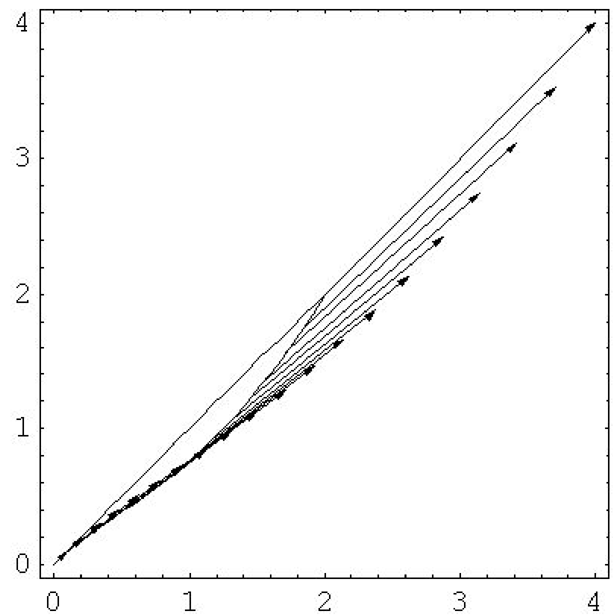


FIGURA 3. Il poco flusso di $\{x,y\}$ uscente dalla regione.

Il tratto di integrale relativo alla retta $y=x$ vale 0 perché su tale linea (x,y) e ν sono evidentemente ortogonali.
La tangente lungo la curva inferiore é

$$t = \{1+2t, 1+4t^3\}$$

la normale quindi é

$$\nu = \pm\{-(1+4t^3), 1+2t\}$$

Il verso uscente corrisponde alla scelta

$$\nu = -\{-(1+4t^3), 1+2t\} = \{1+4t^3, -(1+2t)\}$$

Il versore si ottiene dividendo il vettore precedente per il suo modulo

$$\sqrt{(1+2t)^2+(1+4t^3)^2}$$

L'integrale da eseguire é quindi

$$\int_0^1 \frac{(t+t^2)(1+4t^3)-(t+t^4)(1+2t)}{\sqrt{(1+2t)^2+(1+4t^3)^2}}\sqrt{(1+2t)^2+(1+4t^3)^2}dt$$

ovvero

$$\int_0^1 [(t+t^2)(1+4t^3)-(t+t^4)(1+2t)]dt = \frac{3}{5}$$

L'area pertanto é

$$\text{Area} = \frac{3}{10}$$

2.2. Un calcolo manuale. Non é difficile esplicitare dalla relazione $x = t + t^2$ con $x \in [0, 2]$ la funzione inversa

$$t = \frac{-1+\sqrt{1+4\,x}}{2}$$

che, sostituita nella seconda produce la funzione

$$y = \frac{-1+\sqrt{1+4\,x}}{2} + \frac{\left(-1+\sqrt{1+4\,x}\right)^4}{16} = 2\,x + x^2 - x\sqrt{1+4\,x}$$

L'area cercata é quindi anche prodotta dall'integrale

$$\int_0^2 \left\{x - [2\,x + x^2 - x\sqrt{1+4\,x}]\right\} dx =$$

$$= \frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \sqrt{1+4\,x}\left(-\left(\frac{1}{60}\right) + \frac{x}{30} + \frac{2\,x^2}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{10}$$

3. Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$F = (\frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^2}, \ \frac{y}{((x-1)^2+y^2)^2})$$

i) Calcolare il rotore di F
ii) Dimostrare che F é conservativo e trovare un potenziale.

3.1. Soluzione. É sottinteso che il vettore F ha la terza componente nulla, quindi il suo rotore ha le prime due componenti certamente nulle e la terza

$$\mathrm{rot}_z F = \frac{\partial}{\partial x} F_x - \frac{\partial}{\partial y} F_x$$

Indicato con $d(x, y)$ il denominatore delle due componenti di F si ha quindi

$$\mathrm{rot}_z F = \frac{1}{d^2(x,y)} \left(-y\, d_x \ + (x-1)\, d_y\right) = 0$$

Il campo F é

- definito in R^2 privato del punto $Q = (1, 0)$
- ha, in tutto R^2, privato del punto $Q = (1, 0)$, rotore nullo:
- quindi é conservativo in... ogni dominio rettangolare di R^2 che non includa Q,
- anzi é conservativo in ogni aperto stellato che non includa Q,
- non é tuttavia escluso che sia conservativo in tutto R^2 privato del punto Q.

Per rispondere all'ultimo punto basta calcolare il lavoro di F lungo una circonferenza C di centro Q

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$$

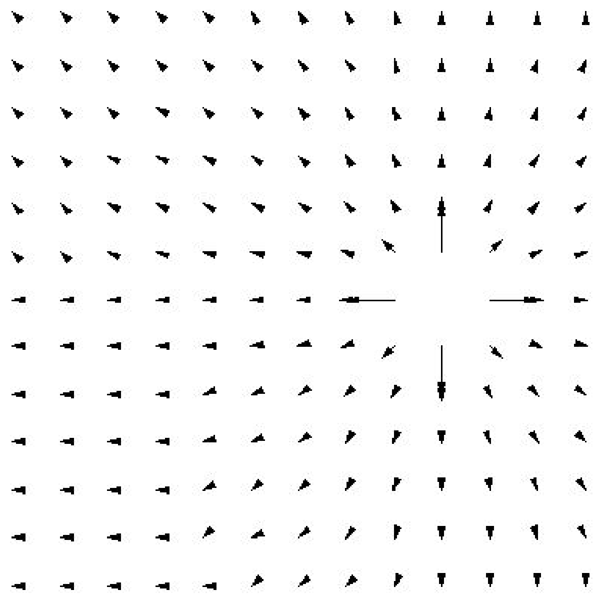


FIGURA 4. L'aspetto radiale del campo F intorno al punto Q

É evidente che tale integrale é nullo: infatti F é, in ogni punto della circonferenza C diretto come il raggio, quindi é ortogonale al versore tangente $\overrightarrow{t}$ vedi Figura (4).

Quindi F é conservativo in tutto R^2 privato naturalmente del punto Q

Quindi F ammette potenziale: chiunque vede che le due componenti di F sono infatti, a meno di un ovvio fattore, le due derivate parziali di

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2}$$

Un potenziale di F é

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2+y^2}$$

4. Esercizio

Sia C la curva di equazioni parametriche

$$x = \cos(t), \quad y = t\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- *Trovare l'area della regione racchiusa*
- *Dire per quali $t \in [0, 2\pi]$ é definito il versore ν normale e calcolarlo.*

4.1. Soluzione.

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E} \{x, y\} \times \nu \; ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(t)(t\sin(t))' - t\sin(t)(\cos(t))'\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(t)\sin(t) + t\} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t dt = \pi^2$$

4.2. Il versore normale.

Cominciamo dal vettore tangente

$$\{(\cos(t))', \quad (t\sin(t))'\} = \{-\sin(t), \, \sin(t) + t\cos(t)\}$$

Per $t = 0$ si ha il vettore nullo: quindi la rappresentazione parametrica offerta non soddisfa nel punto $t = 0$ ai requisiti di una curva regolare per la quale si richiede infatti

$$x'^2(t) \, + \, y'^2(t) \, > \, 0$$

Esiste, tuttavia, il limite per $t \to 0^+$ del versore tangente

$$\{-\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2 + (t\,\cos(t) + \sin(t))^2}}\right), \frac{t\,\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2 + (t\,\cos(t) + \sin(t))^2}}\}$$

$$\left\{\frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

Limite che peró é diverso dal limite per $t \to 2\pi$ che vale $\{0, 1\}$ vedi Figura 5.

La curva assegnata é chiusa ma é dotata di versori tangente e normale solo per $0 < t < 2\pi$.

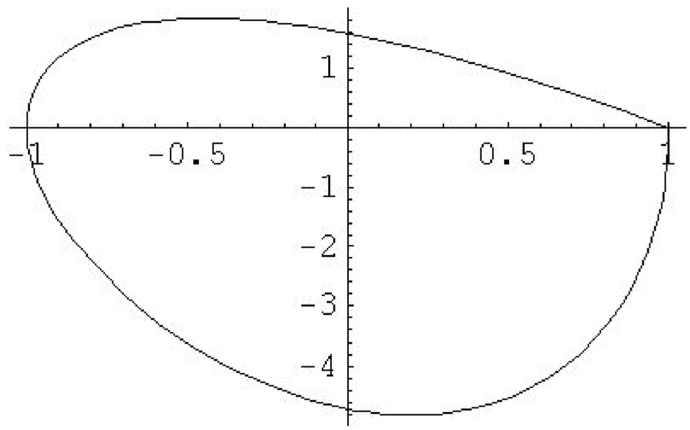


FIGURA 5. $x = \cos(t), \quad y = t\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$

5. Esercizio

Dato il campo vettoriale $F = (xy,\ (x^2 - y^2)/2)$
i) si calcolino flusso uscente e circuitazione rispetto alla curva C *di equazioni parametriche* $x = \cos^3(t),\ y = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi]$
ii) Dimostrare che F *é un campo vettoriale conservativo in tutto* R *e che i suoi potenziali sono funzioni armoniche.*
iii) Costruire uno di tali potenziali.

5.1. Soluzione.

5.1.1. *Flusso uscente:* la curva assegnata é chiusa quindi (???) é la frontiera di una regione Ω del piano alla quale applicare il teorema della divergenza

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_\Omega \mathrm{div}(\overrightarrow{F}) dxdy$$

Ma $\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) = 0$, quindi il flusso richiesto vale 0.

5.1.2. *La circuitazione.* Servendosi del Teorema di Stokes si ha

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \iint_\Omega \mathrm{rot}_z(\overrightarrow{F}) dxdy$$

Ma $\mathrm{rot}_z(\overrightarrow{F}) = 0$ quindi anche la circuitazione é nulla.

5.1.3. *Campo conservativo.* $\overrightarrow{F}$ é irrotazionale in tutto R^2 quindi... é conservativo in tutto R^2.

5.1.4. *Un potenziale.* Le primitive di xy rispetto ad x sono

$$\frac{1}{2}x^2 y + g(y)$$

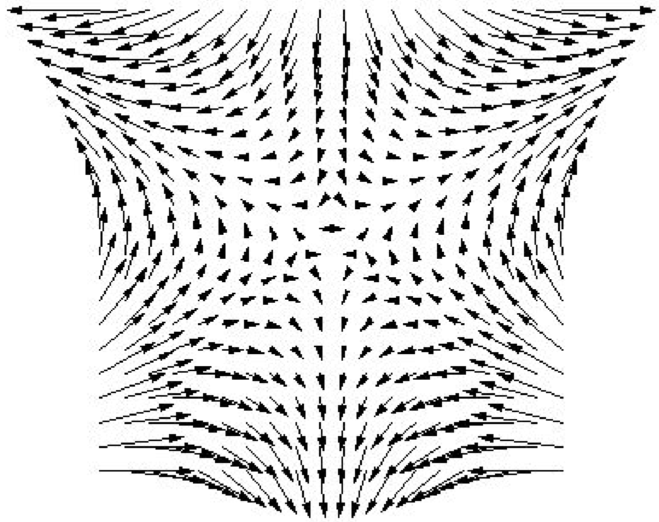


FIGURA 6. Il campo F dell'Esercizio 5 : non ci sono punti da cui *diverga*.

Basta imporre ora che tali funzioni abbiano come derivata rispetto ad y l'espressione $\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ assegnata. A conti fatti questo si realizza prendendo

$$g(y) = -\frac{1}{6}y^3$$

Quindi un potenziale di F é la funzione

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$$

Questo vuol dire che

$$\overrightarrow{F} = \nabla U(x, y)$$

5.1.5. *Il potenziale é armonico.* Si puó verificare che

$$\triangle\left(\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3\right) = 1 - 1 = 0$$

Notate del resto che

$$\triangle U(x, y) = \text{div } \nabla U(x, y) = \text{div}\overrightarrow{F}$$

e quindi si poteva prevedere che l'eventuale potenziale sarebbe stato una funzione armonica dal momento che il campo $\overrightarrow{F}$ aveva divergenza nulla, vefi Figura 6.

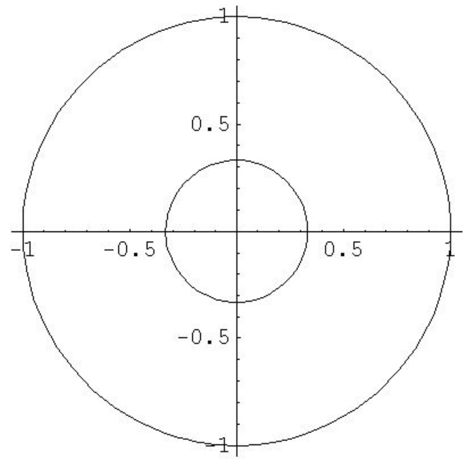


FIGURA 8. Esercizio 6: il teorema di Stokes su una corona circolare

6. Esercizio

Sia $\overrightarrow{F}$ un campo irrotazionale, definito in R^2 privato dei due punti $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,0)$. Sapendo che

$$\int_{C_i} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds = i, \quad i = 1, 2$$

con C_i la circonferenza di centro P_i e raggio 1, calcolare l'integrale $\int_\gamma \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds$ essendo γ l'ellisse $4x^2 + 25y^2 = 25$.

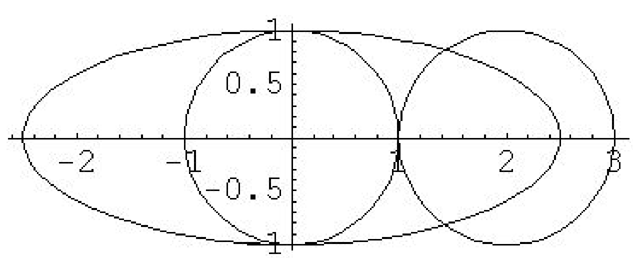


FIGURA 7. Esercizio 6: l'ellisse e le due circonferenze

6.1. Soluzione. Essendo il campo F irrotazionale gli integrali sulle circonferenze C_i di raggio 1 sono uguali a quelli sulle circonferenze di raggi minori e stessi centri: per convincersene basta applicare il teorema di Stokes alla corona circolare di centro l'origine e raggi, ad esempio 1/3 e 1

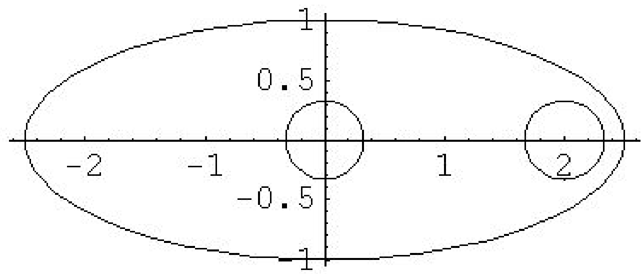


FIGURA 9. Esercizio 6: ellisse e circonferenze di raggio 1/3

$$\int_{C_1(1)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds - \int_{C_1 1/3} F \times t ds = \iint_{Corona} \mathrm{rot}_z \overrightarrow{F}\ dxdy = 0$$

Ne segue quindi che

$$\int_{C_1 1/3} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = 1$$

Tenuto conto di ció si puó applicare il teorema di Stokes alla regione, Figura (9), delimitata dalle due circonferenze di centri $P_i, i = 0, 1$ e dall'ellisse assegnata e dedurne che

$$\int_E \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_{C_1(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds + \int_{C_2(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = 1 + 2 = 3$$

7. Esercizio

i) Calcolare il lavoro del campo $F = (xy - 2, x^2 + y^2)$ lungo il segmento $(0,0) - (1,2)$ e lungo l'arco di parabola $y = 2x^2$ con gli stessi estremi
ii) sia $u(x,y) = x^3 + yx^2$: calcolare l'integrale della derivata normale di u lungo i due archi di curva dati precedentemente.

7.1. Soluzione.

7.1.1. *Il segmento.* La rappresentazione parametrica é

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t, \quad t \in [0,1]$$

Il versore tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \{1, 2\}$$

Ne segue

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{(2t^2 - 2)1 + (t^2 + 4t^2)2\right\} \sqrt{5} dt = \int_0^1 (12t^2 - 2) dt = 2$$

7.1.2. *L'arco di parabola.* La rappresentazione parametrica é

$$x(t) = t, \quad y = 2t^2, \quad t \in [0,1]$$

il versore tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}} \{1, 4t\}$$

Ne segue

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}} \left\{(2t^3 - 2)1 + (t^2 + 4t^4)4t\right\} \sqrt{1 + 16t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{(2t^3 - 2)1 + (t^2 + 4t^4)4t\right\} dt = \int_0^1 (16t^5 + 6t^3 - 2) dt = \frac{13}{6}$$

7.1.3. *Derivata normale lungo il segmento.* La derivata normale é data da

$$\nabla U \times \nu$$

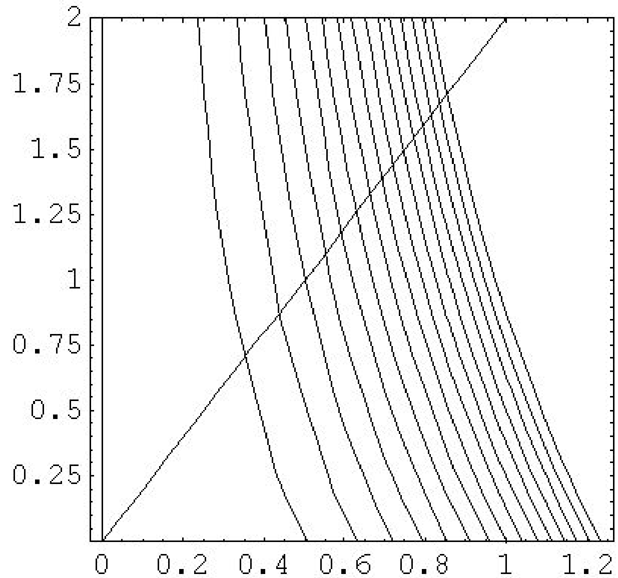


FIGURA 10. 15 linee di livello di $u(x,y) = x^3 + yx^2$ tra $[0,2]$ e il segmento $(0,0) - (1,2)$, relative a livelli equidistribuiti.

Tenuto conto che $\nabla U = \{3x^2 + 2yx,\, x^2\}$ e che $\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\{-2,1\}$ ne segue che l'integrale richiesto vale, tenuto conto della rappresentazione parametrica del segmento,

$$\pm\int_0^1 \{-2(3t^2 + 4t^2) + 1(t^2)\}dt = \pm\int_0^1 -13t^2 dt = \pm\frac{13}{3}$$

Come si vede, non avendo precisato l'orientamento della normale al segmento, si hanno come risposta due valori $\pm$.

7.1.4. *Derivata normale lungo la parabola.* Come sopra con il versore normale

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{1+16t^2}}\{-4t,\, 1\}$$

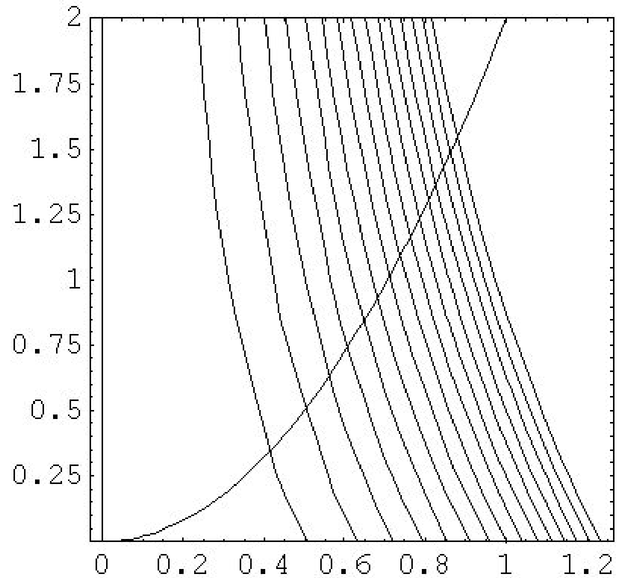


FIGURA 11. 15 linee di livello di $u(x, y) = x^3 + yx^2$ tra $[0, 2]$ e l'arco di parabola, relative a livelli equidistribuiti.

L'integrale richiesto é pertanto

$$\pm \int_0^1 \{-(3t^2 + 4t^3)4t + t^2\}dt = \pm \int_0^1 (t^2 - 12\,t^3 - 16\,t^4)dt = \pm\frac{88}{15}$$

Stessa ambiguitá di segno precedentemente segnalata.

7.2. Cosa si legge dalle linee di livello ?

- Lungo ciascuna linea di livello la funzione é costante: quindi la derivata di una funzione lungo una direzione tangente alle linee di livello é nulla.
- Le Figure (11) e (9) mostrano come le direzioni normali, rispettivamente al segmento e all'arco di parabola, siano abbastanza vicine ad essere tangenti alle linee di livello della funzione $u(x, y) = x^3 + yx^2$
- Se ne deduce che le derivate normali richieste saranno abbastanza piccole in modulo.

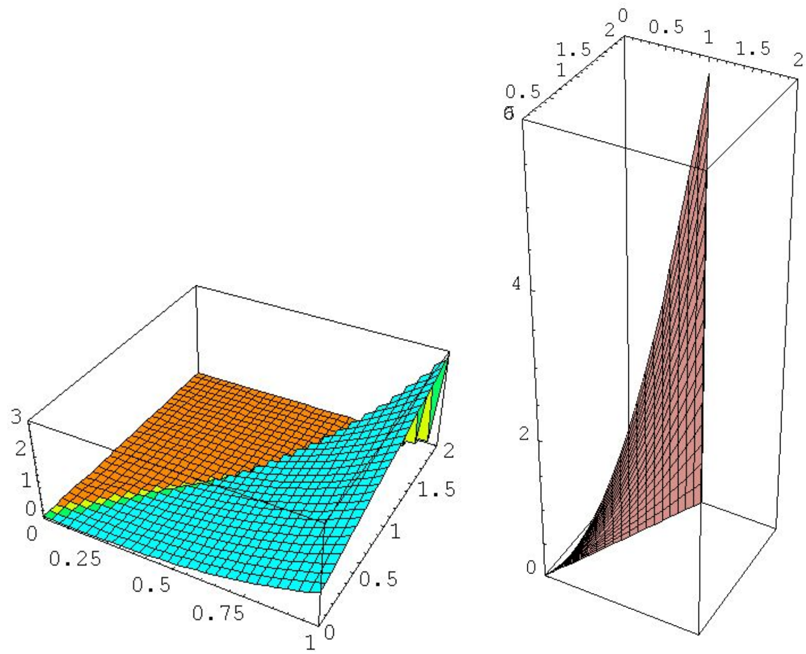


FIGURA 12. La superficie $u(x, y) = x^3 + yx^2$ e un muro alto quanto la sua derivata normale lungo il segmento...

- Ricordate che il gradiente ∇u é ortogonale alle linee di livello ed é in modulo tanto piú grande quanto piú le linee di livello relative a livelli equidistribuiti riescano vicine, vedi Figura (10).

CAPITOLO 3

Le soluzioni del foglio 3

1. Esercizio

Consideriamo la famiglia di elicoidi, vedi Figura 1,

$$x = u\cos(v),\ y = u\sin(v),\ z = kv, \quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi$$

Quella proposta nell'esercizio corrisponde alla scelta $k = 1$

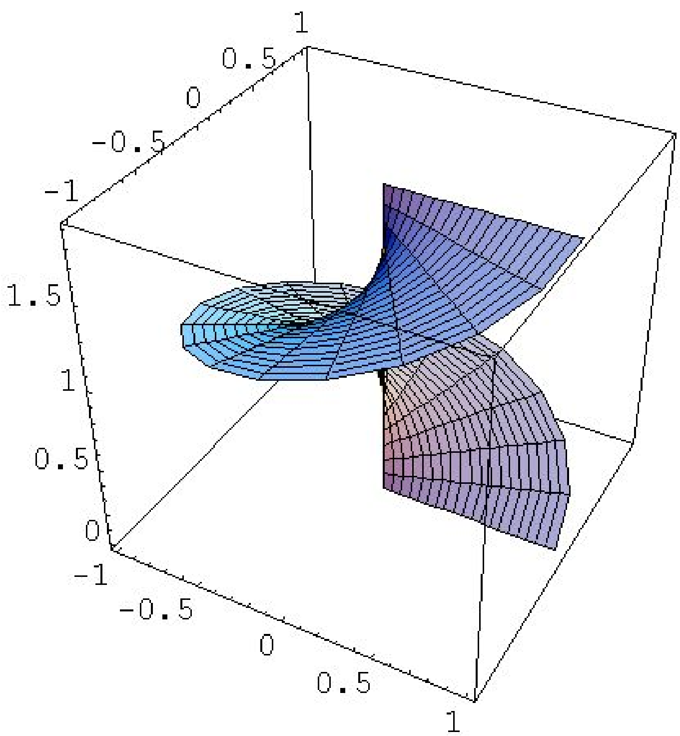


FIGURA 1. Elicoide con $k = 0.3$

Matrice jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ u\sin(v) & u\cos(v) & k \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + k^2}$$

$$\text{Area}(k) = \iint_{[0,1]\times\,[0,2\pi]} \sqrt{u^2+k^2}\;du\,dv = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u^2+k^2}\;du$$

$$A(k) = \pi\left(\sqrt{1+k^2} - k^2\,\log(\sqrt{k^2}) + k^2\,\log(1+\sqrt{1+k^2})\right) \tag{2}$$

Trovate questo integrale con la sostituzione $u = k\sinh(t)$ oppure cercatelo su qualche prontuario (vedi Volume I, pag.273, (46)), oppure calcolatelo con *Mathematica.*
L'area richiesta nell'Esercizio, per $k = 1$ é quindi

$$A(1) = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right) \cong 7.2118$$

Per $k = 0$ l'elicoide coincide con il cerchio del piano $z = 0$ e la sua area viene appunto quella, π del cerchio di raggio 1: per $k \neq 0$ l'area é maggiore (ovviamente).
Derivando si ottiene

$$A'(k) = 2\pi \int_0^1 \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}du$$

da cui $|A'(k)| \leq 2\pi$ la funzione $A(k)$ é lipschitziana con costante $L = 2\pi$
Ad esempio

$$|A(0.3) - A(0)| \leq 2\pi \times 0.3$$

da cui si deduce che l'area dell'elicoide in Figura 1 non differisce da π per piú di $0.6\,\pi$, ovvero

$$A(0.3) \leq 1.6\,\pi$$

Trovate, con gli strumenti del calcolo, il grafico della funzione $A(k)$ di cui alla formula (2), grafico accennato nella Figura (2).

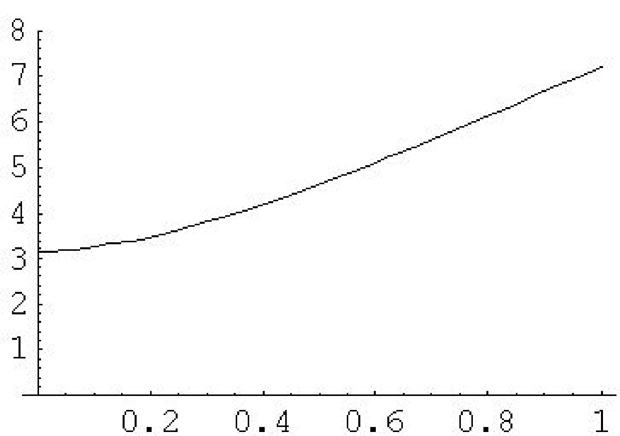


FIGURA 2. Il grafico della funzione lipschitziana $A(k)$ per $k \in [0, 1]$

2. Esercizio

Ruotare il grafico $x = \cosh(z)$ $-1 \leq z \leq 1$ intorno all'asse z significa descrivere la superficie dello spazio

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh(z)$$

che si rappresenta, parametricamente con

$$\begin{cases} x = & \cosh(z)\cos(\theta) \\ y = & \cosh(z)\sin(\theta) \qquad -1 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = & z \end{cases}$$

La matrice jacobiana riesce

$$J = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cosh(z) & \cos(\theta)\cosh(z) & 0 \\ \cos(\theta)\sinh(z) & \sin(\theta)\sinh(z) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \cosh(z)\sqrt{1 + \sinh^2(z)} = \cosh^2(z)$$

$$\text{Area} = \iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} \cosh^2(z) d\theta\, dz = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2(z) dz = 2\,\pi\left(1 + \frac{\sinh(2)}{2}\right)$$

$\boxed{\text{NOTA: } \textit{superfici di rotazione}}$

La matrice jacobiana relativa alla rotazione di una $x = f(z) > 0, \quad a \leq z \leq b$ generica é

$$j = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)f(z) & \cos(\theta)f(z) & 0 \\ \cos(\theta)f'(z) & \sin(\theta)f'(z) & 1 \end{pmatrix}$$

La relativa espressione

$$EG - F^2 = f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}$$

L'area che ne deriva é

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

É evidente che

$$2\pi f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

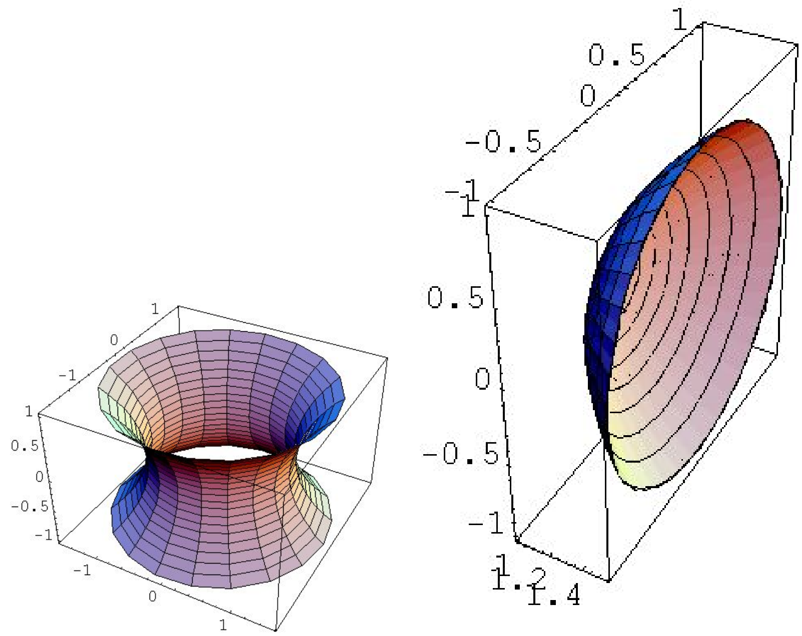


FIGURA 3. a) Rotazione intorno asse z, b) rotazione intorno asse x

approssima la superficie cilindrica ottenuta facendo ruotare il segmento di lunghezza

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(z)}dz$$

su una circonferenza di raggio $f(z)$.
A pagina 429 del Volume II trovate una espressione analoga ma ruotando rispetto all'altro possibile asse: il grafico del $\cosh(z)$ puó essere ruotato intorno all'asse z (come nell'Esercizio 2) ottenendo una forma di fuso, ma poteva anche essere ruotato intorno all'asse x ottenendo una conca, vedi figura 3.
Le osservazioni di pag. 429 si riferiscono a questa (conca) seconda possibilitá.

3. Esercizio

Rappresentazione parametrica della sfera S di raggio unitario

$$\begin{cases} x = & \sin(u)\cos(v) \\ \\ y = & \sin(u)\sin(v), \quad , \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ \\ z = & \cos(u) \end{cases}$$

Matrice jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) & \cos(u)\sin(v) & -\sin(u) \\ \\ -\sin(u)\sin(v) & \sin(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin(u)$$

L'integrale superficiale doppio richiesto é pertanto

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin^2(u)\sin(u)\, du = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3(u)du = 2\pi\frac{4}{3}$$

4. Esercizio

Verificare il teorema della divergenza vuol dire:

- calcolare il flusso uscente del vettore $\overrightarrow{F}$ assegnato traverso le sei faccette frontiera del cubo assegnato,
- calcolare l'integrale (triplo) di div$\overrightarrow{F}$sul cubo (pieno) assegnato,
- riconoscere che i due valori coincidono.

La frontiera del cubo é formata da sei facce: il versore normale ha su ognuna di esse una sola componente diversa da 0 (naturalmente quindi uguale o a 1 o a -1).

$x = -1$	$\nu = \{-1, 0, 0\}$	$F = \{-1, 2y, 3z\}$	$F \times \nu = 1$	$\int F \times \nu d\sigma = 4$
$x = 1$	$\nu = \{1, 0, 0\}$	$F = \{1, 2y, 3z\}$	$F \times \nu = 1$	$\int F \times \nu d\sigma = 4$
$y = -1$	$\nu = \{0, -1, 0\}$	$F = \{x, -2, 3z\}$	$F \times \nu = 2$	$\int F \times \nu d\sigma = 8$
$y = 1$	$\nu = \{0, 1, 0\}$	$F = \{x, 2, 3z\}$	$F \times \nu = 2$	$\int F \times \nu d\sigma = 8$
$z = -1$	$\nu = \{0, 0, -1\}$	$F = \{x, 2y, -3\}$	$F \times \nu = 3$	$\int F \times \nu d\sigma = 12$
$z = 1$	$\nu = \{0, 0, 1\}$	$F = \{x, 2y, 3\}$	$F \times \nu = 3$	$\int F \times \nu d\sigma = 12$

$$\iint_{\partial C} F \times \nu \, d\sigma = 8 + 16 + 24 = 48$$

Calcolo della divergenza:

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}2y + \frac{\partial}{\partial z}3z = 6$$

$$\iiint_C \operatorname{div}\overrightarrow{F} \; dxdydz = 6 \iiint_C \; dxdydz = 6 \times 2^3 = 48$$

5. Esercizio

Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente dalla superficie della piramide significa ridursi a calcolare l'integrale triplo della divergenza

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{\partial}{\partial y}3y + \frac{\partial}{\partial z}4z = 9$$

esteso alla piramide

$$\iiint_P \operatorname{div}\overrightarrow{F}\ dxdydz = 9 \times Volume(P) = 9.\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

avendo tenuto conto che la piramide assegnata ha area di base $1/2$, altezza 1 e quindi volume $1/6$.

6. Esercizio

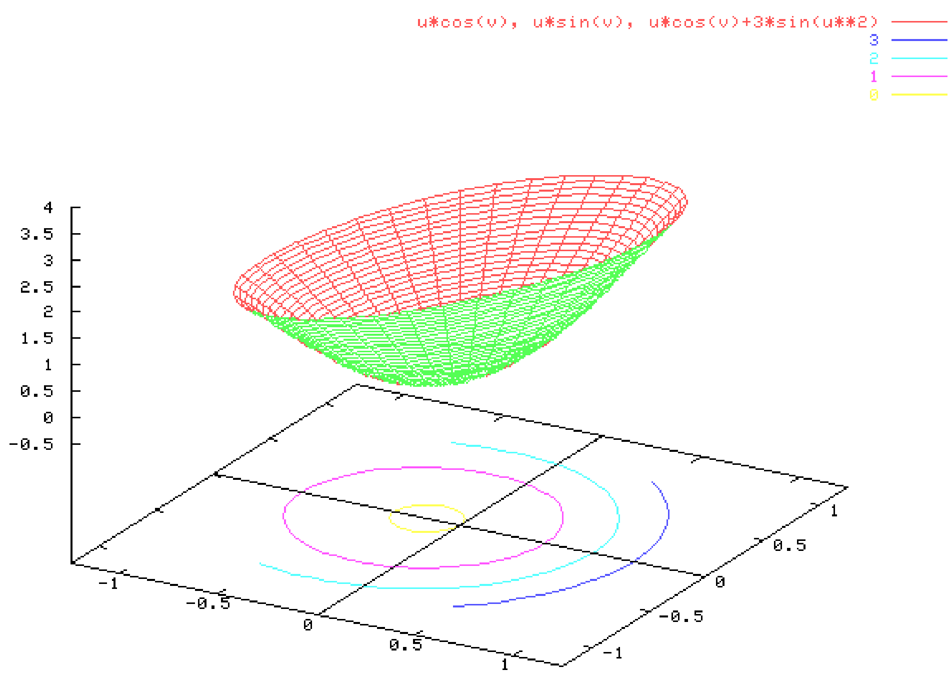


FIGURA 4. La superficie dell'Esercizio 6

La circuitazione richiesta puó essere calcolata

- direttamente osservando che la curva ha rappresentazione parametrica

$$x = \cos(t), y = \sin(t), z = \cos(t) + 3\sin(1), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

- indirettamente tramite il teorema di Stokes che conduce a calcolare il flusso del rotore.

6.1. Calcolo diretto.

$$\overrightarrow{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(t)}} \{-\sin(t),\, \cos(t),\, -\sin(t)\}$$

avendo supposto di percorrere la curva nel verso antiorario.

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^{2\pi} \left[-\sin(t) - \sin^2(t)\right] dt = -\pi$$

6.2. Uso del teorema di Stokes.

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 0 & y \end{pmatrix} = \{1, 0, 0\}$$

Il flusso del rotore puó essere calcolato traverso una qualunque superficie che abbia quel bordo: é abbastanza evidente che la curva C precedente sta tutta sul piano

$$z = x + 3\sin(1)$$

Calcoliamo quindi il flusso del rotore traverso la superficie

$$x = \rho\cos(\theta),\, y = \rho\sin(\theta), z = \rho\cos(\theta) + 3\sin(1), \quad 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

La normale, si tratta di una superficie piana, é la normale al piano $z = x + 3\sin(1)$

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{1, 0, -1\} \tag{3}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2}$$

Pertanto

$$\pm \iint_S \operatorname{rot} F \times \nu \; d\sigma = \pm \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \; 1 \;\rho \; d\rho = \pm\pi$$

La scelta dell'orientamento del versore normale é cruciale: per ora possiamo solo dire che la circuitazione richiesta vale $\pm\pi$. La scelta del segno nella 3 é la seguente: ν deve essere orientato in modo che il determinante che ha

- prima riga: le componenti della normale esterna al bordo
- seconda riga: le componenti della tangente al bordo

- terza riga: la normale ν alla superficie

sia positivo.
Basta eseguire il conto in un punto, ad esempio per $\theta = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

.......bisognava, nella 3 prendere il segno $-$.
Infatti, con tale scelta i due metodi di calcolare la circuitazione (quello diretto e quello tramite il teorema di Stokes danno effettivamente lo stesso valore, $-\pi$).

7. Esercizio

I campi vettoriali come quelli proposti in questo esercizio si chiamano RADIALI:

- hanno simmetria sferica
- sono diretti come il raggio
- hanno lo stesso modulo in tutti i punti che hanno stessa distanza dall'origine.

$$\overrightarrow{F} = h(|\overrightarrow{r}|)\overrightarrow{r} = h(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\{x\,,y\,,z\,\}$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 3h(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + h'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ovvero

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 3h(|\overrightarrow{r}|) + h'(|\overrightarrow{r}|)\,|\overrightarrow{r}|$$

7.1. Il caso proposto al punto ii).

$$\overrightarrow{F} = \{\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\}$$

In questo caso $h(|\overrightarrow{r}|) = |\overrightarrow{r}|^{-3}, \quad h'(|\overrightarrow{r}|) = -3|\overrightarrow{r}|^{-4}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 3|\overrightarrow{r}|^{-3} - 3|\overrightarrow{r}|^{-4}\,|\overrightarrow{r}| = 3|\overrightarrow{r}|^{-3} - 3|\overrightarrow{r}|^{-3} \;= 0$$

$$div\,\overrightarrow{F} = 0$$

Il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso la frontiera $\partial\Omega$ di un aperto Ω contenente l'origine é uguale al flusso traverso qualsiasi superficie sferica di centro l'origine, Sia S una di esse, quella ad esempio di raggio 1

$$\iint_S F \times \nu\, d\sigma = \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$$

8. Esercizio

L'esercizio adotta la notazione delle forme differenziali.

8.1. Il calcolo diretto.

$$\int_\gamma xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz = \int_0^{2\pi}\{\sin(t)\cos(t)-(\sin(t)+\cos(t))\sin(t)+$$

$$+2(\sin(t)+\cos(t))(\cos(t)-\sin(t))\}dt = -\pi$$

La rappresentazione parametrica data orienta la curva in senso ORARIO

8.2. Il teorema di Stokes.

$$\mathrm{rot}\{x, x+y, x+y+z\} = \{1, -1, 1\}$$

Normale alla prima superficie:

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, -1\}$$

La normale deve essere quindi rivolta verso il BASSO :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, -1\}$$

Flusso: integrale superficiale

$$\iint_S rot\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = -\iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}d\sigma = -\pi$$

Normale alla seconda superficie:

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{3+4x^2+4y^2+4x+4y}}\{1+2x, 1+2y, -1\}$$

La normale deve essere quindi rivolta verso il BASSO :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{3+4x^2+4y^2+4x+4y}}\{1+2x, 1+2y, -1\}$$

Flusso integrale superficiale

$$\iint_S rot\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x-2y-1)\, dxdy = -\pi$$

CAPITOLO 4

Le soluzioni del foglio 4

1. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale $y' = y\sin(y)$ *disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni.*

Soluzione

Si tratta di un'equazione autonoma: $f(y) = y\,\sin(y)$ dipende solo da y.

$$y\,\sin(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = k\,\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Quindi le funzioni costanti

$$y(x) \equiv k\,\pi$$

sono soluzioni d'equilibrio.
Ogni problema di Cauchy

$$y' = y\,\sin(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad k\,\pi < y_0 < (k+1)\,\pi$$

produce come soluzione una funzione $y = y(x)$ monotona che prende valori ancora $k\,\pi < y(x) < (k+1)\,\pi \quad \forall x$.
Tale funzione é crescente o decrescente a seconda del segno di $y\,\sin(y)$ nell'intervallo $(k\,\pi\,,\,(k+1)\,\pi)$.
I limiti di tale soluzione $y(x)$ sono

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = k\,\pi$$
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = (k+1)\,\pi$$

se si trattava di una funzione crescente, il viceversa nell'altro caso.

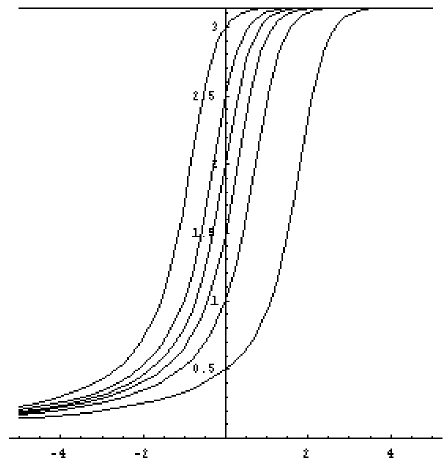


FIGURA 1. Soluzioni dell'equazione autonoma $y' = y\sin(y)$, $y(0) = y_0$, $0 < y_0 < \pi$

Attenzione: la funzione $y\sin(y)$ é pari, il segno che prende nell'intervallo $(k\pi, (k+1)\pi)$ lo prende anche nell'intervallo, simmetrico $(-k\pi, -(k+1)\pi)$
Attenzione: la funzione $y\sin(y)$ non é periodica, fatene il grafico. Quindi anche le soluzioni dell'equazione che incontriamo nelle varie striscie $(k\pi, (k+1)\pi)$ non sono uguali tra loro !

2. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale $y' = (y-1)(y-2)$

- *disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni,*
- *usando l'equazione differenziale stessa determinare a quali quote le soluzioni possono ammettere un flesso,*
- *indicata con* $y(x, c)$ *la soluzione che soddisfa la condizione* $y(0) = c \leq 2$ *determinare*
$$\lim_{x\to+\infty} y(x, c),$$
- *sviluppare in formula di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 0$ *ed ordine* $n = 3$ *la soluzione* $y(x, 0)$.

Soluzione

L'equazione $y' = (y-1)(y-2)$ é autonoma, le sue soluzioni d'equilibrio sono
$$y \equiv 1, \quad y \equiv 2$$

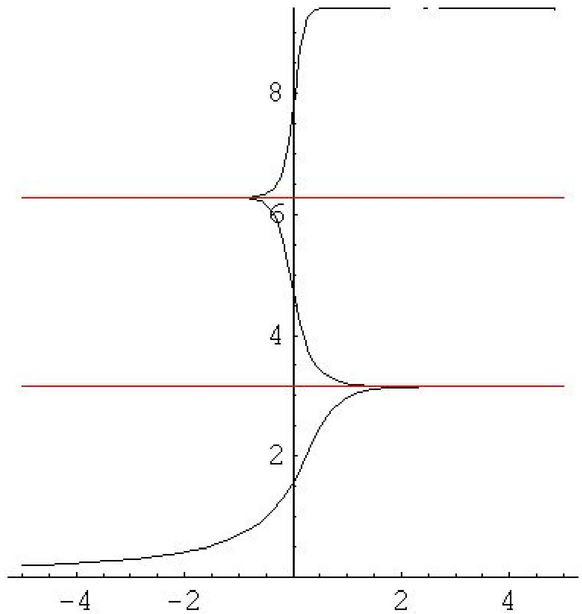


FIGURA 2. I grafici delle soluzioni della $y' = y\sin(y)$ nei vari intervalli non sono uguali...

Le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$y' = (y-1)(y-2), \quad y(x_0) = y_0, \quad y_0 \neq 1,\ y_0 \neq 2$$

sono funzioni monotone.

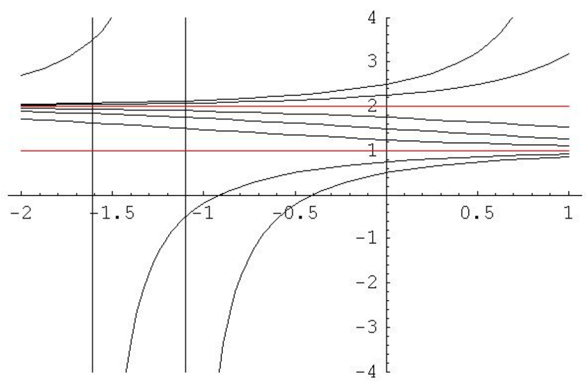


FIGURA 3. $y' = (y-1)(y-2)$, in rosso le due soluzioni d'equilibrio: $y(x) \equiv 1, \quad y(x) \equiv 2$.

Tenuto conto del segno di $(y-1)(y-2)$ sono:

- crescenti se $y_0 > 2$
- decrescenti se $1 < y_0 < 2$

- crescenti se $y_0 < 1$

Le rette verticali che notate in Figura (3) corrispondono agli asintoti verticali posseduti da alcune delle soluzioni dell'equazione appartenenti ai semipiani $y < 1$ oppure $y > 2$. Il loro carattere crescente puó infatti essere ... *irrefrenabile*!

I flessi corrispondono all'annullarsi della derivata seconda

$$y'' = f'(y).y' = f'(y).f(y) = 0 \quad \rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad 2y - 3 = 0$$

quindi le soluzioni (non costanti) dell'equazione assegnata hanno un flesso solo alla quota $y = 3/2$.

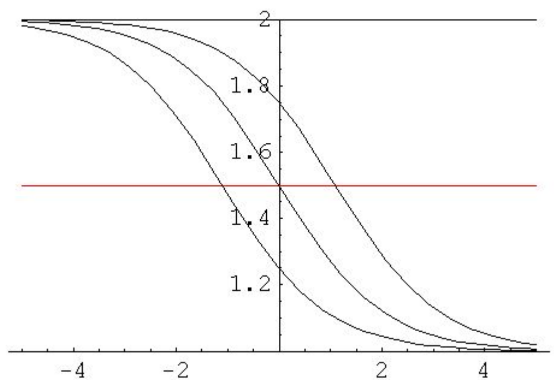


FIGURA 4. I flessi, tutti alla quota 1.5

Quindi hanno un flesso tutte e sole le soluzioni che soddisfano un problema di Cauchy

$$y' = (y-1)(y-2), \quad y(x_0) = y_0, \quad 1 < y_0 < 2$$

Il limite richiesto:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x,2) = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

Il carattere monotono delle soluzioni permette di riconoscere che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x,c) = 1 \quad \forall c < 2$$

infatti:

- per $1 < c < 2$ la soluzione é decrescente, decrescente verso quota 1,
- per $c = 1$ la soluzione é $y(x,1) \equiv 1$
- per $c < 1$ la soluzione é crescente, crescente verso quota 1.

La formula di Taylor:

$$y(x,0) \simeq y(0,0) + y'(0,0)x + \frac{1}{2}y''(0,0)x^2$$

Tenuto conto che

$$y(0,0) = 0, \quad y'(0,0) = (0-1)(0-2) = 2, \quad y''(0,0) = 2.0 - 3 = -3$$

si ha

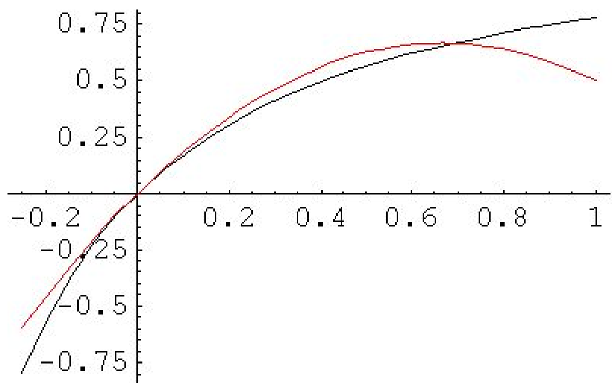


FIGURA 5. La soluzione $y(x,0)$ e, in rosso, l'approssimazione di Taylor $3x - 3x^2/2$

$$y(x,0) \simeq 2x - \frac{3}{2}x^2$$

La soluzione *vera* é, naturalmente (*integrate come si integrano le equazioni autonome*),

$$y(x,0) = \frac{2 - 2\,e^x}{1 - 2\,e^x}$$

Si noti tuttavia che l'approssimazione di Taylor é stata determinata servendosi solo dell'equazione $y' = (y-1)(y-2)$ e della condizione iniziale $y(0) = 0$.

3. Esercizio

Determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$y' = \frac{y\,\ln(y)}{2x}, \quad y(1) = 1 \quad \textit{oppure} \quad y(1) = 2.$$

Soluzione

Primo problema:

$$y' = \frac{y\ \ln(y)}{2x}, \quad y(1) = 1 \quad \rightarrow \quad y(x) \equiv 1$$

Ricordate sempre, davanti al problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili

$$y' = f(y).g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

di controllare se $f(y_0) = 0$?: nel caso lo sia, la soluzione é, banalmente, $y(x) \equiv y_0$.

Secondo problema:

$$\int_2^y \frac{dt}{t\ln(t)} = \int_1^x \frac{1}{2\tau}\,d\tau \quad \rightarrow \quad \ln(\ln(y)) - \ln(\ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

da cui

$$\ln(y) = \sqrt{x}\ln(2), \quad \rightarrow \quad y(x) = e^{\ln(2)\sqrt{x}} = 2^{\sqrt{x}}$$

Naturalmente soluzione definita per $x > 0$.

Nell'integrazione non sono stati messi i moduli perché giá sapevamo di lavorare con $x \simeq 1$ e $y \simeq 2$ situazione in cui anche $\ln(y) > 0$.

4. Esercizio

Assegnata l'equazione lineare $y'\sin(x) + y\cos(x) = 2$,
$0 < x < \pi$

- *determinare tutte le soluzioni*
- *dimostrare che solo una di tali soluzioni converge per* $x \to 0$.

Soluzione

Si tratta di un'equazione

non di forma normale

essa equivale a

$$y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = \frac{1}{\sin(x)}$$

equazione LINEARE DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI, definiti per $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$: puó essere studiata pertanto in ciascuno degli intervalli $(k\pi, (k+1)\pi)$

Soluzione dell'omogenea:

$$\ln(|y|) = \ln(|\sin(x)|) + c \quad \rightarrow \quad y(x) = A.\frac{1}{\sin(x)}$$

La scomparsa dei moduli, e la comparsa del coefficiente A, si spiegano dal momento che stiamo lavorando (obbligatoriamente) in un intervallo in cui $\sin(x)$, e quindi $y(x)$, hanno segno costante.
Una soluzione della completa (variazione delle costanti): cerchiamo tale soluzione nella forma

$$A(x).\frac{1}{\sin(x)}: \quad A'(x).\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \rightarrow \quad A'(x) = 1, \quad A(x) = x+c$$

La soluzione dell'equazione completa cercata é

$$\overline{y}(x) = (x+c).\frac{1}{\sin(x)}$$

Tutte le soluzioni sono

$$y(x) = A.\frac{1}{\sin(x)} + (x+c).\frac{1}{\sin(x)} = (B+x).\frac{1}{\sin(x)}$$

ove $B = A + c$.

LIMITE IN $x = 0$:
Supponiamo di lavorare in uno dei due intervalli $(-\pi, 0)$ oppure $(0, \pi)$: tra le funzioni

$$(B+x).\frac{1}{\sin(x)}$$

soluzioni dell'equazione differenziale, solo quella con $B = 0$ ammette limite per $x \to 0$, si tratta, in tal caso, del noto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

5. Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy lineare

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2 \sin^2(x), \quad y(1) = 0.$$

Soluzione

Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine:

- Soluzioni omogenea associata: $y' = \frac{2y}{x}$, $\quad y(x) = A.x^2$
- Soluzione della completa (variazione delle costanti) $y(x) = A(x).x^2$:

$$A'(x)x^2 = x^2 \sin^2(x) \quad \rightarrow \quad A'(x) = \sin^2(x), \quad \rightarrow \quad A(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\,x)}{4}$$

- Soluzioni dell'equazione:

$$y(x) = \left(A + \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\,x)}{4}\right) x^2$$

- Condizione iniziale

$$\left(A + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2)}{4}\right) 1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2)$$

6. Esercizio

Determinare una funzione $y(x), \quad y(0) = 0, \quad y(x) \geq 0$ *tale che, detta*

$$B(x) = \int_0^x y(t)dt$$

l'area del sottografico di y *e* $A(x)$ *l'area della restante parte del rettangolo di estremi* $[(0,0) - (x, f(x)]$*, riesca*

$$A(x) = nB(x), \quad n \in N.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ É sottinteso che si lavora per $x \geq 0$: altrimenti $B(x)$ diventa negativa e trattarla come area di qualche cosa non é bello...

$$B(x) = \int_0^x y(t)dt, \quad A(x) = x\,y(x) - B(x)$$

$$x\,y(x) - B(x) = n\,B(x), \quad \rightarrow x\,y(x) = (n+1)\,B(x)$$

Derivando si ricava

$$x\,y'(x) = n\,y(x), \quad y(0) = 0 \tag{4}$$

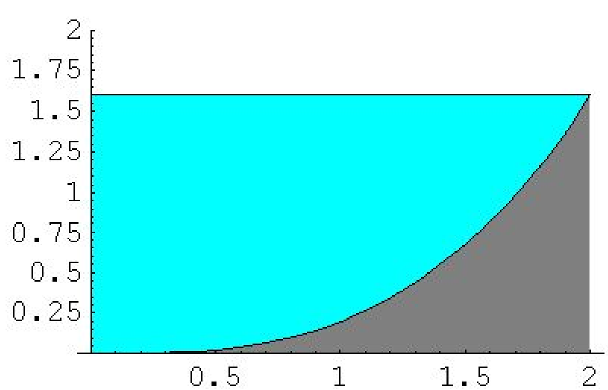


FIGURA 6. $A(x)$ in blu, $B(x)$ in grigio, $y(x) = x^3/5$

Attenzione: si tratta di un'equazione non di forma normale !
Infatti.... il problema di Cauchy (4) ha infinite soluzioni

$$y(x) = c\,x^n, \quad \forall c > 0$$

7. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \quad y(1) = 1.$$

Soluzione

Si tratta di un'*equazione omogenea* indicando con questa parola il fatto che la funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

é omogenea di grado 0.
L'equazione equivale, per $x \neq 0$ a

$$y' = \frac{1-y/x}{1+y/x},$$

Posto

$$z = \frac{y}{x}, \quad y' = x\,.\,z' + z$$

si ha

$$x\,z' = \frac{1-z}{1+z} - z, \quad z(1) = 1$$

equazione *a variabili separabili* .

$$\int_1^z \frac{1+z}{1-2z-z^2}dz = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\ln(\left|\frac{-2}{1-2z-z^2}\right|) = \ln(x^2) \quad \to \quad -1+2z+z^2 = \frac{2}{x^2}$$

Ritornando ad y si ha

$$y^2 + 2xy - x^2 = 2 \quad \to \quad y(x) = -x \pm \sqrt{2x^2+2}$$

La scelta obbligata dovendo essere $y(1) = 1$ é

$$y(x) = -x + \sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}$$

8. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = 2\frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1. \tag{5}$$

Soluzione

La sostituzione

$$\frac{y}{x} = z$$

conduce all'equazione

$$x\, z' + z = \frac{2}{z} + z \quad z(1) = 1$$

$$z\, dz = \frac{2}{x}\, dx \quad \rightarrow \quad \int_1^z z\, dz = 2\int_1^x \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2}(z^2 - 1) = \ln(x^2), \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{1 + 2\ln(x^2)}, \quad \rightarrow \quad y(x) = x\sqrt{1 + 2\ln(x^2)}$$

Osservazione 8.1. *I grafici delle soluzioni dell'equazione omogenea (5) hanno la proprietá di avere su coppie di punti omotetici*

$$(x_0, y_0), \quad (k\, x_0,\, k\, y_0)$$

tangenti paralleleVedi Smirnov, Vol. II, S I.1.5. La Figura seguente riporta i grafici delle linee di livello della funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2} - 2\ln(x^2)$$

ottenuta integrando l'equazione differenziale precedente e che quindi sono grafici di soluzioni.

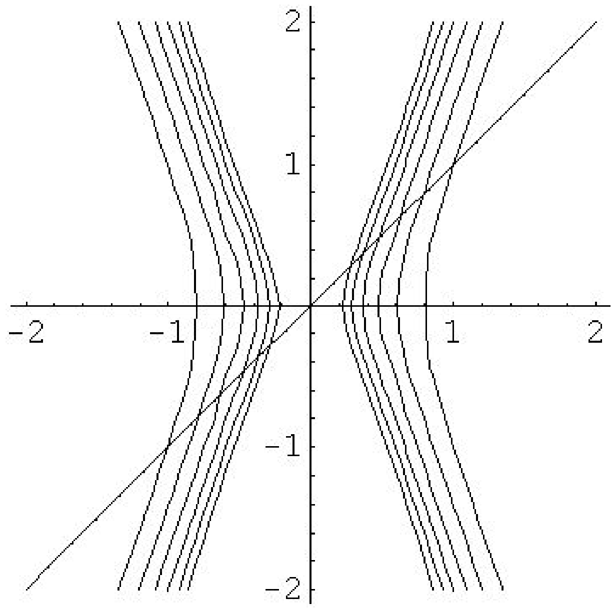


FIGURA 7. $f(x, y) = c$

In Figura si intravede il fenomeno: la retta per l'origine taglia le varie linee di livello in punti tutti tra loro omotetici, le tangenti in tali punti sono parallele tra loro.

9. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{y^2}{x^2 - xy}, \quad y(1) = 2.$$

Soluzione

La solita sostituzione $z = y/x$ conduce all'equazione a variabili separabili

$$x\, z' = \frac{2z^2 - z}{1 - z} \quad z(1) = 2$$

$$\int_2^z \frac{1-z}{2z^2 - z} dz = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

$$\ln\left(\frac{4}{3}(2z-1)\right) - \ln(z^2) = \ln(x^2)$$

$$\frac{4}{3}(2z-1) = x^2 z^2$$

$$z = \frac{1}{3x^2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 12x^2}\right)$$

$$y = \frac{1}{3x}\left(4 + \sqrt{16 - 12x^2}\right)$$

10. Esercizio

Determinare le soluzioni dei problemi

$$y' = -(x+y)^2, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$$

Soluzione La sostituzione

$$z = x + y, \quad y' = z' - 1$$

trasforma l'equazione in

$$z' - 1 = -z^2$$

a variabili separabili.
Primo problema di Cauchy: (ha una soluzione semplicissima)

$$z' = 1 - z^2, \quad z(0) = 1, \quad \rightarrow \quad z(x) \equiv 1$$

da cui $y(x) = 1 - x$.
Secondo problema di Cauchy:

$$z' = 1 - z^2, \quad z(0) = \frac{3}{2}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{z} \frac{1}{1-z^2} dz = \int_0^x x\, dx$$

$$\left.\frac{-\log(|-1+z|)}{2} + \frac{\log(|1+z|)}{2}\right|_{\frac{3}{2}}^{z} = x$$

$$\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{z} = 2\,x \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{z+1}{5z-5}\right) = 2\,x$$

$$z(x) = \frac{5\,e^{2x}+1}{5\,e^{2x}-1} \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{5\,e^{2x}+1}{5\,e^{2x}-1} - x$$

11. Esercizio

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = x\,y + e^{-x^2}\,y^3$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Si tratta di un'equazione di Bernoulli

$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^m = 0, \quad m \neq 1$$

Essa ha, per $m > 0$ la ovvia soluzione $y \equiv 0$: le altre, diverse da zero in ogni punto per il teorema di unicitá (i grafici di due soluzioni diverse non si intersecano...) si ottengono con il seguente algoritmo

$$y' = x\,y + e^{-x^2}\,y^3 \quad \to \quad -2\,y^{-3}\,y' = -2\,x\,y^{-2} - 2e^{-x^2}$$

da cui, chiamata $z = y^{-2}$ si riconosce

$$z' = -2\,x\,z - 2\,e^{-x^2}$$

equazione lineare di primo ordine:

- Equaz. omogenea associata: $z' = -2\,x\,z \quad \to \quad z(x) = A\,.\,e^{-x^2}$
- Soluzione della completa (variazione delle costanti): $A(x)\,.\,e^{-x^2}$

$$A'(x)e^{-x^2} = -2e^{-x^2} \quad \to \quad A'(x) = -2 \quad \to \quad A(x) = c - 2x$$

- Soluzione generale dell'equazione lineare completa

$$z(x) = A\,.\,e^{-x^2} - 2x\;.\,e^{-x^2}$$

Trovata $z = y^{-2}$ si trova, ovviamente

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{A\,.\,e^{-x^2} - 2x\;.\,e^{-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{A - 2x}}\,e^{-x^2/2} \tag{6}$$

La presenza di quel denominatore nel quale figura anche una radice quadrata fa capire come la soluzione trovata non possa essere definita su tutto l'asse reale... si tratti cioé di una *soluzione in piccolo* !
Le funzioni (6) *esplodono* per $x \to A/2$ come si riconosce nella Figura (8)

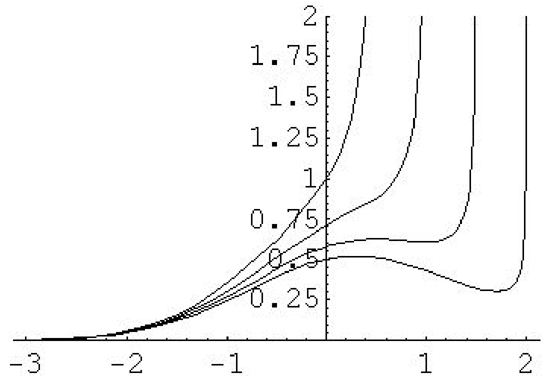


FIGURA 8. Le funzioni (6) per $A = 1, 2, 3, 4$

CAPITOLO 5

Le soluzioni del foglio 5

1. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$
Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:
$\boxed{\textbf{1.}}$ si trovano le due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea (polinomio caratteristico $(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2$ molteplicitá 2)
$e^{2x}, \quad xe^{2x}$
L'integrale generale dell'omogenea é pertanto

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ si trova una soluzione della completa (anche per prove partendo da un generico $y(x) = Ax^2 + Bx + C$)

$$(Ax^2 + Bx + c)'' - 4(Ax^2 + Bx + c)' + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$$

che implica

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{8}$$

Una soluzione dell'equazione completa é pertanto

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) \;=\; \frac{3}{8} - \frac{3\,e^{2\,x}}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{5\,e^{2\,x}}{4}\right)\,x + \frac{x^2}{4}$$

2. Esercizio

Risolvere il problema $\begin{cases} y''' - y' = 4\,e^{-x} + 3\,e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1, \\ y''(0) = 2 \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 3, non omogenea a coefficienti costanti.
L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^3 - \lambda = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata é pertanto

$$y_0(x) = c_1\,e^{\lambda_1\,x} + c_2\,e^{\lambda_2\,x} + c_3\,e^{\lambda_3\,x} = \ c_1 + c_2\ e^x + c_3\ e^{-x}$$

Una soluzione dell'omogenea si trova pensando separatamente alle due equazioni

$$\begin{array}{l} y''' - y' = 4\,e^{-x}, \\ y''' - y' = 3\,e^{2x}, \end{array}$$

Entrambe hanno a secondo membro funzioni particolarmente semplici:

- per la prima, tenuto conto che e^{-x} é soluzione dell'omogenea si potrá cercare una soluzione della completa nella forma

  $$\overline{y}_1(x) == A\ x\ e^{-x}$$

  Sostituendo si *deve avere*

  $$2Ae^{-x} \ = \ 4\,e^{-x} \quad \rightarrow \quad A = 2, \quad \rightarrow \quad \overline{y}_1(x) = 2\ x\ e^{-x}$$

- per la seconda, tenuto conto che e^{2x} non é soluzione dell'omogenea si potrá cercare una soluzione della completa nella forma

  $$\overline{y}_2(x) == A\ e^{2x}$$

  Sostituendo si *deve avere*

  $$6Ae^{2x} = 3\,e^{2x}, \quad \rightarrow \quad A = 1/2 \quad \rightarrow \quad \overline{y}_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = \ c_1 + c_2\ e^x + c_3\ e^{-x} + 2\ x\ e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato si ottiene determinando opportunamente le tre costanti libere c_1, c_2, c_3

$$\begin{array}{lcr} y(x) = \ c_1 + c_2\ e^x + c_3\ e^{-x} + 2\ x\ e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} & \Rightarrow & y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(x) = c_2 e^x - c_3 e^{-x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{2x} & \Rightarrow & y'(0) = c_2 - c_3 + 3 = -1 \\ y''(x) = c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 4e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{2x} & \Rightarrow & y''(0) = c_2 + c_3 - 2 = 2 \end{array}$$

Ne segue
$$c_1 = -\frac{9}{2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 4$$
La soluzione pertanto é
$$y(x) = \ -\frac{9}{2} + 4\ e^{-x} + 2\ x\ e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

3. Esercizio

Risolvere per $\alpha \in R$ il seguente problema di Cauchy
$$y'' + \alpha^2 y = x + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Se $\alpha \neq 0$ l'integrale generale é il seguente
$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}(x+1)$$
e quindi per soddisfare le condizioni iniziali
$$A = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B = -\frac{1}{\alpha^3}$$
Se invece $\alpha = 0$ l'equazione diventa
$$y'' = x + 1, \quad \to y(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

4. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y''' + y'' = xe^{-x}.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Si tratta di un'equazione che puó essere pensata come lineare di I ordine nell'incognita $z = y''$
$$z' + z = xe^{-x} \quad \to \quad z(x) = (c + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}$$
A questo punto c'é da fare

- due primitive:

$$y'(x) = \int \left((c + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \right) dx = -(1 + c + x + \frac{x^2}{2})e^{-x} + a$$

$$y(x) = -\int \left\{ (1 + c + x + \frac{x^2}{2})e^{-x} + a \right\} dx = (3+c+2\,x+\frac{x^2}{2})e^{-x}+a\,x+b$$

- oppure calcolare direttamente l'integrale

$$\int_0^x (x-t)(c+\frac{1}{2}t^2)\, e^{-t}\, dt = -3 - \ c + \ x + \ c\,x + \frac{6+2\,c+4\,x+x^2}{2\,e^x}$$

che fornisce (vedi paragrafo *Primitive di ordine superiore*) la doppia primitiva cercata alla quale aggiungere un generico polinomio di primo grado $ax+b$.

5. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ L'equazione é definita in tutti gli (infiniti) intervalli in cui $\cos(x) \neq 0$:
Supponiamo, per semplicitá di lavorare in un intervallo in cui $\cos(x) > 0$

- Soluzione omogenea associata

$$y'' + y = 0 \quad \to \quad y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

- Soluzione dell'equazione completa : metodo della variazione delle costanti, cerchiamo la soluzione tra le funzioni seguenti

$$\overline{y}(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x)$$

imponendo che:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos(x) + c_2'(x) \sin(x) & = 0 \\ -c_1'(x) \sin(x) + c_2'(x) \cos(x) & = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

da cui

$$c_1'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad c_2'(x) = 1$$

da cui ancora

$$c_1(x) = \ln(|\cos(x)|), \quad c_2(x) = x$$

Una soluzione della completa é pertanto

$$\ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x)$$

- La soluzione generale dell'equazione é pertanto

$$y(x) = \ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x) + c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x)$$

Una soluzione dell'equazione completa poteva essere ottenuta direttamente, con lo stesso sforzo, con la formula

$$u(x) = \int_0^x \sin(x-\xi)\frac{1}{\cos(\xi)}\,d\xi$$

caso particolare per $k=1$ della

$$u(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \sin(k(x-\xi))\,f(\xi)\,d\xi$$

che fornisce una soluzione dell'equazione $y'' + k^2y = f(x)$. (Vedi Courant, Vol. II, pag 695)

6. Esercizio

Assegnata l'equazione

$$y'' + y = f(x)$$

- *Indicare servendosi dell'espressione integrale (cfr. Courant, Vol. II pag. 695) una soluzione dell'equazione completa*
- *Determinare una soluzione dell'equazione completa nel caso*

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & se \quad |x|\le 1 \\ \\ 0 & altrove \end{cases}.$$

Soluzione

- L'espressione é la seguente

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

- Nel caso particolare della funzione a supporto compatto assegnata

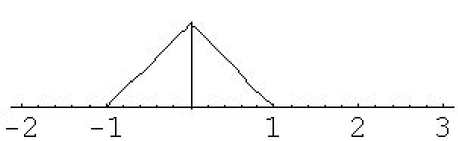


FIGURA 1. La funzione $f(x)$ assegnata.

L'espressione (7) diventa in questo caso la seguente

$x \leq -1$	$\int_0^{-1} \sin(x-\xi)\,(1+\xi)\,d\xi$	$= -\cos(x) - \sin(x) + \sin(1+x)$
$-1 \leq x \leq 0$	$\int_0^{x} \sin(x-\xi)\,(1+\xi)\,d\xi$	$= 1 + x - \cos(x) - \sin(x)$
$0 \leq x \leq 1$	$\int_0^{x} \sin(x-\xi)\,(1-\xi)\,d\xi$	$= 1 - x - \cos(x) + \sin(x)$
$x \geq 1$	$\int_0^{1} \sin(x-\xi)\,(1-\xi)\,d\xi$	$= -\cos(x) + \sin(1-x) + \sin(x)$

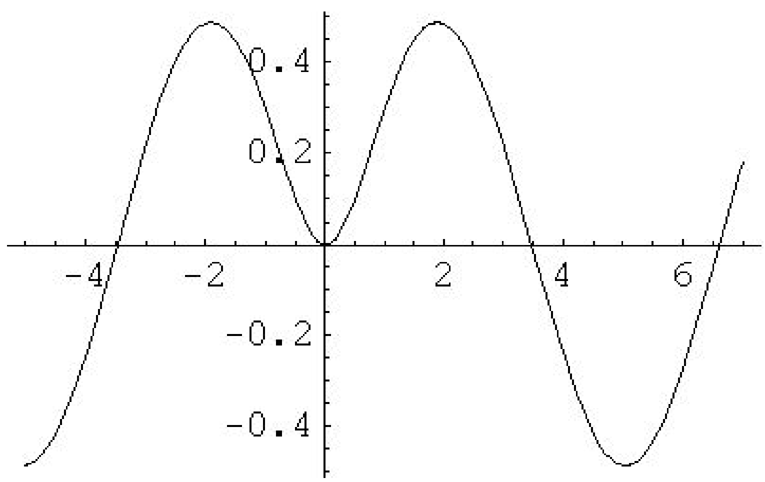


FIGURA 2. La soluzione trovata

7. Esercizio

Integrale generale di $x\,y'' - y' = 3\,x^2$

Soluzione

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti variabili.

- L'omogenea associata

$$x\,y'' - y' = 0$$

può essere risolta ponendo $y' = z$ e quindi studiando l'equazione lineare omogenea di primo ordine

$$xz' - z = 0 \quad \to \quad z' = \frac{1}{x}z \quad \to \quad z(x) = c\,x$$

Ne segue quindi

$$y(x) = \frac{1}{2}\,c\,x^2 + b$$

espressione (ovviamente) equivalente a $y(x) = c\,x^2 + b$.

- Una soluzione dell'equazione completa puó essere cercata per tentativi mediante polinomi
$$\overline{y}(x) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D :$$
sostituendo si deve avere
$$3\,A\,x^2 - C = 3\,x^2, \quad \to \quad A = 1, \quad C = 0$$
e quindi $\overline{y}(x) = x^3$
- L'integrale generale richiesto é pertanto
$$y(x) = x^3 + \; c\,x^2 + b$$

8. Esercizio

Integrale generale dell'equazione di Eulero $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$

Soluzione

Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2 non omogenea. L'equazione omogenea associata
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$
é del tipo di Eulero: sue soluzioni possono essere trovate nella forma $y(x) = x^\lambda$

Sostituendo si *deve avere*
$$(\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2)x^\lambda = 0 \quad \to \quad \lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0$$
da cui $\lambda = 2$ oppure $\lambda = 1$

Le due funzioni x e x^2 sono (ovviamente linearmente indipendenti) soluzioni dell'omogenea e l'integrale generale dell'omogenea é
$$y(x) = A\,x + B\,x^2$$
Una soluzione dell'equazione completa puó essere cercata come polinomio $\overline{y}(x) = A\,x^3$: sostituendo si *deve avere* $2A = 1$ da cui
$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2}\,x^3$$
L'integrale generale dell'equazione é pertanto
$$y(x) = \frac{1}{2}\,x^3 + B\,x^2 + A\,x$$

9. Esercizio

Integrale generale di $y'' - 2xy' - 2y = 0$ *sapendo che* e^{x^2} *é soluzione.*

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$

L'equazione assegnata é lineare di secondo ordine omogenea a coefficienti variabili: l'informazione che $y_1(x) = e^{x^2}$ é una sua soluzione ci autorizza a cercare un'altra soluzione $y_2(x)$ nella forma

$$A(x)e^{x^2}$$

sostituendo si *deve avere*

$$\left(A(x)e^{x^2}\right)'' - 2x\left(A(x)e^{x^2}\right)' - 2\left(A(x)e^{x^2}\right) = 0$$

ovvero

$$e^{x^2}\left\{(A'' + 4xA' + 2A + 4x^2A) - 2x((A' + 2Ax) - 2A\right\} = 0$$

ovvero ancora

$$A'' + 2xA' = 0, \quad \to \quad A'(x) = e^{-x^2} \quad \to \quad A(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Un'altra soluzione dell'equazione assegnata é pertanto

$$y_2(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

L'integrale generale é pertanto

$$y(x) = e^{x^2}\left\{c_1 + c_2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right\}$$

28 settembre 2008

CAPITOLO 6

Le soluzioni del foglio 6

1. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione autonoma

$$y' = y(y-1)(y-2)$$

1.1. Soluzione.

$$\int \frac{1}{y(y-1)(y-2)} dy = \int dx$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{y(y-1)(y-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-2}$$

ne deriva

$$\frac{1}{2}\ln(|y|) - \ln(|y-1|) + \frac{1}{2}\ln(|y-2|) = x + c$$

da cui segue

$$\frac{\sqrt{|y(y-2)|}}{|y-1|} = Ce^x \quad \rightarrow \quad \frac{|y(y-2)|}{|y-1|^2} = C^2 e^{2x}$$

Da essa segue

$$\begin{array}{ll} y^2 - 2y = C^2 e^{2x}(y-1)^2 & \quad se \quad y(y-2) > 0 \\ -y^2 + 2y = C^2 e^{2x}(y-1)^2 & \quad se \quad y(y-2) < 0 \end{array}$$

Nel primo caso si ha

$$y^2(1 - C^2 e^{2x}) + 2(C^2 e^{2x} - 1)y - C^2 e^{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 e^{2x}}}$$

Nel secondo caso si ha

$$y^2(1 + C^2 e^{2x}) - 2(C^2 e^{2x} + 1)y + C^2 e^{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 e^{2x}}}$$

2. Esercizio

Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, riferiti alla stessa equazione differenziale,

$$\begin{cases} y' = 2(t+1)y^{2/3} \\ y(1) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = 2(t+1)y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili:

- $\boxed{\text{Primo problema}}$

  $$\int \frac{dy}{y^{-2/3}} = \int 2(t+1)dt \quad \rightarrow \quad 3y^{1/3} = t^2 + 2t + c$$

  Ne segue

  $$y(t) = \left(\frac{1}{3}(t^2 + 2t + c)\right)^3$$

  La condizione $y(1) = 1$ implica $1 = \left(\frac{1}{3}(1+2+c)\right)^3$ da cui $c = 0$ e quindi la soluzione del primo problema é

  $$y(t) = \left(\frac{1}{3}(t^2 + 2t)\right)^3$$

- $\boxed{\text{Secondo problema}}$ É ancora piú facile: esiste, ovvia la soluzione

  $$y(x) \equiv 0$$

  Sará l'unica ?

2.2. Cerchiamo soluzioni nulle nell'origine.

Si tratta di una ricerca non disperata: infatti, a priori non possiamo escluderne l'esistenza, la funzione

$$2(t+1)y^{2/3}$$

non é infatti di classe C^1 in alcun rettangolo intorno all'origine: il motivo é quella potenza $y^{2/3}$ con esponente minore di 1.
Lavoriamo un po' con le soluzioni dell'equazione nulle per $t = 0$ ma diverse da zero per $t > 0$ (naturalmente eventuali...)

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y' = \frac{2}{3}(t+1) \quad \rightarrow \quad \left(y^{1/3}\right)' = \frac{2}{3}(t+1)$$

Integriamo su un intervallo $[\alpha, t]$

$$y^{1/3}(t) - y^{1/3}(\alpha) = \frac{1}{3}[t^2 - \alpha^2 + 2(t-\alpha)]$$

da cui, passando al limite per $\alpha \to 0$ si ha

$$y^{1/3}(t) = \frac{1}{3}[t^2 + 2t]$$

ovvero

$$y(t) = \frac{1}{3^3}(t^2 + 2t)^3$$

Questa funzione, un onestissimo polinomio, é

- non identicamente nulla
- vale 0 per $t = 0$
- verifica l'equazione differenziale, infatti

$$\begin{array}{ll} y'(t) & = 3\left(\frac{1}{3}[t^2+2t]\right)^2 \frac{1}{3} 2(t+1) \\ 2(t+1)y^{2/3}(t) & = 2(t+1)\left(\frac{1}{3}[t^2+2t]\right)^2 \end{array}$$

  che i secondi membri siano uguali lo riconosce chiunque !

Trovate il grafico di tale funzione in Figura (1).

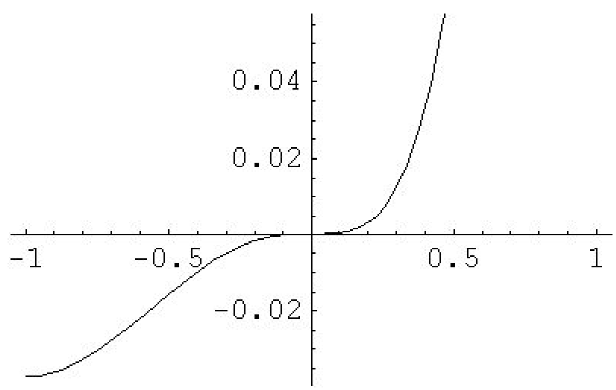


FIGURA 1. Il grafico della (sorprendente) funzione non nulla .

OSSERVAZIONE 2.1. *La funzione sorprendente trovata non é poi tanto sorprendente...*
guardate bene: é la stessa che avevamo trovato nella soluzione del primo problema di Cauchy !

3. Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{y - 4t}{t - y}, \quad y(1) = 2$$

3.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{y/t - 4}{1 - y/t}, \quad y/t = z, \quad y' = z't + z$$

$$z't = \frac{z^2 - 4}{1 - z}, \quad z(1) = 2 \tag{8}$$

Tenuto conto che $z = 2$ rende nulla l'espressione

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{1 - z},$$

a secondo membro, ne discende che la soluzione del problema (8) é la funzione

$$z(t) \equiv 2$$

Quindi la soluzione $y(t)$ del problema assegnato é $y(t) = 2t$.

4. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = -(x + y + 1)^2$$

4.1. Soluzione.

Ricorriamo alla sostituzione

$$x + y + 1 = z \quad \leftrightarrow \quad y = z - 1 - x$$

ne segue

$$z' = 1 - z^2$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+z} dz + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-z} dz = \int dx$$

$$\ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 2x + c$$

ovvero

$$\frac{1+z}{1-z} = Ce^{2x}$$

da cui

$$z = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}, \quad \rightarrow \quad y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} - 1 - x$$

5. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' + x^2 y = 3x^2$

5.1. Soluzione.

- Soluzione dell'omogenea:
$$y' + x^2 y = 0 \quad \to \quad y_0(x) = C\, e^{-x^3/3}$$
- Soluzione della completa: metodo della variazione delle costanti $\overline{y}(x) = c(x) e^{-x^3/3}$: sostituendo si deve avere

$$c'(x) e^{-x^3/3} = 3x^2 \quad \to \quad c'(x) = 3x^2 e^{x^3/3} \quad \to \quad c(x) = 3e^{x^3/3}$$

La soluzione dell'equazione completa cercata é pertanto...

$$\overline{y}(x) = 3e^{x^3/3} e^{-x^3/3} = 3$$

Risultato ampiamente prevedibile a occhio !

L'integrale generale richiesto é pertanto

$$y(x) = 3 + C\, e^{-x^3/3}$$

6. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione di Bernoulli

$$y' - \frac{1}{3} y + y^4 = 0$$

6.1. Soluzione.

Dividiamo per y^4

$$y^{-4} y' - \frac{1}{3} y^{-3} + 1 = 0 \quad \to \quad \left(y^{-3}\right)' + y^{-3} - 3 = 0$$

L'equazione lineare associata ponendo $z = y^{-3}$ é la seguente

$$z' + z - 3 = 0$$

il suo integrale generale é

$$z(x) = 3 + Ce^{-x}$$

Tornando alla y si ha quindi

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3 + Ce^{-x}}}$$

7. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare di secondo ordine

$$y'' + 2\,y' + y = \sin(x)$$

7.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea:

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

radici dell'equazione

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Le soluzioni linearmente indipendenti sono

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = x.e^{-x}$$

L'integrale generale dell'omogenea pertanto é

$$y_0(x) = e^{-x}\,(c_1 + c_2 x)$$

- Soluzione dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$$

Sostituendo si deve avere

$$-A\sin(x) - B\cos(x) + 2A\cos(x) - 2B\sin(x) + A\sin(x) + B\cos(x) = \sin(x)$$

ne segue $A = 0, \quad B = -1/2$: l'integrale particolare é pertanto

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto

$$y(x) = e^{-x}\,(c_1 + c_2 x) - \frac{1}{2}\cos(x)$$

8. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$t^3\,u''' - 4t^2\,u'' + 8\,t\,u' - 8\,u \;=\; 0$$

8.1. Soluzione.

Cerchiamo le soluzioni nella forma di potenze x^{λ} : l'equazione di terzo grado in λ é la seguente

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-4\lambda(\lambda-1)+8\lambda-8=0$$

equazione che, con un paio di raccoglimenti a fattor comune si fattorizza in

$$(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

cioé

$$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \quad \lambda_3=4$$

L'integrale generale dell'equazione di Eulero assegnata é pertanto

$$y(x)=a\,x+b\,x^2+c\,x^4$$

9. Esercizio

Applicare il metodo delle approssimazioni successive all'equazione

$$y'=1+x\,y^2 \quad y(0)=0$$

determinando le prime tre funzioni approssimanti.

9.1. Soluzione.

(1)
$$y_0(x)=0$$

(2)
$$y_1(x)=\int_0^x [1+t\,y_0(t)]\,dt=\int_0^x \;1dt=x$$

(3)
$$y_2(x)=\int_0^x [1+t\,y_1(t)]\,dt=\int_0^x \left[1+t^2\right]dt=x+\frac{1}{3}x^3$$

(4)
$$y_3(x)=\int_0^x [1+t\,y_2(t)]\,dt=\int_0^x \left[1+t\,\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\right]dt$$

$$y_3(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5$$

9.2. Lavoriamo con *Mathematica*. Si possono definire funzioni in modo ricorsivo, proprio lo strumento adatto alla definizione della successione delle approssimazioni successive.
I comandi necessari sono i seguenti:

```
y[x_, 0] := 0;
y[x_, n_] := Integrate[1 + t*y[t, n - 1], {t, 0, x}]
```

Cosí, ad esempio si possono scrivere un po' di approssimazioni successive

0	0
1	x
2	$x+\frac{x^3}{3}$
3	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}$
4	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\frac{x^7}{105}$
5	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\frac{x^7}{105}+\frac{x^9}{945}$

I grafici delle prime 10 approssimazioni successive riportati in Figura (2) per $x \in [0,1]$ appaiono meno di 10, tanto sono simili.
L'apparire sovrapposti é la migliore riprova del fatto che convergano...

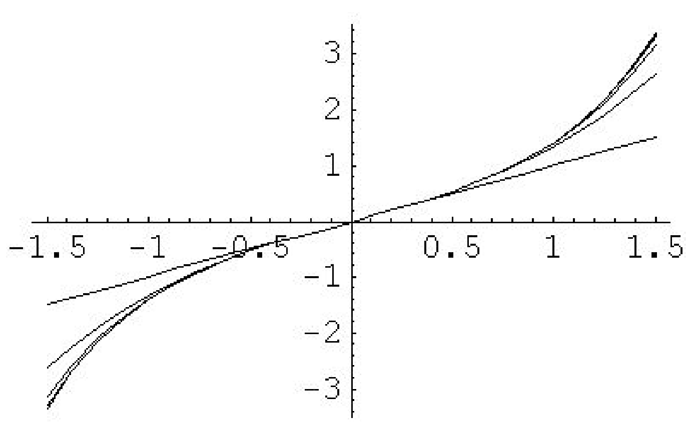


FIGURA 2. I grafici delle prime 10 approssimazioni successive

Osservazione 9.1. *Le approssimazioni successive prodotte, anche con l'aiuto di Mathematica, e riportate nella tabella precedente, hanno l'aspetto di somme parziali di una serie di potenze.*
Chissá se si tratta di una serie di potenze convergente...
Chissá se la sua somma non sia per caso proprio la soluzione che cerchiamo...
Si tratta della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

dando al simbolo

$$(2k+1)!!$$

il significato di prodotto dei numeri dispari da 1 *a* $2k+1$.

10. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy riferito al sistema

$$\begin{cases} x' = -28x + 10y \\ y' = -75x + 27y \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 5. \end{cases}$$

10.1. Soluzione.

$\boxed{\textbf{Soluzione artigianale:}}$

Cerchiamo l'equazione lineare di secondo ordine che soddisfano le soluzioni del sistema

$$x'' = -28x' + 10(-75x + 27y) = -28x' - 750x + 27(x' + 28x)$$

ovvero

$$x'' + x' - 6x = 0$$

le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Quindi la funzione $x(t)$ é combinazione lineare $x(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}$
Tenuto conto delle condizioni iniziali $x(0) = 2, \quad y(0) = 5$ si ricava, dal sistema $x'(0) = -28.2 + 10.5 = -6$
Ne segue pertanto che le due costanti A e B devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} A + B & = 2 \\ 2A - 3B & = -6 \end{cases}, \quad \to \quad A = 0, \quad B = 2$$

Quindi riesce:

$$x(t) = 2\,e^{-3t}$$

La determinazione della $y(t)$ é analoga: l'equazione di secondo ordine é la stessa (come accade sempre nel caso omogeneo), quindi anche $y(t)$ si esprime con

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

Le condizioni iniziali per la $y(t)$ sono: $y(0) = 5$ e, di conseguenza dal sistema $y'(0) = -75.2 + 27.5 = -15$.
Il sistema per A e B é pertanto

$$\begin{cases} A + B & = 5 \\ 2A - 3B & = -15 \end{cases}, \quad \to \quad A = 0, \quad B = 5$$

Quindi riesce:

$$y(t) = 5\,e^{-3t}$$

Soluzione vettoriale:

Indicata con A la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -75 & 27 \end{pmatrix}$$

calcoliamone

- autovalori

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

- autovettori corrispondenti

$$\{1, 3\},\ \{2, 5\},$$

Integrale generale:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Il problema di Cauchy richiesto ha pertanto soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \to \quad \alpha = 0, \beta = 1$$

quindi:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

ovviamente la stessa coppia di funzioni $x(t)$ e $y(t)$ trovata precedentemente.

CAPITOLO 7

Le soluzioni del foglio 7

1. Esercizio

Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+3)!}{(2n)!} x^n \ , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x-\sqrt{2})^n}{\log{(n+1)}} \ .$$

1.1. Soluzione.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+3)!}{(2n)!} x^n \tag{9}$$

Serviamoci del criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{2^n(n+3)!}{(2n)!} x^n}{\frac{2^{n-1}(n+2)!}{(2n-2)!} x^{n-1}} \right| = |x| \frac{n+3}{n(2n-1)} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \forall x \in R$$

Quindi la serie converge (9) assolutamente per ogni x, e quindi converge per ogni x.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x-\sqrt{2})^n}{\log{(n+1)}} \tag{10}$$

Si tratta, posto

$$y = x - \sqrt{2},$$

della serie di potenze in y

$$3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{\log{(n+1)}}$$

Per riconoscere dove converge serviamoci ancora del criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{y^n}{\log(n+1)}}{\frac{y^{n-1}}{\log(n)}} \right| = |y| \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \quad \rightarrow \quad |y|$$

Ne segue che la serie converge assolutamente in ogni $y \in (-1, 1)$.
La serie originale (10) pertanto converge assolutamente e quindi converge per

$$x \in (-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$

Estremi di tale intervallo

- $x = -1 + \sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

serie che rientra nel caso delle serie a termini di segno alterno, decrescenti in modulo a 0, considerate dal Teorema di Leibnitz [1], e riconosciute convergenti.

- $x = 1 + \sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

che é una maggiorante della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

serie divergente. Pertanto la serie assegnata in tale estremo destro é divergente anch'essa.

2. Esercizio

Studiare l'insieme di convergenza della somma di serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3}(x-1)^n \ .$$

[1] Criterio di Leibnitz, Vol. I pag. 514.

2.1. Soluzione.

Indicato come sopra con

$$y = x - 1$$

la somma assegnata si scrive come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n+3} y^n \tag{11}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\left| \frac{\frac{2^n+3^n}{n+3} y^n}{\frac{2^{n-1}+3^{n-1}}{n+2} y^{n-1}} \right| = |y| \frac{2^n + 3^n}{2^{n-1} + 3^{n-1}} \frac{n+2}{n+3} = 3|y| \, \frac{(2/3)^n + 1}{(2/3)^{n-1} + 1} \, \frac{n+2}{n+3}$$

espressione che, per $n \to +\infty$ tende a $3|y|$.
La serie somma (11) assegnata converge assolutamente e quindi converge per $3|y| < 1$ ovvero

$$y \in (-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3})$$

ovvero ancora per

$$x \in (\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3})$$

Estremi di tale intervallo

- $x = \frac{2}{3}$ la prima serie delle due serie addendi converge ovviamente

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} (\frac{-1}{3})^n$$

  la seconda

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+3}$$

  converge anch'essa per il Teorema di Leibnitz sul caso dei segni alterni.

  Quindi la serie somma in tale estremo sinistro converge.
- $x = \frac{4}{3}$ la prima delle due serie addendi converge, la seconda no.

  Quindi la serie somma in tale estremo destro non converge.

3. Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-nx^2}.$$

3.1. Soluzione.

La serie assegnata é, scritta piú chiaramente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\, e^{-x^2}\right)^n \tag{12}$$

una serie geometrica costruita su

$$\rho = 2\, e^{-x^2}$$

É quindi ben noto che converge se e solo se $|\rho| < 1$ ovvero se e solo se

$$|2\, e^{-x^2}| < 1 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{\ln(2)} < |x|$$

la semiretta da $-\sqrt{\ln(2)}$ a $-\infty$ e quella da $\sqrt{\ln(2)}$ a $+\infty$.

La convergenza della (12), pensata come serie geometrica in ρ, é uniforme in ogni intervallo chiuso

$$[-a, a]$$

con $a \in (0, 1)$, 1 escluso.
Quindi la serie (12) converge uniformemente in ogni semiretta $(-\infty, -b]$ ovvero $[b, +\infty)$ con

$$b > \sqrt{\ln(2)}$$

4. Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{|x|}{4^n}\right) \quad . \tag{13}$$

4.1. Soluzione.

Tenuto conto che
$$|\ln(1+|a|)| \leq |a|,$$
i termini della serie sono maggiorati in modulo da
$$\ln(1+\frac{|x|}{4^n}) \leq \frac{|x|}{4^n}$$
In altri termini la serie geometrica convergente
$$|x|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
é una maggiorante della serie dei moduli
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\log\left(1+\frac{|x|}{4^n}\right)\right|,$$
pertanto la serie assegnata é convergente qualunque sia x.

4.2. La convergenza uniforme. Detta $S(x)$ la somma della (13) riesce
$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{|x|}{4^k}\right)\right| \leq |x|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
Indicato con
$$\varepsilon_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
resto n-esimo di una serie numerica convergente, e quindi infinitesimo per $n\to+\infty$ si ha
$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{|x|}{4^k}\right)\right| \leq \varepsilon_n|x| \tag{14}$$

Se $x \in [-M, M]$, intervallo limitato, allora la quantitá a secondo membro di (14) si maggiora, per tutti tali x con
$$M\varepsilon_n$$
Quindi la serie (13) converge uniformemente in ogni intervallo limitato.

5. Esercizio

Siano

$$f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1), \quad n = 1, 2, ...$$

si calcoli $f(x)$*, limite puntuale della successione di funzioni in* $\mathbb{R}$ *e si dica se tale convergenza è uniforme negli insiemi* $[0,1]$ *e* $[0,+\infty[$*.*

5.1. Soluzione.

Consideriamo prima di tutto il caso di $x = 0$: tutte le f_n in tale punto valgono 0 e quindi

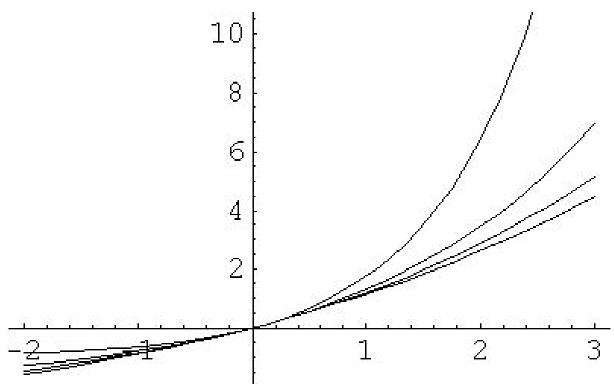


FIGURA 1. La successione $f_n(x)$ dell'esercizio 5.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$$

Negli altri punti $x \neq 0$ teniamo conto che

$$e^{x/n} - 1 = \frac{x}{n} e^{\tau_n} \tag{15}$$

relazione dedotta semplicemente dal teorema di Lagrange

$$e^a - e^b = (a - b)\, e^{\xi}$$

pensando ad $a = x/n$ e $b = 0$ La (15) produce quindi

$$n(e^{\frac{x}{n}} - 1) = x\, e^{\tau_n}, \quad \tau_n \in (-|x|/n, |x|/n)$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n} = 0$$

ne segue che anche

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = 0$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} x\, e^{\tau_n} = x$$

Riesce quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$$

5.2. La convergenza uniforme. Consideriamo la differenza

$$f_n(x) - x = n\left(e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n}\right)$$

Dalla formula di Taylor si ha del resto

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2\, e^{\tau}$$

che pensando a

$$t = \frac{x}{n}$$

produce

$$e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\, e^{\tau_n}$$

ovvero

$$f_n(x) - x = n\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\, e^{\tau_n}$$

Se

$$x \in [-M, M], \quad \to \quad \tau_n \in [-M, M]$$

riesce pertanto

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{2n} M^2 e^M$$

Tenuto presente che la quantitá secondo membro non dipende da x ed é un infinitesimo si riconosce che la successione $\{f_n(x)\}$ assegnata converge ad x uniformemente in ogni intervallo limitato.

Quindi

- per $x \in [0, 1]$ la convergenza é uniforme,
- per $x \in [0, +\infty)$ la convergenza non é uniforme.

6. Esercizio

Dopo aver determinato l'insieme di convergenza di

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x^n}{4^n}\ ,$$

si calcoli l'integrale $\int_0^2 f(x)\ dx$.

6.1. Soluzione.

La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x^n}{4^n} \tag{16}$$

converge, assolutamente, se

$$\left|\frac{\frac{(n+1)x^n}{4^n}}{\frac{n\,x^{n-1}}{4^{n-1}}}\right| = \left|\frac{x}{4}\right|\ \frac{n+1}{n} \quad\to\left|\frac{x}{4}\right|<1$$

ovvero converge assolutamente per

$$x\in(-4,\,4)$$

e, com'é noto per tutte le serie di potenze, converge uniformemente in ogni intervallo

$$[a,b]\subseteq(-4,\,4)$$

Quindi la serie (16) converge uniformemente in [0, 2] e quindi in tale intervallo riesce

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)x^k}{4^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^2\frac{(k+1)x^k}{4^k}dx$$

da cui, calcolando gli integrali

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=2$$

7. Esercizio

Trovare lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ *e calcolare* $f^{(7)}(0)$.

7.1. Soluzione.

Tenuto presente che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad \forall x \in (-1,1) \tag{17}$$

e tenuto presente che in ogni intervallo chiuso

$$[a,b] \subseteq (-1,\,1)$$

si puó liberamente derivare termine, si ha anche

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

Del resto i coefficienti $a_0, a_1, a_2, ...$ di una serie di potenze hanno rispetto alla somma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$$

i seguenti significati, deducibili per derivazione nel punto $x = 0$:

$$\begin{array}{l} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = \frac{1}{2} f''(0) \\ a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) \\ \text{ecc.} \end{array}$$

Da tale osservazione si riconosce che, nel caso dell'esercizio,

$$f^{[k]}(0) = k!\, a_k = (k+1)!$$

e quindi

$$f^{[7]}(0) = 8!$$

Le ridotte

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$$

rappresentano, qualunque sia n, i polinomi di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n-1$.

8. Esercizio

Calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}\ , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{4n-1}\ .$$

8.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima serie:}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-x)^3)^n}{n!} = e^{-x^3}$$

$\boxed{\text{Seconda serie:}}$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{1-x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{4k} \quad \to \quad \frac{4x^3}{(1-x^4)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} 4k\, x^{4k-1}$$

se ne deduce che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{4n-1} = \frac{1}{4} \frac{4x^3}{(1-x^4)^2}$$

CAPITOLO 8

Le soluzioni del foglio 8

1. Esercizio

Dire se le funzioni

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \qquad \frac{e^x-1}{x^2}, \qquad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[0,1]$ *e* $(0,+\infty)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}$$
  É continua in $[0,1]$, esiste infatti il limite per $x \to 0$: quindi l'integrale in tale intervallo esiste in senso classico. Si maggiora, da $x \geq 1$ in poi con
  $$\frac{1}{1+x^2}$$
  quindi esiste l'integrale, in senso improprio su $(0,+\infty)$.
- $$\frac{e^x-1}{x^2}$$
  Tenuto conto che
  $$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...$$
  si ha
  $$\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + ...\}$$
  ovvero
  $$\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$
  avendo indicato con $\varphi(x)$ la somma, continua, della serie a secondo membro.

Tenuto conto che $\varphi(x)$ é integrabile su $[0,1]$ mentre $\frac{1}{x}$ non lo é se ne conclude che la funzione assegnata non é integrabile su $[0,1]$

Per quanto concerne l'integrale su $(0,+\infty)$ é evidente che non esiste in quanto abbiamo giá riconosciuto la divergenza sul solo primo tratto $(0,1)$.

Tenuto conto, anche indipendentemente da quanto studiato su $(0,1)$, che la funzione assegnata

$$\frac{e^x - 1}{x^2}$$

diverge per $x \to \infty$ (l'esponenziale a numeratore infatti diverge com'é noto piú della potenza x^2 a denominatore) si riconosce nuovamente che non esiste l'integrale improprio su $(0,+\infty)$.

- $$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

Il fattore

$$\frac{\sin(x)}{x}$$

é limitato da 1 e quindi

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

condizione sufficiente a riconoscere l'integrabilitá della funzione assegnata su $[0,1]$ Per quanto concerne $(0,+\infty)$ osserviamo che,

$$(0,+\infty) = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

su $(0,1)$ l'integrale improprio é stato giá studiato.

Per $x \geq 1$ riesce

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$

circostanza anche questa sufficiente a riconoscere, la esistenza dell'integrale improprio su $(1,+\infty)$.

Quindi esiste l'integrale improprio su $(0,+\infty)$.

2. Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$x^\beta e^{-x}$$

è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1, +\infty)$ *per ogni* $\beta \in \mathbb{R}$ *e calcolare l'integrale per* $\beta = 0, 1, 2$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \frac{1}{m!}x^m + \dots$$

verifica, per ogni $x \geq 0$ la diseguaglianza

$$e^x \geq \frac{1}{m!}x^m$$

qualunque il naturale m.
Pertanto

$$x^\beta e^{-x} = \frac{x^\beta}{e^x} \leq m! \frac{1}{x^{m-\beta}}$$

stima quest'ultima sufficiente per

$$m - \beta > 1$$

a riconoscere l'esistenza dell'integrale improprio su $(1, +\infty)$.
I valori richiesti sono

$$\begin{cases} \int_1^a e^{-x} dx & = e^{-1} - e^{-a} & \to & 1, \\ \int_1^a x\, e^{-x} dx & = 2\, e^{-1} - \frac{1+a}{e^a} & \to & 1, \\ \int_1^a x^2\, e^{-x} dx & = 5\, e^{-1} - \frac{2+2\,a+a^2}{e^a} & \to & 2. \end{cases}$$

3. Esercizio

Dire per quali $\beta > 0$ *esiste l'integrale improprio*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\, dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{x\log^{\beta}(x)}$$

é positiva su $(2, +\infty)$: pertanto per decidere se l'integrale improprio esiste basta esaminare se esiste il limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x\log^{\beta}(x)}dx$$

Il calcolo é facile:

- se $\beta \neq 1$ riesce
$$\int_2^t \frac{1}{x\log^{\beta} x}dx = \frac{1}{1-\beta}\left\{(\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta}\right\}$$
- se $\beta = 1$ riesce
$$\int_2^t \frac{1}{x\log x}dx = \log(\log(t)) - \log(\log(2))$$

Pertanto nel primo caso si ha convergenza solo se $\beta > 1$, mentre nel secondo caso non c'é convergenza.
RIASSUMENDO l'integrale improprio richiesto esiste se e solo se $\beta > 1$.
Per tali valori β legittimi l'integrale vale, ovviamente,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\beta}\left\{(\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta}\right\} = \frac{(\log(2))^{1-\beta}}{\beta-1}$$

4. Esercizio

Verificare che esiste l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1}\sin(\frac{1}{x})dx$$

e determinarne il valore.

Soluzione:

L'integrale richiesto corrisponde all'esistenza dei due integrali impropri

$$\int_{-1}^{0}\sin(\frac{1}{x})dx, \quad \int_{0}^{1}\sin(\frac{1}{x})dx$$

Essi esistono entrambi tenuto conto che la funzione integranda é limitata

$$\left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leq 1$$

condizione sufficiente all'esistenza dell'integrale improprio di una funzione continua all'interno dell'intervallo assegnato.
Riesce quindi:

$$\int_{-1}^{1} \sin(\frac{1}{x})dx = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{-1}^{-1/n} \sin(\frac{1}{x})dx + \int_{1/n}^{1} \sin(\frac{1}{x})dx \right\} = 0$$

avendo tenuto conto che, essendo $\sin(1/x)$ funzione dispari riesce

$$\int_{-1}^{-1/n} \sin(\frac{1}{x})dx = -\int_{1/n}^{1} \sin(\frac{1}{x})dx$$

5. Esercizio

Dire se è integrabile in senso improprio la funzione $\log(x^2 + y^2)$ nell'insieme $B(0,1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1\}$. Se integrabile. si calcoli esplicitamente tale integrale improprio.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda diverge nell'origine.
Tenuto conto tuttavia che

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log(t) = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

se ne deduce che

$$|t^\alpha \log(t)| \le M \quad \leftrightarrow \quad |\log(t)| \le \frac{M}{|t|^\alpha}$$

ovvero

$$|\log(x^2 + y^2)| \le M \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

diseguaglianza che, scelto $\alpha < 1$ é sufficiente a garantire l'esistenza dell'integrale doppio improprio.
Il valore di tale integrale corrisponde pertanto al limite

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} \log(x^2 + y^2)dxdy, \quad B_n : \sqrt{\frac{i}{n}} \le x^2 + y^2 \le 1$$

Il calcolo di ciascun integrale sulle corone circolari scelte si esegue tramite le coordinate polari

$$\iint_{B_n} \log(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{1/n}}^{1} \log(\rho^2)\rho d\rho = 4\pi \int_{\sqrt{1/n}}^{1} \log(\rho)\rho d\rho$$

Eseguiti i calcoli riesce

$$\iint_{B_n} \log(x^2+y^2)dxdy = 4\pi\left\{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}[\log(1/\sqrt{n})-\frac{1}{2}]\right\} \quad \to \quad -\pi$$

6. Esercizio

Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio

$$\int\int_{R^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^\beta}\, dx\, dy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda, continua in tutto R^2, verifica la diseguaglianza

$$\frac{1}{1+(x^2+y^2)^\beta} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{2\beta}}$$

dalla quale segue l'esistenza dell'integrale improprio non appena

$$2\beta > 2$$

ovvero $\beta > 1$.
Per $\beta = 1$ l'integrale diverge, infatti gli integrali sui cerchi di centro l'origine e raggio $\rho = n$ danno, come valori

$$2\pi \int_0^n \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho = \pi \log(1+n^2) \to \infty$$

ovviamente divergente.
Le funzioni costruite su valori $\beta < 1$ sono addirittura maggiori di quella relativa a $\beta = 1$; se diverge l'integrale di questa figuriamoci come divergeranno quelli per $\beta < 1$...

7. Esercizio

Dire per quali β esiste l'integrale doppio improprio

$$\int\int_C \frac{(x-y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}, \quad C = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

e, per i β possibili, calcolare l'integrale.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda $f(x,y)$ soddisfa, indicato con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ la diseguaglianza

$$|f(x,y)| \leq M\frac{\rho^3}{\rho^{2\beta}}$$

da cui si riconosce l'esistenza dell'integrale doppio improprio se

$$2\beta - 3 < 2, \quad \leftrightarrow \quad \beta < \frac{5}{2}$$

Per tali valori β leciti esiste l'integrale doppio improprio e vale 0 per le evidenti proprietá dispari della $f(x, y)$ al di sopra e al di sotto della retta $x - y = 0$ che divide il cerchio assegnato in due semicerchi.
Se $\beta > \frac{5}{2}$ l'integrale improprio di $|f(x,y)|$ diverge come si riconosce lavorando sulle corone circolari

$$B_n : \sqrt{\frac{1}{n}} < x^2 + y^2 \leq 1$$

Gli integrali cui si perviene, servendosi delle coordinate polari sono infatti

$$\int_0^{2\pi} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 d\theta \int_{\sqrt{1/n}}^1 \rho^{4-2\beta} d\rho =$$

$$= \frac{1}{5-2\beta}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{5-2\beta} - 1\right\}\int_0^{2\pi} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 d\theta$$

nei quali é evidente la divergenza del termine

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{5-2\beta}$$

Il caso $\beta = \frac{5}{2}$ diverge anch'esso: nell'integrazione in luogo delle potenze precedenti spunta un logaritmo...

Parte 2

Le esercitazioni 2004/2005

CAPITOLO 9

Le soluzioni del foglio 1

1. Esercizio

Sia

$$F(x,y) = 2x^2 + 5\Delta x\Delta y + 11\Delta x - 3\Delta y^2 - 2\Delta y + 5$$

- *Disegnare la linea di livello* $F(x,y) = 0$,
- *giustificare l'affermazione:* $F(x,y) = 0$ *non definisce implicitamente né una funzione* $y = g(x)$ *né una* $x = h(y)$ *in alcun intorno di* $(-8/7, -9/7)$.
- *definisce invece una funzione implicita* $y = f(x)$ *in un intorno di* $(1,-2)$
- *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale* $f(x)$ *e di punto iniziale* $(1,-2)$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- $$F(x,y) = (x + 3\Delta y + 5)\Delta(2\Delta x - y + 1)$$
  pertanto la linea di livello é formata dalle due rette $x + 3\Delta y + 5 = 0$ e $2\Delta x - y + 1 = 0$
  La fattorizzazione di $F(x,y)$ osservata corrisponde allo spezzamento della conica $F(x,y) = 0$ in due rette [1]
- il punto $(-8/7, -9/7)$ é l'intersezione delle due rette di sopra.
- il punto $(1,-2)$ appartiene alla retta $x + 3\Delta y + 5 = 0$, la funzione implicita é
  $$y = f(x) = -\frac{1}{3}(x+5)$$
- l'espressione data sopra per $f(x)$ é giá quella dello sviluppo di Taylor richiesto.

[1] Ricordate che scritta l'espressione di secondo grado della conica nella forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

lo spezzamento corrisponde all'annullarsi del determinante della matrice (a_{hk}).

2. Esercizio

Sia

$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1 \ ,$$

- *dimostrare che $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ definita in un intorno di $x = 0$;*
- *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale $f(x)$ e di punto iniziale $x = 0$*
- *calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \ .$$

Soluzione

- $F(0,0) = 0, \quad F_y(0,0) = 1 \neq 0$, quindi esiste $y = f(x)$ definita, vedi Figura 1, in un intorno di $x = 0$.
  La funzione implicita[2] $y = f(x)$ é in realtá definita almeno per ogni $x \geq 0$: infatti e^{2y^3+y} é monotona crescente[3] e al variare di $y \in (-\infty, +\infty)$ prende tutti i valori positivi, quindi in particolare quelli espressi da $x^3 + x + 1$ per ogni $x \geq 0$.
  Tenuto conto che l'espressione x^3+x+1 é positiva per $x > -0.67...$ se ne deduce che per $x > -0.67...$ esiste ed é unica y tale che $e^{2y^3+y} = x^3 + x + 1$.
-
$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = x - \frac{1}{2}x^2$$

  Il calcolo dei due coefficienti é stato condotto con le regole che forniscono le derivate della funzione implicita nel punto x_0.
- Servendosi della precedente approssimazione di Taylor si ha

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

  La risposta é... *il limite non esiste* !

[2] In Figura 1 il piano $z = 0$ é quello quadrettato fine, la superficie interseca il piano lungo una linea ben visibile $y \simeq x - \frac{1}{2}x^2$: in orizzontale l'asse x, in obliquo crescente l'asse y

[3] É composta da due funzioni crescenti e^t e $2t^3 + t$

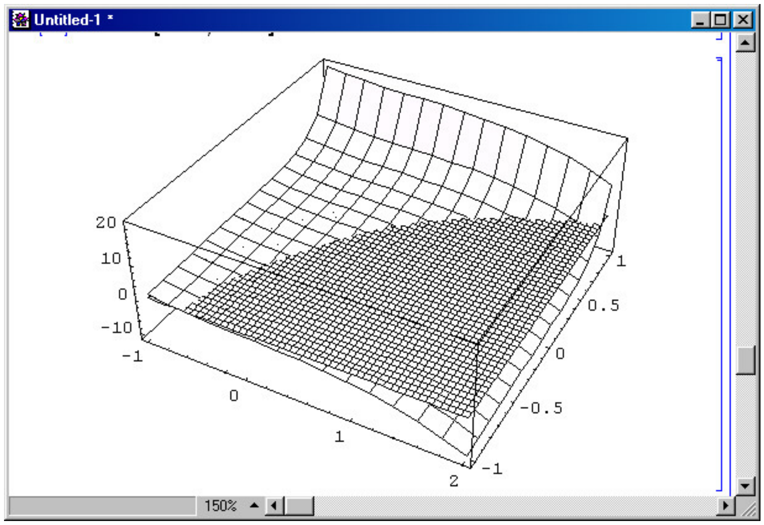


FIGURA 1. $z = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1$ e $z = 0$

3. Esercizio

Assegnato il sistema

$$\begin{cases} y^2 + x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

- *dimostrare che in un intorno del punto (0,0,1) il sistema definisce implicitamente due funzioni* $\alpha(x), \beta(x)$ *tali che* $(x, \alpha(x), \beta(x))$ *siano soluzioni del sistema.*
- *calcolare poi* $\alpha'(0), \beta'(0)$.
- *riconoscere il legame geometrico tra la curva*

  $$x = t, \quad y = \alpha(t), \quad z = \beta(t)$$

  e le due superfici di equazioni

  $$z = 1 - y^2 - x - y, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- Il punto $(0, 0, 1)$ soddisfa il sistema, lo jacobiano

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 2y + 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}$$

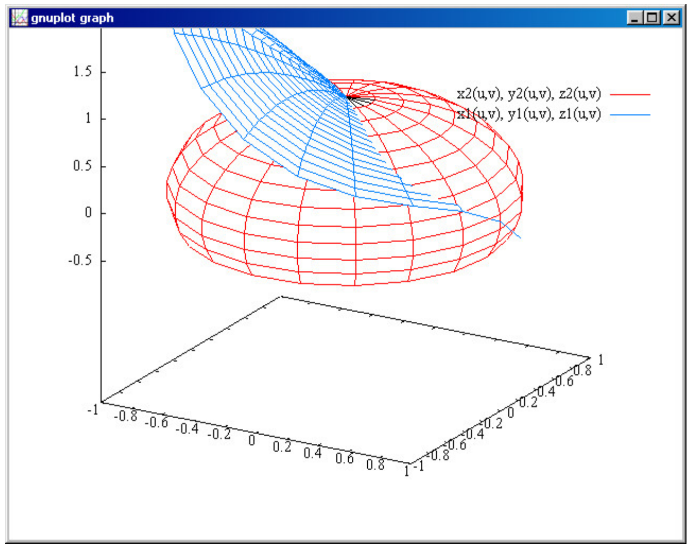


FIGURA 2. L'intersezione delle due superfici

possiede, nel punto, determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ne deriva la possibilitá di ricavare y e z in funzione della x, per x in un intorno I dell'origine.

- Posto $f(x, y, z) = y^2+x+y+z-1$ e $g(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$ si ha, sostituendo ad y e a z le $\alpha(x)$ e $\beta(x)$

$$\begin{cases} f(x, \alpha(x), \beta'(x)) \equiv 0 \\ g(x, \alpha(x), \beta'(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

da cui, derivando rispetto a x,

$$\begin{cases} f_x + f_y\alpha'(x) + f_z\beta'(x) = 0 \\ g_x + g_y\alpha'(x) + g_z\beta'(x) = 0 \end{cases}$$

Lavorando nel punto $(0, 0, 1)$ si ha

$$\begin{cases} 1 + \alpha'(0) + \beta'(0) = 0 \\ 2\beta'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha'(0) = -1,\ \beta'(0) = 0$$

- La curva di equazioni parametriche $x = t, \quad y = \alpha(t), \quad z = \beta(t)$ con $t \in I$. l'intorno in cui le due α e β sono definite, rappresenta la linea intersezione delle due superfici:
  - la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
  - la superficie cartesiana $z = 1 - y^2 - x - y$

4. Esercizio

Sia

$$F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 6z^2 + 2x - 3y - 4 \ ,$$

- *dimostrare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = f(x,y)$ in un intorno del punto (0,2,1),*
- *determinare il piano tangente alla superficie nel punto (0,2,1).*
- *riconoscere la forma geometrica della superficie trovata.*

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- $F(0,2,1) = 0, \quad F_z(0,2,1) = 2 \neq 0$, quindi la superficie di livello $F(x,y,z) = 0$ coincide, in un intorno di $(0,2,1)$ col grafico di una funzione $z = f(x,y)$
- $$\begin{cases} F_x + F_z f_x = 0 \\ F_y + F_z f_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 + 12 f_x = 0 \\ 1 + 12 f_y = 0 \end{cases}$$

  Se ne ricava

  $$f_x(0,2) = -\frac{1}{6}, \quad f_y(0,2) = -\frac{1}{12}$$

  Il piano tangente é, pertanto,

  $$z = 1 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}(y-2)$$

- L'equazione $F(x,y,z) = 0$ é l'equazione di una quadrica dello spazio xyz : tenuto conto che la parte quadratica é definita positiva si riconosce che si tratta di un'ellissoide che si puó scrivere in forma canonica con pochi semplici passaggi algebrici

$$3x^2 + y^2 + 6z^2 + 2x - 3y - 4 =$$

$$= 3(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + (y^2 - 3y + \frac{9}{4}) + 6z^2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{9}{4} =$$

$$= 3(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 + 6z^2 - \frac{79}{12}$$

$$\frac{(x + \frac{1}{3})^2}{\frac{79}{36}} + \frac{(y - \frac{3}{2})^2}{\frac{79}{12}} + \frac{z^2}{\frac{79}{72}} = 1$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Disegnare l'ellissoide con Gnuplot:*

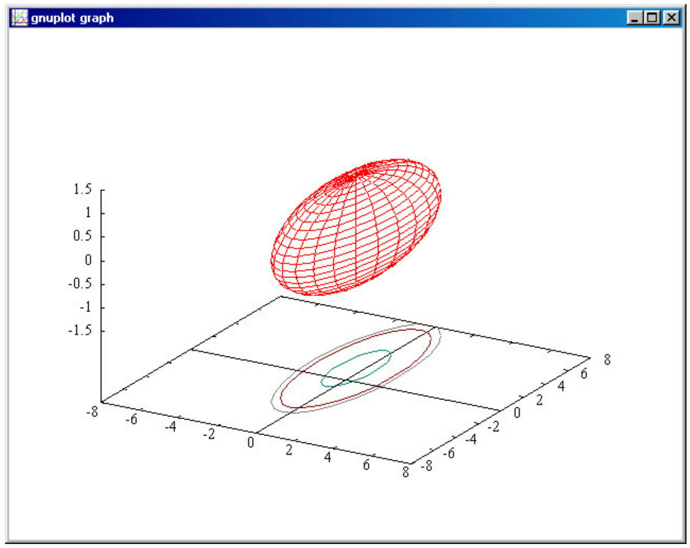


FIGURA 3. L'ellissoide

```
gnuplot> x(u,v) = -1./3.+79./36.*sin(u)*cos(v)
gnuplot> y(u,v) = 3./2. + 79./12.*sin(u)*sin(v)
gnuplot> z(u,v)=79./72.*cos(u)
gnuplot> set xrange [-8:8]
gnuplot> set yrange [-8:8]
gnuplot> set zrange [-1.5:1.5]
gnuplot> set parametric
gnuplot> set urange [0:pi]
gnuplot> set vrange [0:2*pi]
gnuplot> splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)
gnuplot>
```

5. Esercizio

Sia

$$F(x,y) = y^3 + (x^2+1)y - 3x^2$$

- *dimostrare che l'equazione* $F(x,y) = 0$ *definisce una funzione implicita* $y = g(x)$ *definita per ogni* x
- *calcolare le derivate* $g'(1), g''(1), g'''(1)$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- L'equazione $F(x, y) = 0$, equazione di grado dispari (terzo) in y ha sicuramente soluzioni qualunque siano i coefficienti e, quindi, qualunque sia x.
  Tali soluzioni, vedi Figura 4, sono poi una sola tenuto conto che l'espressione $F(x, y)$ é, qualunque sia x strettamente crescente rispetto ad y:
  $$F_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 1 \geq 1$$
  quindi se in corrispondenza ad un x_0 riesce $F(x_0, y_0) = 0$ sicuramente riesce $F(x_0, y) > 0$ per gli $y > y_0$ e $F(x_0, y) < 0$ per gli $y < y_0$, non ci sono quindi altre radici.

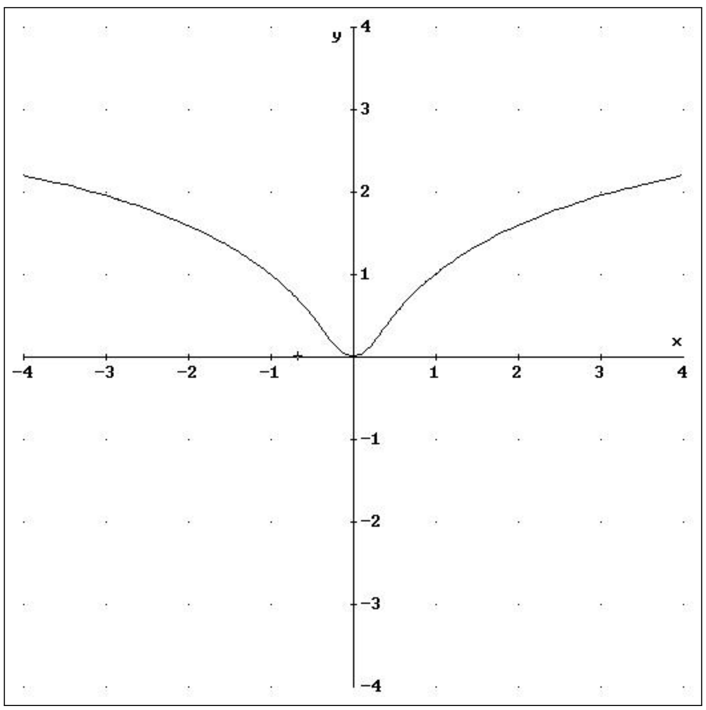


FIGURA 4. $y^3 + (x^2 + 1)y - 3x^2 = 0$, il grafico della $y = g(x)$

Chiamiamo la radice y relativa al valore x
$$y = g(x)$$

-

$$F(x, g(x)) \equiv 0 \to \begin{cases} F_x + F_y g'(x) = 0, \\ F_{xx} + 2F_{xy}g'(x) + F_{yy}(g'(x))^2 + F_y g''(x) = 0 \end{cases}$$

$$F(1,y)=0 \rightarrow y=1: \quad g(1)=1$$

$$F_x(1,1)+F_y(1,1)g'(1)=0 \quad -4+5g'(1)=0 \quad \rightarrow g'(1)=\frac{4}{5}$$

$$-4+2\times 4\frac{4}{5}+6\times(\frac{4}{5})^2+5\,g''(1)=0 \quad \rightarrow g''(1)=-\frac{156}{125}$$

6. Esercizio

Sia

$$F(x,y,z)=e^z+x^2y^2z-e^{xy}+x^4-y^4$$

- *dimostrare che l'equazione $F(x,y,z)=0$ determina una funzione implicita $z=g(x,y)$ definita per (x,y) in un intorno dell'origine.*
- *determinare il valore $g(0,0)$*
- *riconoscere che l'origine é un punto stazionario per la $g(x,y)$*
- *riconoscere il tipo di tale punto: minimo, massimo o sella.*

Soluzione

- $F(0,0,0)=0, F_z=e^z+x^2y \quad F_z(0,0,0)=1\neq 0$ quindi la superficie di livello $F(x,y,z)=0$ coincide, in un intorno dell'origine con il grafico di una funzione $z=g(x,y)$ regolare che prende il valore $g(0,0)=0$.
- Occorre riconoscere che
$$\nabla g(0,0)=\{0,0\}: F_x+F_zg_x=0.F_y+F_zg_y=0$$
eseguiti i conti in corrispondenza di $x=0,y=0$ si ottiene infatti
$$g_x(0,0)=0, g_y(0,0)=0$$
- Il tipo di tale punto stazionario per g si riconosce studiando il determinante della matrice hessiana nel punto
$$\begin{vmatrix} g_{xx}(0,0) & g_{xy}(0,0)\\ g_{yx}(0,0) & g_{yy}(0,0)\end{vmatrix}$$
Calcolo della derivata g_{xx} :
$$12\,x^2-e^{x\,y}\,y^2+2\,y^2\,g(x,y)+4\,x\,y^2\,g^{(1,0)}(x,y)+$$
$$+e^{g(x,y)}\,{g^{(1,0)}(x,y)}^2+e^{g(x,y)}\,g^{(2,0)}(x,y)+x^2\,y^2\,g^{(2,0)}(x,y)=0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che le due derivate prime $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, il valore

$$g_{xx}(0,0) = 0$$

Calcolo della derivata g_{yy} :

$$-\left(e^{x\,y}\,x^2\right) - 12\,y^2 + 2\,x^2\,g(x,y) + 4\,x^2\,y\,g^{(0,1)}(x,y) +$$

$$+ e^{g(x,y)}\,g^{(0,1)}(x,y)^2 + e^{g(x,y)}\,g^{(0,2)}(x,y) + x^2\,y^2\,g^{(0,2)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che le due derivate prime $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, il valore

$$g_{yy}(0,0) = 0$$

Calcolo della derivata g_{xy} :

$$-e^{x\,y} - e^{x\,y}\,x\,y + 4\,x\,y\,g(x,y) + 2\,x\,y^2\,g^{(0,1)}(x,y) +$$

$$+2\,x^2\,y\,g^{(1,0)}(x,y) + e^{g(x,y)}\,g^{(0,1)}(x,y)\,g^{(1,0)}(x,y) +$$

$$+ e^{g(x,y)}\,g^{(1,1)}(x,y) + x^2\,y^2\,g^{(1,1)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che le due derivate prime $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, il valore

$$g_{xy}(0,0) = 1$$

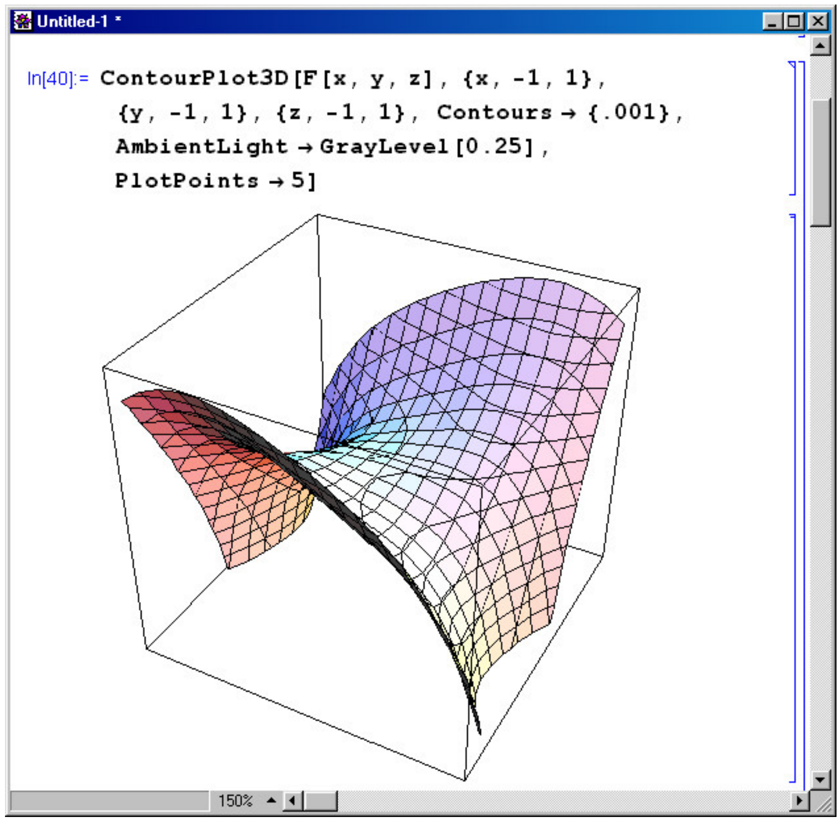


FIGURA 5. $e^z + x^2y^2z - e^{xy} + x^4 - y^4 = 0$

Sostituendo i valori trovati nel determinante hessiano si ottiene il valore -1 e quindi si riconosce che il punto stazionario $x = 0$, $y = 0$, vedi Figura 5, é un punto di sella per g.

7. Esercizio

Sia

$$F(x, y, z) = e^z + (x^2 - y^2)z - (1 + xy)e^{\sin(x^2+y^2)}$$

- *dimostrare che l'equazione* $F(x, y, z) = 0$ *determina una funzione implicita* $z = g(x, y)$ *definita per* $(x, y) \in$ *in un intorno dell'origine.*
- *determinare il valore* $g(0, 0)$,

- *riconoscere che $g \in C^\infty$*
- *riconoscere che l'origine é un punto stazionario per g e riconoscerne il tipo.*

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- $F(0,0,0) = 0, F_z(0,0,0) = 1,$ la superficie $F(x,y,z) = 0$ coincide, in un intorno dell'origine con il grafico di una funzione $z = g(x,y)$ con $g(0,0) = 0$.
- essendo $F \in C^\infty$ tale riesce, nell'intorno dell'origine in cui é definita, la funzione implicita $g(x,y)$.
-

$$F_x + F_z g_x = -\left(e^{\sin(x^2+y^2)}\, y\right) - 2\, e^{\sin(x^2+y^2)}\, x\ (1 + x\, y)\ \cos(x^2+y^2) +$$

$$+2\, x\, g(x,y) + e^{g(x,y)}\, g^{(1,0)}(x,y) + \left(x^2 - y^2\right)\ g^{(1,0)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che $g(0,0) = 0$, il valore

$$g_x(0,0) = 0$$

$$Fy + F_z g_y = -\left(e^{\sin(x^2+y^2)}\, x\right) - 2\, e^{\sin(x^2+y^2)}\, y\ (1 + x\, y)\ \cos(x^2+y^2) -$$

$$-2\, y\, g(x,y) + e^{g(x,y)}\, g^{(0,1)}(x,y) + \left(x^2 - y^2\right)\ g^{(0,1)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che $g(0,0) = 0$, il valore

$$g_y(0,0) = 0$$

Il calcolo delle derivate seconde della $g(x,y)$ é abbastanza oneroso: conviene chiamare

$$G[x,y,z] := e^z + (x^2 - y^2) * z,$$

$$F[x,y] := (1 + x * y) * e^{Sin[x^2+y^2]}$$

e lavorare uguagliando le derivate

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G[x,y,g(x,y)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F[x,y],$$

ecc.ecc. per $x = 0, y = 0$.
Si puó lavorare con *Mathematica*, vedi Figura 6, ottenendo i seguenti valori:

$$g_{xx}(0,0) = 2, \quad g_{xy}(0.0) = 1, \quad g_{yy}(0,0) = 2$$

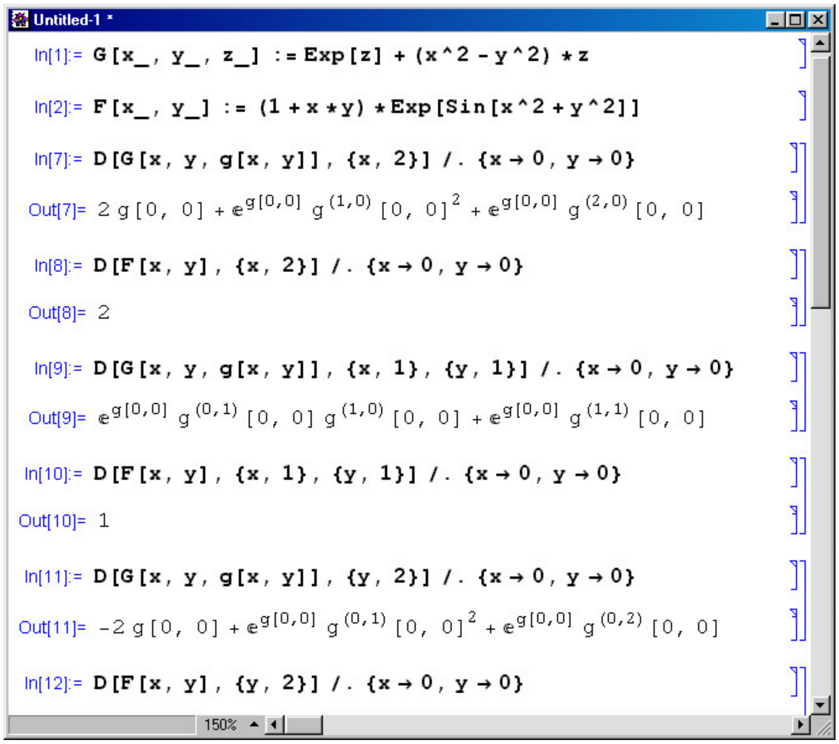


FIGURA 6. Il calcolo delle derivate con *Mathematica*

Il determinante hessiano corrispondente a tali derivate seconde é positivo, tenuto conto che anche g_{xx} é positivo se ne conclude che il punto stazionario é punto di minimo, vedi Figura 7

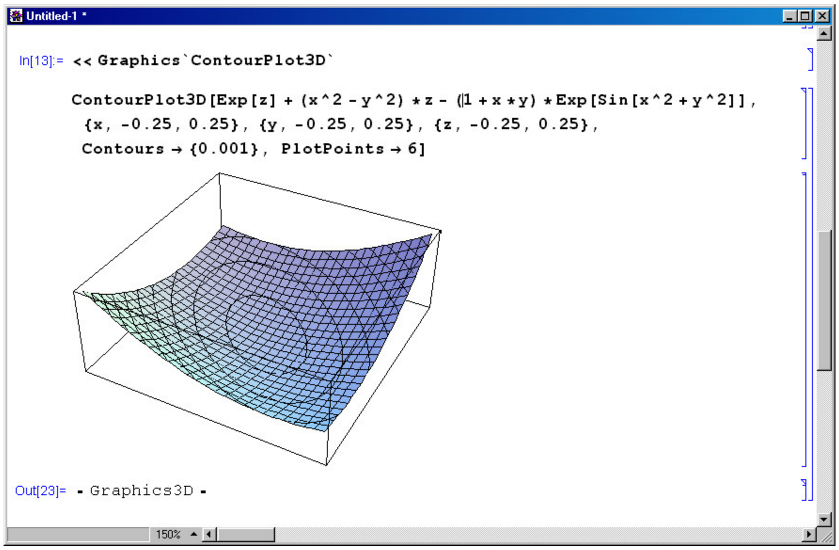


FIGURA 7. Il grafico della $z = g(x, y)$

CAPITOLO 10

Le soluzioni del foglio 2

1. Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) ds$$

essendo $\mathcal{C}$ *il segmento di estremi* $(0,0)$ *e* $(3,4)$.
Calcolare il massimo M *di* $x^2 + y^2$ *sul segmento e verificare la diseguaglianza*

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) ds \leq M \times lungh(\mathcal{C})$$

Soluzione

Il segmento $\mathcal{C}$ di estremi $(0,0)$ e $(3,4)$ ha la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

quindi

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2) ds = \int_0^1 \left[(3t)^2 + (4t)^2\right] \sqrt{3^2 + 4^2}\, dt = \int_0^1 25\, t^2 \sqrt{25} dt = \frac{125}{3}$$

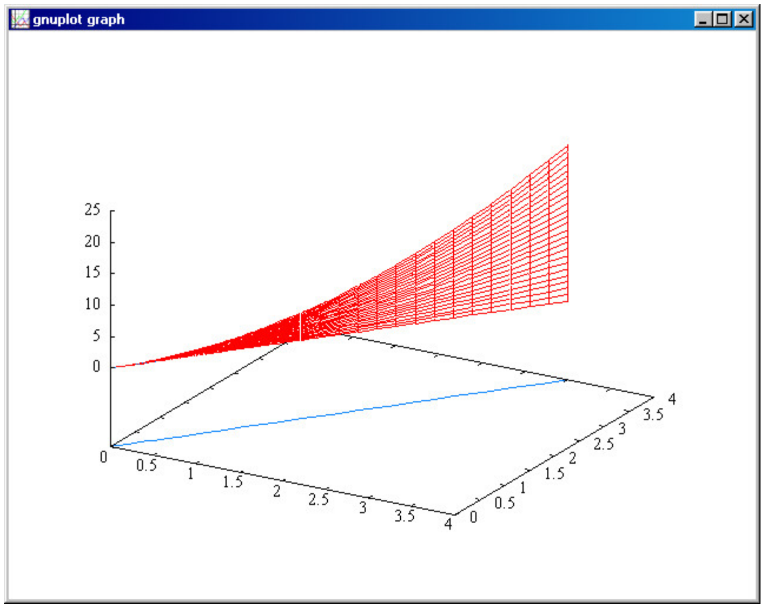


FIGURA 1. L'integrale curvilineo come area

Il valore dell'integrale rappresenta l'area del muro, vedi Figura 1, eretto in corrispondenza del segmento $\mathcal{C}$ disegnato sul piano base xy e di altezza in ogni punto (x, y) pari a $x^2 + y^2$.

Tenuto conto che

$$\max_{(x,y)\in\mathcal{C}} (x^2 + y^2) = 3^2 + 4^2 = 25$$

e che

$$lungh(\mathcal{C}) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

si riconosce che il valore trovato 125/3 dell'integrale curvilineo verifica la diseguaglianza

$$\frac{125}{3} \leq 25 \times 5$$

2. Esercizio

Sia $\overrightarrow{F} = \{1 + 2x + 3y, 4 + 5x + 6y\}$ *e* $\mathcal{C}$ *il segmento di estremi* $(0, 0)$ e $(1, 2)$

- *Disegnare, con la convenzione delle freccette, il campo* F *in tre punti di* $\mathcal{C}$

- *Calcolare il flusso* $\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds$ *essendo* $\overrightarrow{\nu}$ *il versore normale al segmento diretto nella direzione delle* x *crescenti.*

$\boxed{\text{Soluzione}}$

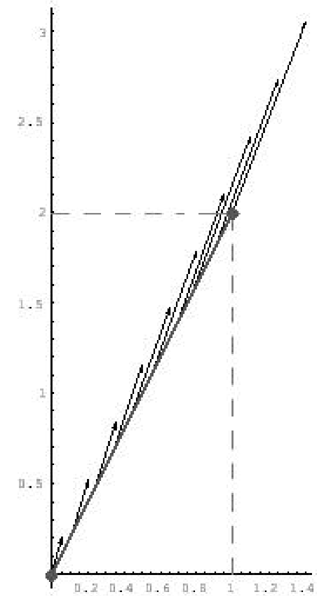


Figura 2. Il campo F sul segmento assegnato

Guardando il campo F, vedi Figura 2, si riconosce che esso é quasi parallelo al segmento e, semmai diretto verso le x decrescenti: questo significa che ci aspettiamo un flusso di F attraverso il segmento

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \nu\, ds$$

negativo e... basso!
Il versore ν richiesto é

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \quad F \times \nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{2(1+2x+3y) - (4+5x+6y)\right\}$$

ne segue

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \nu\, ds = \frac{-1}{\sqrt{5}} \int_0^1 (2+t)\sqrt{5}\, dt = -2.5$$

3. Esercizio

Sia $f(x,y) = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5y^2$ *calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{df}{d\nu} ds$$

essendo $\mathcal{C}$ *la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e* ν *la direzione normale esterna.*

Soluzione

Si chiede l'integrale curvilineo di una derivata direzionale

$$\frac{df}{d\nu} = \nabla f \times \nu$$

Essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 il versore ν normale esterno in ogni punto (x,y) della circonferenza é

$$\nu = \{x,\, y\}$$

Pertanto

$$\frac{df}{d\nu} = x\,\frac{\partial}{\partial x}\,f + y\,\frac{\partial}{\partial y}\,f = 2x + 8x^2 + 3y + 10y^2$$

quindi, tenuta presente la ben nota rappresentazione parametrica della circonferenza si ha

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{df}{d\nu} ds = \int_0^{2\pi} \left\{2\cos(t) + 8\cos^2(t) + 3\sin(t) + 10\sin^2(t)\right\}\, dt = 18\pi$$

Come si riconosce dalla Figura 3, il grafico di $f(x,y)$ arriva ai punti della circonferenza, muovendosi dall'interno verso l'esterno, in salita... Questo spiega il segno della derivata direzionale trovata, $2x + 8x^2 + 3y + 10y^2$, segno positivo[1] su tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, e quindi il segno positivo dell'integrale curvilineo calcolato.

[1]Non é del tutto banale riconoscerlo...

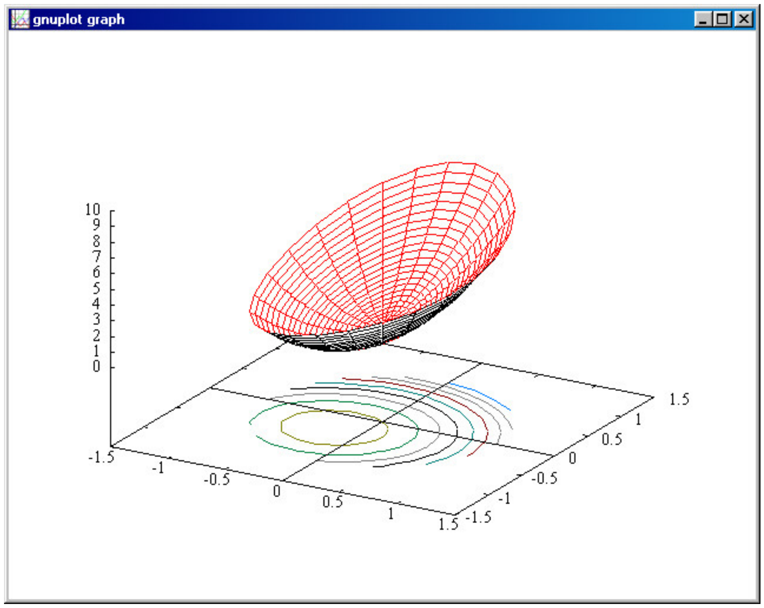


FIGURA 3. Il grafico di $f(x,y) = 1+2x+3y+4x^2+5y^2$ sul cerchio assegnato

4. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^3 + yx^2$*: calcolare il flusso*

$$\int_{\partial E} \frac{df}{d\nu}\, ds$$

della derivata normale esterna di f *lungo la frontiera* ∂E *dell'insieme* $E : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2$.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

Tenuto presente che

$$\frac{df}{d\nu} = \nabla f \times \nu$$

l'integrale curvilineo assegnato si puó leggere anche come

$$\int_{\partial E} \nabla f \times \nu\, ds$$

e quindi il suo calcolo oltre che per via diretta come fatto nell'esercizio precedente puó essere ricavato dal teorema della divergenza

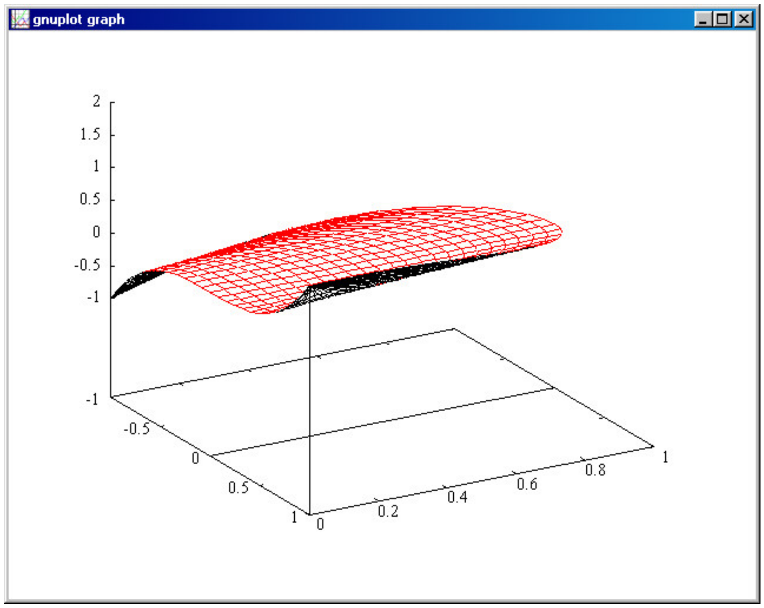


FIGURA 4. Il grafico di $f(x,y) = x^3 + yx^2$ nella regione assegnata

$$\int_{\partial E} \nabla f \times \nu \, ds = \iint_E div\,(\nabla f)\; dxdy$$

Tenuto presente che

$$div\,(\nabla f)\; = f_{xx} + f_{yy} = \triangle f = 6x + 2y$$

si ha

$$\int_{\partial E} \frac{df}{d\nu}\, ds = \iint_E (6x + 2y)\, dxdy = \frac{16}{15}$$

Morale: sono piú i punti in cui il grafico di $f(x,y) = x^3 + yx^2$, vedi Figura 4, si presenta, avvicinandosi alla frontiera di E, provenendo dall'interno e diretti verso l'esterno, in salita di quelli in cui si presenta in discesa. . . !

5. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo $F = \{2xy-5,\;\; x^2+3y^2\}$ lungo il segmento da $(-1,0)$ a $(1,0)$ e lungo l'arco di parabola $y = 1 - x^2$ con gli stessi estremi.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

Lavoro lungo il segmento da $(-1,0)$ a $(1,0)$:

- rappresentazione parametrica: $x = t, y = 0, t \in [-1,1]$
- versore tangente diretto nel verso giusto $\overrightarrow{\tau} = (1,0)$
- lavoro

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_{-1}^{1} (-5)\, dt = -10$$

Lavoro lungo l'arco di parabola $y = 1 - x^2, \quad x \in [-1,1]$:

- rappresentazione parametrica: $x = t, y = 1 - t^2, t \in [-1,1]$
- versore tangente diretto nel verso giusto

$$\overrightarrow{\tau} = (\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}})$$

- lavoro

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_{-1}^{1} \left(2t(1-t^2) - 5 - 2t[t^2 + 3(1-t^2)^2]\right)\, dt = -10$$

La uguaglianza dei due lavori lungo due curve, il segmento e l'arco di parabola, di estremi uguali non deve stupire: il campo assegnato é un gradiente, infatti consideriamo le primitive rispetto ad x della prima componente di F

$$U(x,y) = x^2 y - 5x + g(y)$$

imponendo che $U_y = x^2 + 3y^2$ si ricava $x^2 + g'(y) = x^2 + 3y^2$ da cui $g(y) = y^3$: la funzione

$$U(x,y) = x^2 y - 5x + y^3$$

é un potenziale di F ovvero $F = \nabla U$ e, quindi, qualunque sia l'arco di curva da A a B riesce

$$\int_{\widehat{AB}} F \times \tau\, ds = U(B) - U(A)$$

6. Esercizio

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (y + 3x, 2y - x)$ lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

La curva chiusa assegnata, la circonferenza, é la frontiera del cerchio, il verso di percorrenza assegnato é quello giusto per la formula di Stokes: il lavoro richiesto puó essere calcolato con

$$\int_{\partial C} F \times t\, ds = \iint_C \mathrm{rot}_z(F)\, dxdy$$

$$\mathrm{rot}\,(F) = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+3x & 2y-x & 0 \end{vmatrix} = -2k$$

Ne segue

$$\int_{\partial C} F \times t\, ds = -2 \iint_C dxdy = -8\pi$$

La Figura 5 mostra su alcuni punti della circonferenza i vettori del campo F e i versori tangenti alla circonferenza. Si riconosce che in ciascun punto della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ campo F e versore tangente τ formano un angolo ottuso: prodotto scalare negativo...

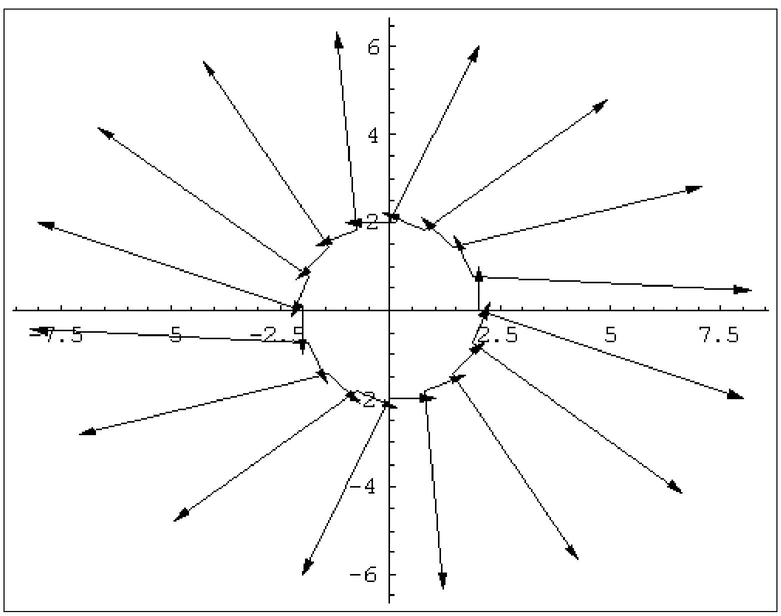


FIGURA 5. Il lavoro: integrale del prodotto scalare $F \times \tau$

7. Esercizio

Sia

$$\overrightarrow{F} = \{1 + 2x, 1 - 2y\}$$

e sia $E : |x| + |y| \leq 1$

- *disegnare l'insieme E*
- *disegnare, con la convenzione delle freccette, il campo F in quattro punti sulla frontiera di E,*
- *calcolare il flusso*

$$\int_{\partial E} F \times \nu \, ds$$

essendo ∂E la frontiera di E e ν il versore normale esterno.

Soluzione

L'insieme E é il rombo di Figura 6

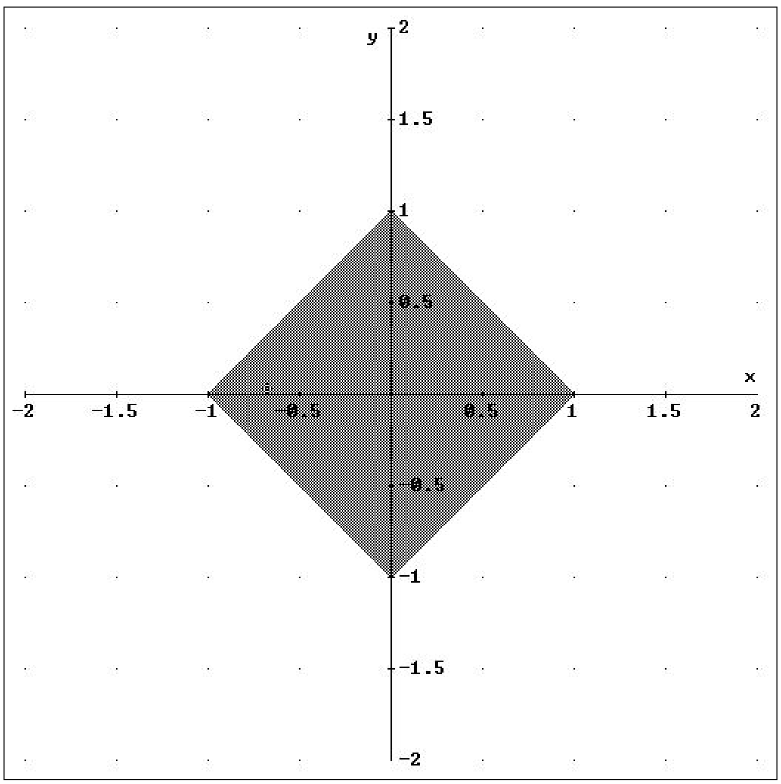


FIGURA 6. L'insieme E dell'esercizio n. 7

La Figura 7 mostra alcuni dei vettori del campo F relativi a punti di E

Si riconosce che il flusso entrante dal lato inferiore sinistro si compensa con quello uscente dal lato superiore destro.

Il flusso attraverso il lato superiore sinistro é metá entrante e metá

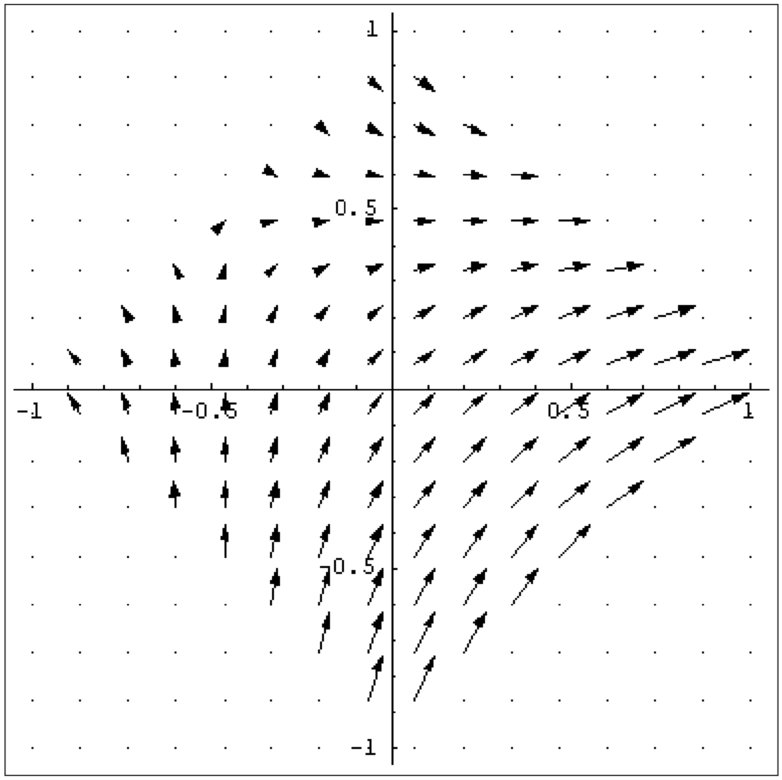


FIGURA 7. Vettori del campo F dentro E

uscente, mentre dal lato inferiore destro sembra non esserci traversamento, il campo si presenta quasi parallelo al lato.
Dal teorema della divergenza segue

$$\int_{\partial E} F \times \nu \, ds = \iint_E div(F)\, dxdy = 0$$

tenuto conto che $div(F) = 0$, valore che non sorprende viste le osservazioni dedotte da Figura 7.

8. Esercizio

Calcolare le aree delle due regioni nelle quali la retta $y = 1 + (\sqrt{2} - 1)x$ divide il cerchio $x^2+y^2 \leq 1$, servendosi del flusso del campo $F = \frac{1}{2}\{x, y\}$ uscente dalle loro frontiere.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

La retta $y = 1 + (\sqrt{2} - 1)x$ interseca la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ in due punti, vedi Figura 8,

$$A = (0, 1), \quad B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

che corrispondono nella usuale rappresentazione parametrica della circonferenza a

$$A = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)), \quad B = (\cos(3\pi/4), \sin(3\pi/4))$$

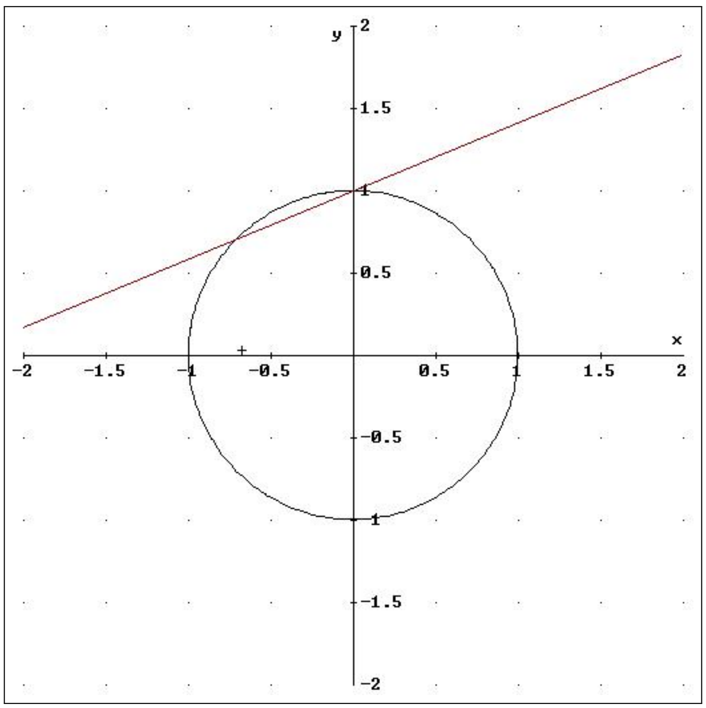


Figura 8. Le due regioni del cerchio

Le aree delle due regioni $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ corrispondono ai flussi sulle relative frontiere

$$\frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{C}_1} F \times \nu ds, \quad \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{C}_2} F \times \nu ds$$

avendo indicato con $F = \{x, y\}$
Calcolo per la regione minore $\mathcal{C}_1$:
il versore normale sulla parte di circonferenza é $\nu = \{x, y\}$, sulla parte di retta é

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \left(\sqrt{2} - 1. - 1 \right)$$

$$\int_{\partial\mathcal{C}_1} F \times \nu ds = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} 1\, dt + \int_{-1/\sqrt{2}}^{0} -1 dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.08$$

Calcolo per la regione maggiore $\mathcal{C}_2$:

$$\int_{\partial\mathcal{C}_2} F \times \nu ds = \int_{-5\pi/4}^{\pi/2} 1\, dt + \int_{-1/\sqrt{2}}^{0} 1\, dt = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 6.2$$

Se ne deduce quindi, ricordando il fattore 1/2, che le aree delle due regioni sono rispettivamente:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \pi - \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

9. Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$F = (\frac{x+5}{((x+5)^2+y^2)^2} + x, \ \frac{y}{((x+5)^2+y^2)^2}) + y$$

- *Calcolare il lavoro di F lungo le circonferenze di centro l'origine e raggi* 1 *e* 10
- *Esaminare se i due lavori richiesti potevano essere calcolati con il Teorema di Stokes.*
- *Riconoscere che F é conservativo e trovarne un potenziale.*

Soluzione

Conviene cominciare dall'ultima domanda: é facile riconoscere che

$$F = \{x, y\} + \left\{\frac{x+5}{((x+5)^2+y^2)^2}, \frac{y}{((x+5)^2+y^2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\nabla\left[x^2 + y^2 - \frac{1}{(x+5)^2+y^2}\right]$$

L'espressione a secondo membro é definita per $(x, y) \neq (-5, 0)$.
Quindi tenuto conto che F é conservativo i lavori richiesti lungo le due circonferenze (entrambe lecite in quanto non passano per l'unico punto proibito) valgono entrambi 0
Dei due lavori richiesti, al primo, quello sulla circonferenza di raggio 1 era applicabile la formula di Stokes perché nel cerchio di raggio 1 il campo F é di classe C^1.

Per il secondo lavoro, quello sulla circonferenza di raggio 10 il teorema di Stokes non era applicabile perché nel cerchio di raggio 10 il campo F non é di classe C^1: nel cerchio cade infatti il punto proibito $(-5, 0)$.

Nella Figura 9 si possono osservare i valori del campo F sui punti delle due circonferenze assegnate: in entrambi i casi il campo appare pressocché ortogonale ai corrispondenti vettori tangenti, quindi a prodotto scalare $F \times t$ quasi nullo...

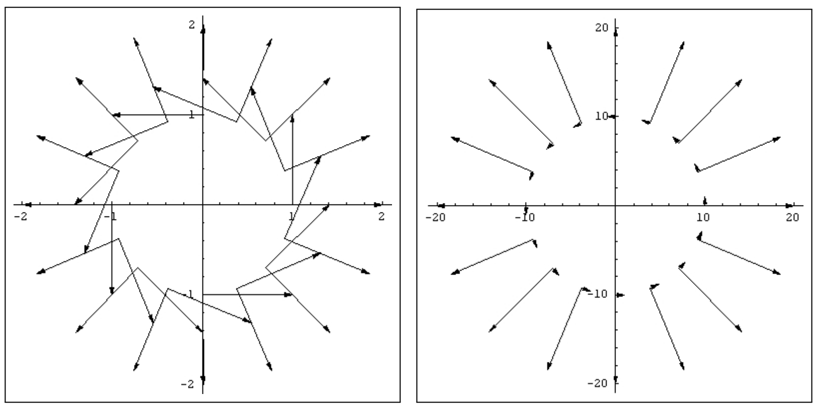


Figura 9. Il campo F lungo le due circonferenze assegnate

CAPITOLO 11

Le soluzioni del foglio 3

1. Esercizio

Sia Σ la superficie cartesiana

$$z = 1 - x - y, \quad (x, y): \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

- *determinare in ogni punto di Σ il versore normale diretto nel verso delle z crescenti,*
- *determinare l'area di Σ,*
- *esaminare il collegamento tra l'area di Σ e l'area del cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione $z = 1 - x - y$ si legge piú agevolmente come

$$x + y + z = 1$$

il piano dello spazio determinato dai tre punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. La superficie Σ é la porzione di tale piano sopra al cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$, geometricamente un'ellisse, vedi Figura 1.
Il versore richiesto é

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,\ 1,\ 1\}$$

L'area si calcola con la formula relativa alle superfici cartesiane

$$Area = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{3}\, \rho\, d\rho = \pi \sqrt{3}$$

L'area del cerchio $\Omega: \ x^2 + y^2 \leq 1$ vale π, l'area della superficie Σ vale di piú: il legame é

$$Area(\Sigma) \times |\nu_z| = Area(\Omega)$$

tenuto presente che $|\nu_z| = \cos(\widehat{\nu\, z})$.

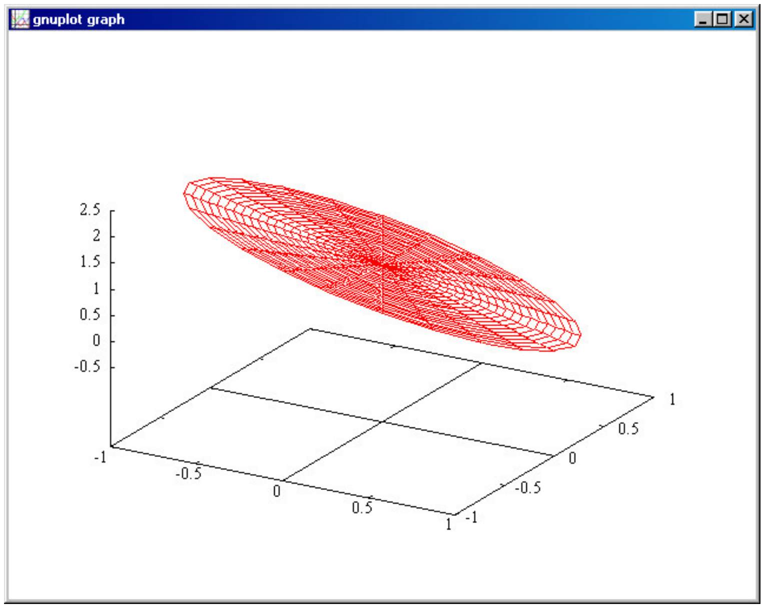


FIGURA 1. La superficie del primo esercizio: un'ellisse.

2. Esercizio

Determinare l'area della superficie cartesiana Σ

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y): \quad x^2 + y^2 \leq 1/4.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La superficie, una porzione di sfera, vedi Figura 2, si riconosce meglio scrivendo

$$z^2 + x^2 + y^2 = 1$$

La formula dell'area é quella delle superfici cartesiane:

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

ne segue

$$Area = \iint_{x^2+y^2 \leq 1/4} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1/4} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\, d\rho =$$

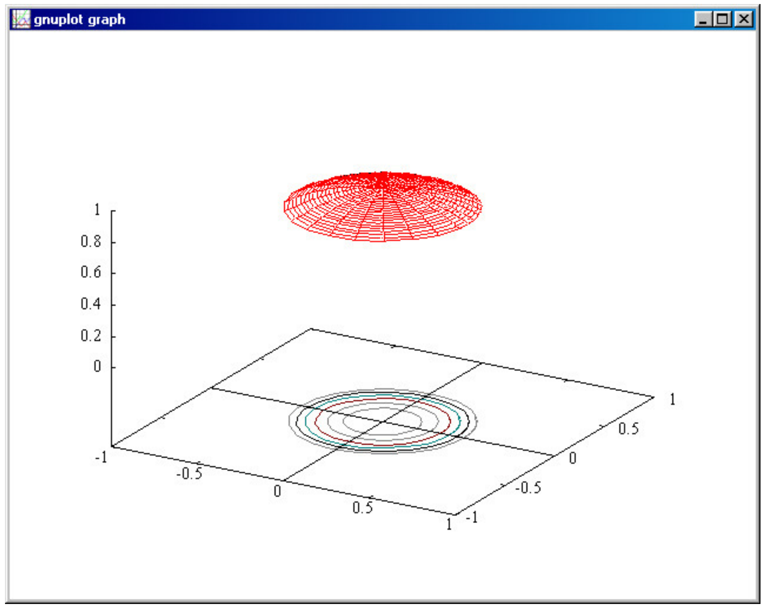


FIGURA 2. La superficie del secondo esercizio: una calotta sferica.

$$= 2\,\pi \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \simeq 0.27\pi$$

Si noti che l'area del cerchio Ω su cui si rappresenta la calotta sferica é $0.25\,\pi$: l'area trovata per la calotta é solo leggermente superiore: in un intorno del polo la calotta ha un'area abbastanza simile a quella della sua proiezione sul piano tangente.

3. Esercizio

Determinare l'area della superficie cartesiana

$$\Sigma : \quad z = 3x^2 + 2y^2 \quad (x, y) : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Si tratta ancora di una superficie cartesiana, vedi Figura 3:

$$z_x = 6x,\ z_y = 4y, \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 36\,x^2 + 16\,y^2}$$

$$Area = \iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1} \sqrt{1+36\,x^2+16\,y^2}\,dx\,dy$$

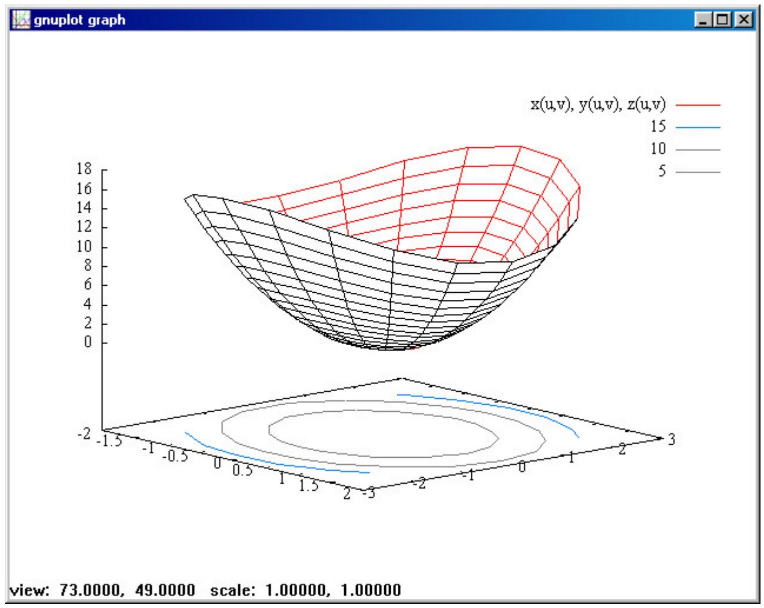


FIGURA 3. La superficie del terzo esercizio: un paraboloide ellittico.

La regione $\Omega : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1$ si rappresenta parametricamente con

$$\begin{cases} x = & 2\rho\cos(\theta) \\ y = & 3\rho\sin(\theta) \end{cases} \qquad \rho\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi]$$

Lo Jacobiano della trasformazione é

$$J = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 3\sin(\theta) \\ -2\rho\sin(\theta) & 3\rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = 6\rho$$

L'integrale doppio che fornisce l'area si esprime pertanto con

$$Area = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+36\,(2\rho\cos(\theta))^2+16\,(3\rho\sin(\theta))^2}\,6\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+144\rho^2}\,6\rho\,d\rho = 12\left(-\frac{1}{432}+\frac{145\sqrt{145}}{432}\right)\pi \simeq$$

$$\simeq 48.4731\pi$$

Si osservi come l'area della superficie, vedi Figura 3, sia molto superiore all'area, 6π della regione Ω, l'ellisse di semiassi 2 e 3, su cui si rappresenta.

4. Esercizio

Sia Ω il tetraedro

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1$$

detta $\partial\Omega$ la sua frontiera calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_{\partial\Omega} xyz\, d\,\sigma$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La frontiera del tetraedro Ω é composta di quattro (*tetra*) triangoli: tre di essi appartengono a piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e il quarto T ha vertici

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$$

Solo su quest'ultimo la funzione integranda é diversa da zero: pertanto

$$\iint_{\partial\Omega} xyz\, d\,\sigma = \iint_T xyz\, d\,\sigma$$

La superficie triangolare T é la superficie cartesiana

$$z = 1 - x - y, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$$

Pertanto

$$\iint_T xyz\, d\,\sigma = \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x} xy(1 - x - y)\sqrt{3}\; dx\, dy = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

Teniamo presente che

- la superficie T su cui si calcola l'integrale superficiale é un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$ e quindi di area $\sqrt{3}/2$,
- la funzione integranda, xyz, prende sui punti di tale superficie valori compresi nell'intervallo $[0, 1/27]$
- il valore I dell'integrale pertanto deve soddisfare le diseguaglianze

$$0 \leq I \leq \frac{\sqrt{3}}{54}$$

cosa che effettivamente avviene...

5. Esercizio

Sia $\overrightarrow{F} = \{x + y, z, x\}$: *calcolare il flusso*

$$\iint_{\partial Q} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

di F *uscente dal cubo*

$$Q: \quad |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1,$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il flusso uscente si puó calcolare col teorema della divergenza

$$\iint_{\partial Q} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iiint_{Q} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz$$

Tenuto conto che

$$div(\overrightarrow{F}) = 1$$

si ha

$$\iint_{\partial Q} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iiint_{Q} dx\, dy\, dz = 8$$

volume del cubo Q.

Osservazione 5.1. *Il valore trovato sarebbe rimasto lo stesso anche se il campo* F *fosse cambiato in*

$$\overrightarrow{F} = \{x + s(y),\ q(z),\ p(x)\}$$

con $s(y),\ q(z),\ p(x)$ *funzioni* C^1 *ma del tutto arbitrarie...*
La divergenza del campo infatti non sarebbe mutata !

6. Esercizio

Sia Ω *la semipalla*

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$$

- *detta* $\partial\Omega$ *la frontiera determinare il versore normale esterno* $\overrightarrow{\nu}$ *a* $\partial\Omega$
- *detta* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *determinare l'espressione delle derivata*

$$\frac{df}{d\nu}$$

- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{df}{d\nu}\, d\sigma,$$

- *ricavare tale integrale servendosi del teorema della divergenza.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il versore normale sui punti della semisfera é $\nu = \{x, y, z\}$ mentre su quelli del cerchio che delimita Ω inferiormente riesce $\nu = \{0, 0, -1\}$. Sulla semisfera Σ

$$\frac{df}{d\nu} = \nabla f \times \nu = \{2x, 2y, 2z\} \times \{x, y, z\} = 2$$

sul cerchio base $\mathcal{C}$

$$\frac{df}{d\nu} = \nabla f \times \nu = \{2x, 2y, 2z\} \times \{0, 0, -1\} = -2z = 0$$

avendo tenuto conto che su tale cerchio riesce $z = 0$.
Si ha pertanto

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{df}{d\nu}\, d\sigma = 2 \iint_{\Sigma} d\sigma = 4\pi$$

avendo tenuto conto che l'area della semisfera di raggio 1 vale 2π

Il teorema della divergenza avrebbe fornito

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{df}{d\nu}\, d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \nabla f \times \nu\, d\sigma = \iiint_{\Omega} div(\nabla f)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint_{\Omega} \{f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\}\, dx\, dy\, dz = 6 \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = 4\pi$$

avendo tenuto conto che il volume della semipalla di raggio 1 vale $2/3\,\pi$

7. Esercizio

Sia $\mathcal{C}$ la curva dello spazio di equazioni parametriche

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = \cos(t) + \sin(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

- *determinare il versore tangente $\overrightarrow{\tau}$ alla curva $\mathcal{C}$ orientata nel verso delle t crescenti,*
- *determinare il lavoro $\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds$ essendo $\overrightarrow{F} = \{y, x, z\}$*

SOLUZIONE:

Nella curva assegnata si riconosce $z = x + y$, si tratta quindi di una curva che appartiene a tale piano. L'espressione di x e di y fanno riconoscere la curva come intersezione del cilindro dello spazio $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $z = x + y$: la curva é pertanto un'ellisse.

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\sin(t)\cos(t)}} \{-\sin(t),\, \cos(t),\, -\sin(t) + \cos(t)\}$$

Il lavoro richiesto é, per definizione,

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} \{2\cos^2(t) - 2\sin^2(t)\}\, dt = 0$$

Era del resto evidente che il campo assegnato F fosse conservativo...

$$F = \nabla$$

8. Esercizio

Sia $\mathcal{C}$ la curva dell'esercizio precedente:

- determinare, dandone la rappresentazione parametrica, una superficie di cui $\mathcal{C}$ sia il bordo,
- esprimere il lavoro richiesto nel precedente esercizio tramite il teorema di Stokes.

SOLUZIONE:

9. Esercizio

Sia Σ la superficie ottenuta per rotazione di $y = x^3,\ x \in [0, 1]$ intorno all'asse y :

- fornire una rappresentazione parametrica di tale superficie,
- calcolare la sua area,
- calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\,\sigma$$

SOLUZIONE:

CAPITOLO 12

Le soluzioni del foglio 4

1. Esercizio

Consideriamo la porzione di elicoide $\mathcal{S}$,

$$x = u\cos(v),\ y = u\sin(v),\ z = v, \quad 1/2 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \pi$$

- *determinare l'area di $\mathcal{S}$,*
- *determinare la lunghezza del bordo di $\mathcal{S}$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La matrice jacobiana é la seguente

$$\begin{pmatrix} -u\sin(v) & u\cos(v) & 1 \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \end{pmatrix}, \qquad L^2 + M^2 + N^2 = u^2 + 1$$

$$Area(\mathcal{S}) = \iint_\Omega \sqrt{u^2 + 1}\, du\, dv = \int_{1/2}^1 \sqrt{u^2 + 1}\, du \int_0^\pi dv =$$
$$= \pi\,\frac{1}{2}\left[u + \sqrt{1+u^2} + \operatorname{settsinh}(u)\right]_{1/2}^1 \simeq 0.627679$$

Il bordo di $\mathcal{S}$, vedi Figura 1 é, per definizione, l'immagine della frontiera $\partial\Omega$: tenuto conto che Ω é un rettangolo del piano uv la sua frontiera é composta di 4 segmenti

$$\begin{array}{ll} v = 0, & u \in [1/2, 1], \\ u = 1, & v \in [0.\pi], \\ v = \pi, & u \in [1/2, 1], \\ u = 1/2, & v \in [0.\pi] \end{array}$$

Pensato alla porzione di elicoide come una porzione di rampa di garage abbiamo come bordo

- il primo tratto inferiore,
- il corrimano esterno,
- l'ultimo tratto superiore,
- il corrimano interno.

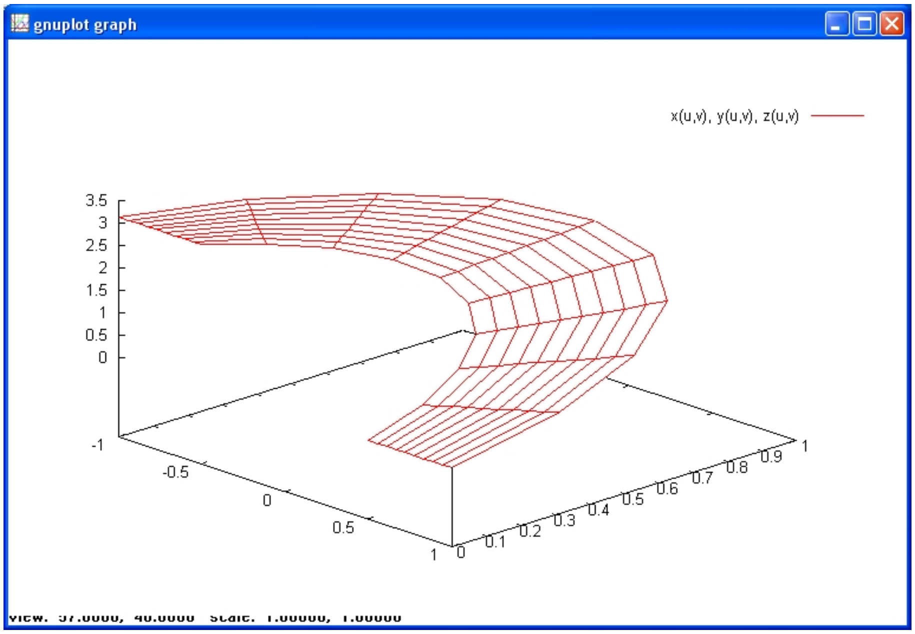


FIGURA 1. Una porzione di elicoide

Ovviamente l'ordine, e i nomi fantasiosi dati alle porzioni di bordo sono completamente aleatori !
Le lunghezze, nell'ordine, sono pertanto,

$$\begin{array}{lll}
v = 0, & u \in [1/2, 1], & \text{lungh.} = 1/2 \\
u = 1, & v \in [0, \pi], & \text{lungh.} = \pi\sqrt{2} \\
v = \pi, & u \in [1/2, 1], & \text{lungh.} = 1/2 \\
u = 1/2, & v \in [0.\pi], & \text{lungh.} = \pi\frac{\sqrt{5}}{2}
\end{array}$$

2. Esercizio

Sia S la superficie di rotazione del grafico $x = \cosh(z)$, $-1 \leq z \leq 1$ intorno all'asse z

- *determinare l'area di $\mathcal{S}$,*
- *determinare la lunghezza del bordo di $\mathcal{S}$,*
- *determinare, dandone la rappresentazione parametrica, due altre superfici che abbiano lo stesso bordo.*

SOLUZIONE:

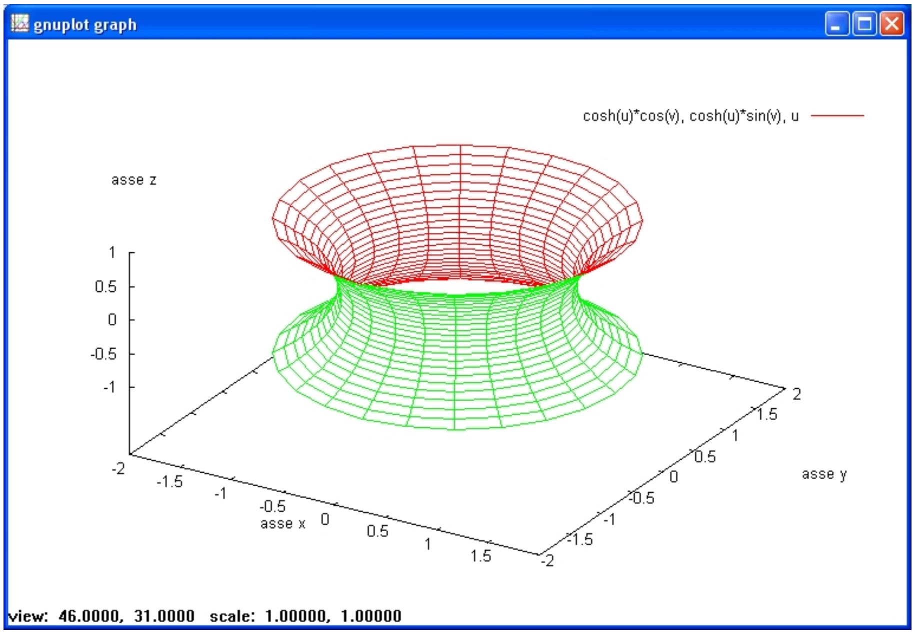


Figura 2. La superficie di rotazione del $\cosh(z)$ intorno all'asse z

La superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione del grafico $x = f(z), \quad z \in [\alpha, \beta]$ intorno all'asse z ha la seguente rappresentazione parametrica

$$x = f(t)\cos(\theta),\ y = f(t)\sin(\theta), z = t, \quad \Omega : t \in [\alpha, \beta], \theta \in [0, 2\pi]$$

L'area della superficie di rotazione $\mathcal{S}$ si ottiene, piú semplicemente di quella di altre superfici, con

$$Area(\mathcal{S}) = 2\pi \int_\alpha^\beta f(t)\sqrt{1 + f'^2(t)}\,dt$$

Nel nostro caso quindi

$$Area(\mathcal{S}) = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh(t)\sqrt{1 + \sinh^2(t)}\,dt = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2(t)dt =$$
$$= 2\pi \left(1 + \frac{\sinh(2)}{2}\right) \simeq 17.6773$$

Il bordo richiesto é formato, vedi Figura 2, da due circonferenze di raggio $R = \cosh(\pm 1) \simeq 1.54308$, pertanto la lunghezza complessiva del bordo é $4\,\pi\,\cosh(1) \simeq 19.3909$.

Due altre superfici con lo stesso bordo:

- la porzione di cilindro $x^2 + y^2 = \cosh^2(1)$ di equazioni parametriche

$$x = \cosh(1)\,\cos(\theta),\ y = \cosh(1)\,\sin(\theta),\ z = u,$$
$$\Omega : \theta \in [0, 2\pi],\ u \in [-1, 1]$$

- la porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + \cosh^2(1)$ di equazioni parametriche

$$x = \cos(\theta)\sqrt{\cosh^2(1) + 1 - t^2},\ y = \sin(\theta)\sqrt{\cosh^2(1) + 1 - t^2},\ z = t,$$
$$\Omega : \theta \in [0, 2\pi], t \in [-1, 1]$$

Osservazione 2.1. Il problema di Plateau.
Le due superfici proposte, superfici con lo stesso bordo della catenoide, hanno aree rispettivamente

- *il cilindro:*

$$2\pi\ \cosh(1)\, 2 \simeq 19.3909$$

- *la porzione di sfera:*

$$4\pi\frac{1 + \cosh^2(1)}{\cosh(1)} \simeq 27.5346$$

Si tratta di aree entrambe maggiori di quella calcolata per la catenoide: che la porzione di sfera, bombata verso l'esterno desse un'area maggiore era evidente, che lo stesso accadesse per il cilindro era forse meno prevedibile...
Assegnata una curva (eventualmente anche composta di piú parti disgiunte come, nel nostro caso le due circonferenze) il problema di Plateau consiste nel trovare tra le tante superfici che hanno come bordo tale curva quella (o quelle) di area minima.
Spesso tale problema viene collegato alle lamine di sapone che si formano su curve di filo di ferro preparate apposta e immerse nell'acqua saponata.
Una interessante introduzione a tali questioni si trova sul libro di Courant e Robbins, Che cos'é la matematica, *pag. 566.*

3. Esercizio

Indichiamo con $\mathcal{S}_\beta$ la parte di sfera rappresentata da

$$x = \sin(u)\cos(v),\ y = \sin(u)\,\sin(v),\ z = \cos(u),$$
$$v \in [0, 2\pi],\ u \in [0, \beta], \quad \beta < \pi/2$$

e con $f(\beta)$ l'area di tale superficie.

Calcolare lo sviluppo di $f(\beta)$ in formula di Taylor di punto iniziale $\beta = 0$ e ordine almeno $n = 2$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Tenuto conto della rappresentazione parametrica data riesce

$$f(\beta) = 2\,\pi \int_0^\beta \sin(u)\,du = 2\,\pi(1 - \cos(\beta))$$

da cui il polinomio di Taylor richiesto é

$$P(\beta) = 2\,\pi \frac{\beta^2}{2} = \pi\,\beta^2$$

avendo ricordato che

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \dots$$

4. Esercizio

Calcolare l'area della porzione della superficie conica

$$x^2 - y^2 = z^2$$

interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La rappresentazione parametrica della superficie conica $y^2 + z^2 = x^2$ é la seguente

$$x = \rho,\ y = \rho\,\sin(\theta),\ z = \rho\,\cos(\theta), \quad \Omega : \theta \in [0, 2\pi], \rho \in R$$

La matrice jacobiana é la seguente

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & \rho\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad L^2 + M^2 + N^2 = 2\,\rho^2$$

I punti interni al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, sono quelli che soddisfano la condizione

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1$$

quindi i punti della parte di superficie conica devono soddisfare

$$(\rho - 1)^2 + \rho^2\,\sin^2(\theta) \le 1, \quad 0 \le \rho \le \frac{2}{1 + \sin^2(\theta)}$$

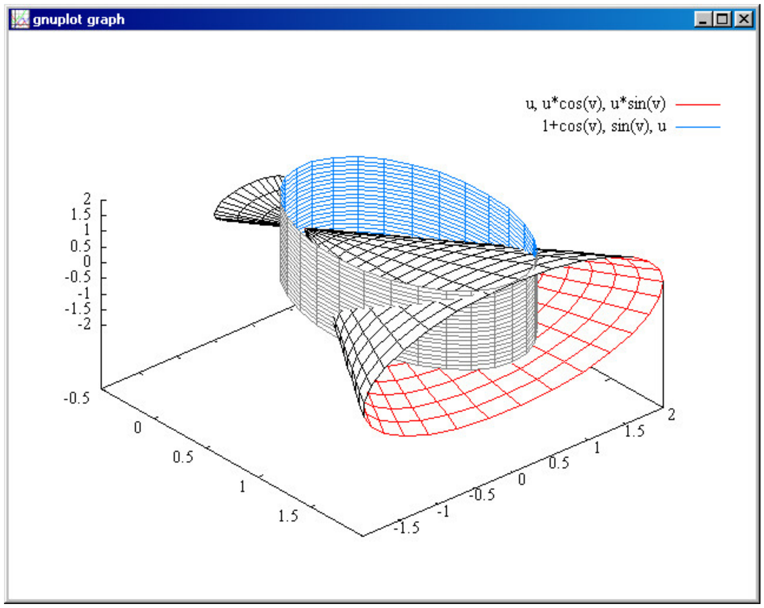


FIGURA 3. Cono e cilindro...

L'area richiesta é pertanto [1]

$$Area = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{2}{1+\sin^2(\theta)}} \sqrt{2}\rho\, d\rho = 3\pi \simeq 9.42478$$

5. Esercizio

Calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}\, d\,\sigma$$

essendo $\mathcal{S}$ la superficie laterale del cono

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{9}z^2, \quad z \in [0,3]$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

[1]Il calcolo del valore esatto dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\sin^2(\theta))^2}\, d\theta$$

non é facile: la tecnica con cui é stato ottenuto, *la teoria dei residui*, sará trattata, almeno nei suoi primi cenni, nel corso di Metodi matematici.

Attenzione alla correzione nell'equazione del cono: a secondo membro doveva esserci il termine in z^2 e non il valore 1.
La superficie $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{9}z^2$ equivale a

$$\frac{x^2}{z^2/9} + \frac{y^2}{4z^2/9} = 1, \quad z \in [0,3]$$

le cui sezioni ad ogni quota z sono tutte ellissi, di assi $z/3, 2z/3$: se ne deduce la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{3}\,t\,\cos(\theta) \\ \\ y = & \frac{2}{3}\,t\,\sin(\theta) \quad , \quad \Omega : t \in [0,3],\, \theta \in [0, 2\pi] \\ \\ z = & t \end{cases}$$

La matrice jacobiana é pertanto

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos(\theta) & \frac{2}{3}\sin(\theta) & 1 \\ \\ -\frac{1}{3}\,t\,\sin(\theta) & \frac{2}{3}\,t\,\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = \frac{t}{3}\sqrt{\frac{4}{9} + 4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$$

L'integrale superficiale é pertanto

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}\,d\,\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta))}\sqrt{\frac{4}{9} + 4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)d\theta} \int_0^3 \frac{1}{9}t^2 dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta))(4 + 36\cos^2(\theta) + 9\sin^2(\theta))}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{23}}\int_0^{2\pi} \sqrt{449 - 48\,\cos(2\,\theta) - 81\,\cos(4\,\theta)}\,d\theta \simeq 15.6452$$

Il valore riportato é stato determinato chiedendo a *Mathematica* una approssimazione numerica dell'integrale

```
NIntegrate[Sqrt[449 - 48 Cos[2 t] - 81 Cos[4 t]],
              {t, 0, 2*Pi}]/(2*Sqrt[2]*3)
```

6. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo $\overrightarrow{F} = \{y+z,\ z+x,\ x+y\}$ lungo la circonferenza intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con il piano $x+y+z = 0$, scegliendo uno dei due versi di percorrenza.

SOLUZIONE:

Il campo $\overrightarrow{F} = \{y+z,\ z+x,\ x+y\}$ ha rotore nullo ed é definito, di classe C^1 in tutto lo spazio, quindi ammette potenziale: la determinazione di tale potenziale si puó ottenere

- determinando una primitiva U rispetto ad x della prima componente $U = yx + zx + g(y, z)$
- imponendo che $U_y = z + x$ ovvero $x + g_y = z + x \ \rightarrow\ g_y = z$
- imponendo che $U_z = x + y$ ovvero $x + g_z = x + y \ \rightarrow\ g_z = y$
- $g(y, z) = yz + c$

Il campo é pertanto

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\,(yx + zx + yz)$$

La circonferenza[2] assegnata é una curva chiusa, il lavoro richiesto é nullo. . . !

7. Esercizio

Sia $ABCA$ la poligonale (chiusa triangolare) determinata dai tre punti

$$A = (a, 0, 0), \quad B = (0, a, 0), \quad C = (0, 0, a), \quad (a > 0)$$

Calcolare il lavoro del campo

$$\overrightarrow{F} = \{y^2, z^2, x^2\}$$

lungo tale poligonale, percorsa nel verso $\overrightarrow{ABCA}$.
Verificare il risultato ottenuto determinando una superficie di cui la curva assegnata sia bordo e servendosi del teorema di Stokes.

SOLUZIONE:

[2]Si noti che la curva assegnata, intersezione della sfera con un piano passante per il centro della sfera é una circonferenza massima della sfera.

Il campo assegnato ha rotore

$$\text{rot}\,(\overrightarrow{F}) = \{-2z,\ -2x,\ -2y\} \neq 0$$

non nullo, quindi... non si puó dire facilmente che il lavoro lungo una curva chiusa (la poligonale assegnata lo é) sia nullo !
Per calcolare il lavoro si devono parametrizzare i tre segmenti e calcolare i tre integrali curvilinei (su tali tre segmenti) corrispondenti:

- $AB : P = (1-t)\,A + t\,B :$

$$x = a\,(1-t), y = ta, z = 0 \quad t \in [0,1], \overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-1, 1, 0\}$$

- $BC : P = (1-t)\,B + t\,C :$

$$x = 0, y = (1-t)\,a, z = t\,a \quad t \in [0,1], \overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0, -1, 1\}$$

- $CA : P = (1-t)\,C + t\,A :$

$$x = a\,t, y = 0, z = a\,(1-t) \quad t \in [0,1], \overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, 0, -1\}$$

-
$$\int_{AB} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\,ds = -a\int_0^1 a^2t^2dt = -a^3\frac{1}{3}$$
-
$$\int_{BC} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\,ds = -a\int_0^1 a^2t^2dt = -a^3\frac{1}{3}$$
-
$$\int_{CA} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\,ds = -a\int_0^1 a^2t^2dt = -a^3\frac{1}{3}$$

Il lavoro del campo F lungo la poligonale $ABCA$ é pertanto

$$\int_{ABCA} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\,ds = -a^3$$

Calcolo con il teorema di Stokes

$$\int_{ABCA} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\,ds = \iint_{\mathcal{T}} \text{rot}\,(F) \times \nu\,d\,\sigma$$

essendo $\mathcal{T}$ il triangolo ABC
Tenuto conto che T si rappresenta in modo cartesiano con

$$z = a - x - y, \quad 0 \le y \le a - x,\ 0 \le x \le a$$

e che i versori normali a $\mathcal{T}$ sono

$$\overrightarrow{\nu} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$$

si ha

$$\iint_{\mathcal{T}} \text{rot}\,(F) \times \nu d\,\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^a dx \int_0^{a-x} [-2(a-x-y) - 2x - 2y]\sqrt{3}dy =$$

$$= -2\int_0^a dx \int_0^{a-x} ady = -a^3$$

NOTA: Il versore *giusto* é stato:

$$\overrightarrow{\nu} = +\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$$

8. Esercizio

Calcolare il lavoro

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds$$

essendo $\overrightarrow{F} = \{x^n, y^m, z^r\}$, n, m, r *naturali e* $\mathcal{C}$ *la curva* $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = \cos(t)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$.
Determinare inoltre una superficie di cui la curva $\mathcal{C}$ *sia bordo e verificare il risultato ottenuto con il teorema di Stokes.*

SOLUZIONE:

Qualunque siano gli esponenti , numeri naturali, n, m, r il campo assegnato é il gradiente del polinomio

$$U(x,y,z) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{m+1}y^{m+1} + \frac{1}{r+1}z^{r+1}$$

la curva assegnata é una curva chiusa quindi il lavoro richiesto é zero.

Una superficie di cui la curva sia bordo puó essere

$$x = \rho\cos(t),\ y = \rho\sin(t),\ z = \rho\cos(t) \quad \Omega : \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, 1]$$

si tratta del cerchio del piano $x = z$, vedi Figura 4, di centro l'origine e raggio 1.

Sperimentare la formula di Stokes, sperando di ritrovare il lavoro nullo, é, in questo caso ovvio perché il campo F ha ovviamente rotore nullo, e quindi il flusso di tale rotore sará altrettanto zero.

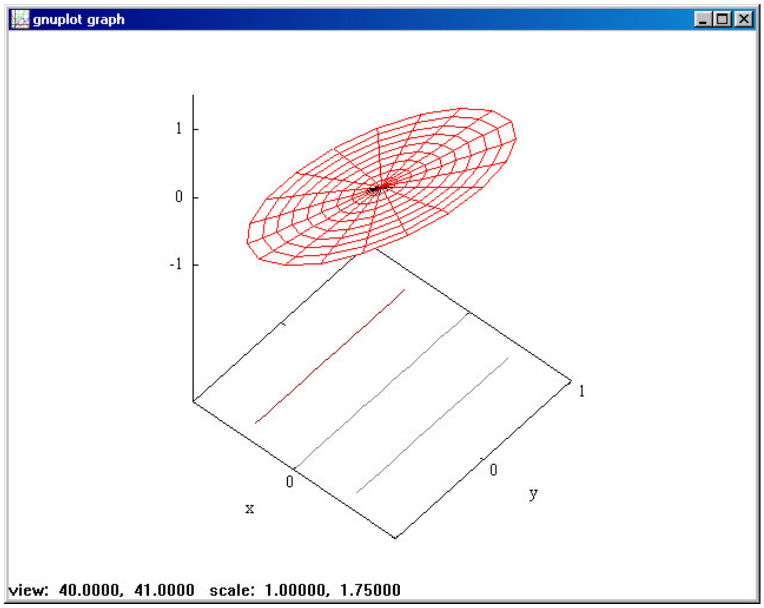


FIGURA 4. Il cerchio del piano $x = z$

9. Esercizio

Indichiamo con $\overrightarrow{r} = \{x,\, y,\, z\}$, calcolare il flusso

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma$$

essendo Ω una sfera, ed

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{|\overrightarrow{r}|^3}\overrightarrow{r}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\overrightarrow{F} = \left\{ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Si tratta di un campo [3] definito in tutto lo spazio meno che nell'origine: gli integrali richiesti dovranno quindi riferirsi a superfici che non passino per l'origine.
Determiniamo la divergenza di F:

[3] Il campo gravitazionale generato da una massa posta nell'origine, a meno di qualche costante moltiplicativa. . .

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{-3\,x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{-3\,y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{-3\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sommando si ottiene

$$div(\overrightarrow{F}) = 0$$

Pertanto per qualunque sfera Ω che non includa al suo interno l'origine riesce

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma = \iint_{\Omega} div(F) dxdydz = 0$$

Consideriamo ora una sfera Ω che contenga all'interno l'origine, e indichiamo con $\mathcal{B}_R$ una sferetta di centro l'origine e di raggio R tanto piccolo da riuscire interamente contenuta in Ω.
Detto $\mathcal{T}$ il dominio $\Omega - \mathcal{B}_R$ riesce applicando ad esso il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial\mathcal{T}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma = \iint_{\mathcal{T}} div(F) dxdydz = 0$$

L'annullarsi dell'integrale superficiale a primo membro significa di fatto che

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma = \iint_{\partial\mathcal{B}_R} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma$$

L'integrale superficiale a secondo membro si puó calcolare molto facilmente, tenuto conto che sulla sfera B_R il versore normale é

$$\tau = \frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}$$

e che, quindi riesce

$$\iint_{\partial\mathcal{B}_R} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma = \iint_{\partial\mathcal{B}_R} \frac{\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{r}}{|r|^4} d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{\partial\mathcal{B}_R} d\sigma = 4\pi$$

Conclusione: il flusso di F vale

- 0 attraverso le sfere che non contengono l'origine,
- 4π attraverso le sfere che la contengono.

OSSERVAZIONE 9.1. *Il campo F assegnato é il gradiente della funzione*

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

funzione definita in tutto lo spazio tranne l'origine.
Su qualunque dominio Ω non contenente l'origine riesce quindi

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\,\sigma = \iint_{\partial\Omega} \frac{d\,U}{d\,\nu} d\,\sigma = \iiint_{\Omega} \triangle U\, dxdydz$$

Il calcolo precedente implica quindi che

$$\iiint_{\Omega} \triangle U\, dxdydz = \begin{cases} 4\pi & se \quad O \in \Omega \\ 0 & se \quad O \notin \Omega \end{cases}$$

Il $\triangle U$ é nullo in tutti i punti tranne l'origine (dove non é neanche definito): il risultato ottenuto puó essere letto come se $\triangle U$ fosse tanto grande nel solo punto origine da dar luogo ad un integrale non nullo, 4π, pur essendo, la funzione integranda quasi ovunque nulla !
Incontrerete fenomeni di questo tipo col nome di teoria delle distribuzioni.
Il laplaciano $\triangle U$ di cui sopra rappresenta una delle piú semplici distribuzioni e prende il nome di misura di Dirac *da Paul A.M. Dirac, uno dei maggiori fisici teorici del 900.*

L'osservazione fatta sul significato di F come campo gravitazionale di potenziale U suggerisce di abbinare l'integrale del laplaciano $\triangle U$ sul dominio Ω in qualche modo alla presenza di massa in Ω ...

CAPITOLO 13

Le soluzioni del foglio 5

1. Esercizio

Lavoro di $F = \{y, -x, 0\}$ *lungo il bordo* $\mathcal{C}$ *della superficie*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = z$$

(un'ellisse obliqua)

- *Decidere se* F *ha potenziale,*
- *Calcolare il flusso di* F *uscente dal cilindro illimitato*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La curva richiesta é l'intersezione del cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con il piano obliquo $y = z$, vedi Figura 1

Rappresentazione parametrica della curva $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} x = & a\cos(\theta) \\ y = & b\sin(\theta) \\ z = & b\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Versore tangente (verso antiorario)

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta) + 2b^2\cos^2(\theta)}} \{-a\sin(\theta), b\cos(\theta), b\cos(\theta)\}$$

Il lavoro richiesto é

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \tau\, ds = \int_0^{2\pi} [-b\sin(\theta)a\sin(\theta) - a\cos(\theta)b\cos(\theta)]\, d\theta = -2\, a\, b\, \pi$$

Invertendo il verso di percorrenza il lavoro si cambia nell'opposto: quindi ogni risposta al quesito dovrebbe essere accompagnata dalla precisazione del verso di percorrenza considerato.

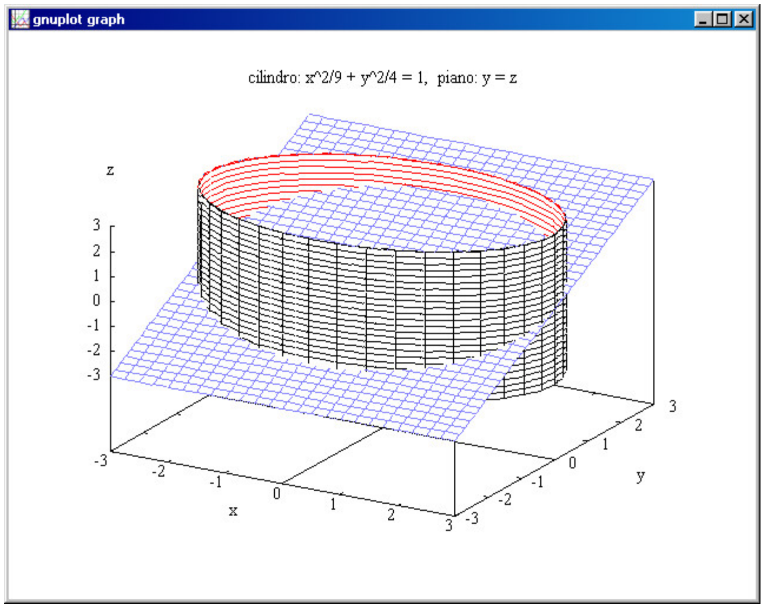


FIGURA 1. Cilindro e piano: $a = 3$, $b = 2$

Avremmo potuto anche servirci del teorema di Stokes, pensando la curva come bordo dell'ellisse $\mathcal{E}$ obliqua, vedi Figura 2,

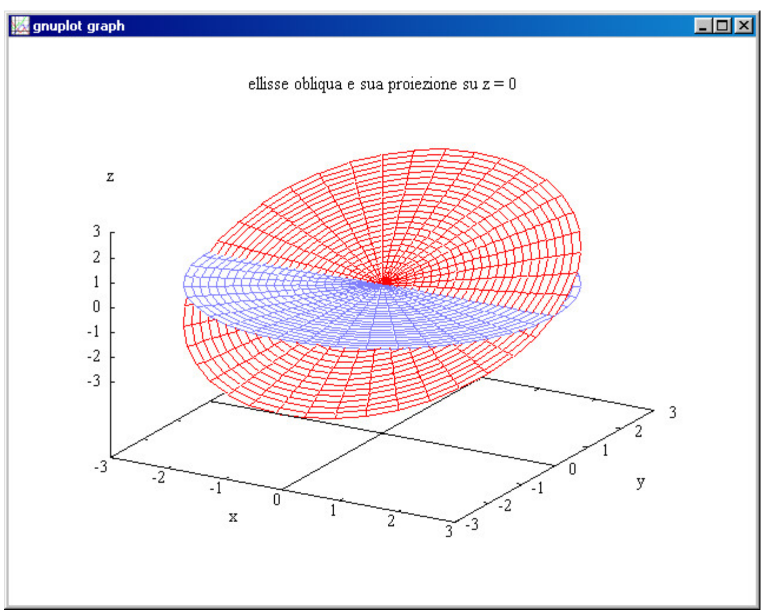


FIGURA 2. Usiamo il teorema di Stokes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad y=z$$

$$\int_{\mathcal{C}} F\times\tau\,ds=\iint_{\mathcal{E}} rot(\overrightarrow{F})\times\overrightarrow{\nu}\,d\sigma$$

Tenuto conto che

$$rot(\overrightarrow{F})=\{0,0,-2\},\quad \overrightarrow{\nu}=\{0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

si ha

$$\iint_{\mathcal{E}} rot(\overrightarrow{F})\times\overrightarrow{\nu}\,d\sigma=-\frac{2}{\sqrt{2}}\iint_{\mathcal{E}} d\sigma$$

L'area dell'ellisse obliqua $\mathcal{E}$ é del resto legata all'area $\pi\,a\,b$ dell'ellisse del piano $z=0$ sulla quale si proietta

$$Area(\mathcal{E})\,\nu_z=\pi\,a\,b,\quad \Rightarrow Area(\mathcal{E})=\pi\,a\,b\,\sqrt{2}$$

Ne segue quindi

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}\iint_{\mathcal{E}} d\sigma=-\frac{2}{\sqrt{2}}\pi\,a\,b\,\sqrt{2}=-2\,\pi\,a\,b$$

valore in accordo col risultato precedente.

Il campo F non ha potenziale: il fatto di aver trovato lavoro non nullo su una curva chiusa lo prova di per se.
Del resto

$$\mathrm{rot}\,(F)\neq 0,\quad \Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial y}y\neq\frac{\partial}{\partial x}(-x)$$

lo faceva anche prevedere.

Flusso uscente dal cilindro:La domanda é malposta perché il cilindro é illimitato...

Proviamo sulla superficie $\mathcal{S}$ parte del cilindro con $z\in[\alpha,\,\beta]$, vedi Figura 3.
La rappresentazione parametrica é
Il versore normale é

$$\begin{cases} x= & a\cos(\theta)\\ y= & b\sin(\theta)\\ z= & t\end{cases}\qquad \Omega:\ \theta\in[0,2\pi],\,t\in[\alpha,\beta]$$

Il versore normale

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{b^2\cos^2(\theta)+a^2\sin^2(\theta)}}\{b\cos(\theta),\,a\sin(\theta),\,0\}$$

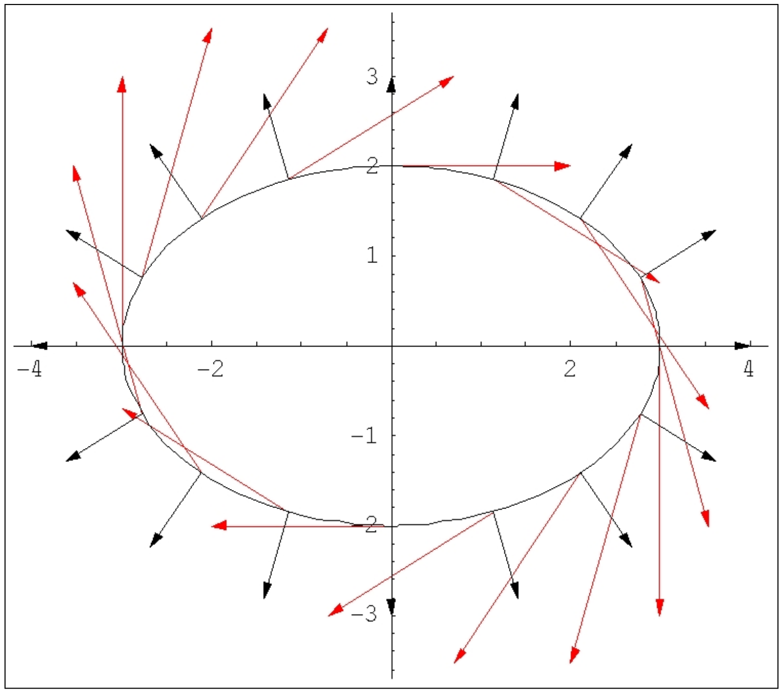


FIGURA 3. In rosso il campo F, in nero ν

ne segue

$$\iint_S F \times \nu \, d\sigma = \iint_\Omega ab[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] \, dt \, d\theta = 0$$

2. Esercizio

- *Determinare i gradienti e i laplaciani delle funzioni*

$$r, \quad r^2, \quad \frac{1}{r}, \quad \log(r)$$

essendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- *Determinare il flusso uscente di tali gradienti dalla sfera di centro l'origine e raggio 1.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\nabla r = \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \{x, \, y, \, z\}$$

$$\triangle\, r = -\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{r}$$

$$\nabla\, r^2 = \nabla\,(x^2+y^2+z^2) = 2\,\{x,\, y,\, z\}$$

$$\triangle\, r^2 = 2+2+2 = 6$$

$$\nabla\,\frac{1}{r} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\{x,\, y,\, z\}$$

$$\triangle\,\frac{1}{r} = 3\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \;=\; 0$$

$$\nabla \log(r) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\{x,\, y,\, z\,\}$$

$$\triangle \log(r) = -2\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} + \frac{3}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2}$$

Tenuto presente che il versore normale esterno alla sfera é

$$\overrightarrow{\nu} = \{x,\, y,\, z\,\}$$

si ha

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla}\, r \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 4\pi$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla}\, r^2 \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 8\pi$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla}\, \frac{1}{r} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 4\pi$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla}\, \log(r) \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 4\pi$$

Osservazione 2.1. *Si noti che, qualunque sia la funzione $u(x, y, z)$ si ha*

$$\nabla\, u \times \nu \;=\; \frac{du}{d\nu}$$

e inoltre, dal teorema della divergenza

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{du}{d\nu}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \triangle\, u\, dx\, dy\, dz$$

Tuttavia siamo autorizzati a servirci del teorema della divergenza solo relativamente alla funzione r^2 che é regolare dentro la sfera.

Le altre tre funzioni r, $1/r$ e $\log(r)$ hanno una pericolosa singolaritá nell'origine.

3. Esercizio

Sia
$$\Omega : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1$$
e sia ν il versore normale esterno a $\partial\Omega$: calcolare
$$\iint_{\partial\Omega} \nu_z \, d\sigma$$
essendo ν_z la componente z di ν

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'integrale superficiale assegnato corrisponde esattamente al seguente
$$\iint_{\partial\Omega} \nu_z \, d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \{0, 0, 1\} \times \overrightarrow{\nu} \, d\sigma$$
al quale si applica il teorema della divergenza, ottenendo 0 tenuto conto, ovviamente che
$$div\{0, 0, 1\} = 0$$
essendo $\{0, 0, 1\}$ costante.

$\boxed{\textit{Calcolo esplicito}:}$

La regione Ω assegnata é quella delimitata da un ellissoide di centro l'origine, assi gli assi coordinati, di lunghezze rispettivamente
$$1, \; 1, \; \frac{1}{\sqrt{2}}$$
Quindi $\partial\Omega$ ha la rappresentazione parametrica
$$\begin{cases} x = & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = & \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi) \end{cases} \qquad A : \varphi \in [0, \pi], \, \theta \in [0, 2\pi]$$
La matrice jacobiana é la seguente
$$j = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos(\theta) & \cos\varphi\sin(\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$
$$L^2 + M^2 + N^2 = \sin^2(\varphi)(\frac{1}{2}\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))$$
$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = \sin(\varphi)\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\varphi)\cos(\theta),\, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\varphi)\sin(\theta),\, \cos(\varphi) \right\}$$

$$d\sigma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, d\varphi\, d\theta = \sin(\varphi)\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}\, d\varphi\, d\theta$$

L'integrale superficiale richiesto

$$\iint_{\partial\Omega} \nu_z\, d\sigma$$

tenuto conto che

$$\nu_z = \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}}$$

si riduce quindi a

$$\iint_A \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi\, d\theta = \pi \int_0^\pi \sin(2\varphi) d\varphi = 0$$

OSSERVAZIONE 3.1. *La semplice applicazione del teorema della divergenza fatta consente di riconoscere l'annullamento anche di tutti i seguenti integrali superficiali*

$$\iint_{\partial\Omega} \{\alpha\, \nu_x + \beta\, \nu_y + \gamma\, \nu_z\}\, d\sigma = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$$

4. Esercizio

Calcolare il momento d'inerzia

$$\iint_{\mathcal{S}_H} (x^2 + y^2) d\sigma$$

della porzione $\mathcal{S}_H$ della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ al di sopra della quota $z = H$ rispetto all'asse z.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Rappresentazione parametrica della $\mathcal{S}_H$

$$\begin{cases} x = & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = & \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = & \cos(\varphi) \end{cases} \qquad A_H : \varphi \in [0, \arccos(H)],\, \theta \in [0, 2\pi]$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos(\theta) & \cos\varphi\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{L^2+M^2+N^2} = \sin(\varphi)$$

L'integrale superficiale richiesto si riduce pertanto a

$$\iint_{\mathcal{S}_H} (x^2+y^2)d\sigma = \iint_{A_H} \sin^3(\varphi)\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\arccos(H)} \sin^3(\varphi)d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}\cos^3(\varphi) - \cos(\varphi)\right]_0^{\arccos(H)} = 2\pi \left\{\frac{1}{3}H^3 - H + \frac{2}{3}\right\}$$

5. Esercizio

Calcolare le coordinate del baricentro

$$\{x_G, y_G, z_G\} = \frac{1}{Area(\mathcal{S}_H)} \left\{ \iint_{\mathcal{S}_H} x d\sigma, \iint_{\mathcal{S}_H} y d\sigma, \iint_{\mathcal{S}_H} z d\sigma, \right\}$$

essendo $\mathcal{S}_H$ *la porzione della sfera* $x^2+y^2+z^2=1$ *al di sopra della quota* $z=H$.

Soluzione:

Motivi di simmetria conducono a riconoscere facilmente che i due primi integrali superficiali

$$\iint_{\mathcal{S}_H} x d\sigma, \iint_{\mathcal{S}_H} y d\sigma,$$

valgono 0

Per quanto concerne il terzo si ha, tenuto conto della rappresentazione parametrica della sfera ben nota

$$\iint_{\mathcal{S}_H} z d\sigma = 2\pi \int_0^{\arccos(H)} \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi = \pi(1-H^2)$$

Tenuto conto che l'area della porzione di sfera é

$$Area(S_H) = \iint_{\mathcal{S}_H} d\sigma = 2\pi \int_0^{\arccos(H)} \sin(\varphi)\, d\varphi = 2\pi(1-H)$$

si ricava

$$z_G = \frac{\pi(1-H^2)}{2\pi(1-H)} = \frac{1}{2}(1+H)$$

OSSERVAZIONE 5.1. *Il valore dell'area* $2\pi(1-H)$ *trovato per la superficie* $\mathcal{S}_H$ *permette di calcolare, per differenza, anche l'area della restante porzione della semisfera superiore, con* $z \in [0, H]$ *che vale*

$$2\pi - 2\pi(1-H) = 2\pi\, H$$

valore uguale alla superficie laterale del cilindro tangente alla sfera, considerato anch'esso con $z \in [0, H]$.
Si ritrova, in altri termini, il risultato di Archimede sull'equivalenza della superficie dell'intera sfera con quella (laterale) del cilindro tangente.

6. Esercizio

Sia $\mathcal{S}$ *la superficie laterale del cono*

$$\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{a^2}y^2 - \frac{1}{b^2}z^2 = 0, \quad 0 \le z \le b$$

Calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}z^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{b}t\cos(\theta) \\ \\ y = \frac{a}{b}t\sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi],\, t \in [0, b] \\ \\ z = t \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}\cos(\theta) & \frac{a}{b}\sin(\theta) & 1 \\ -\frac{a}{b}t\sin(\theta) & \frac{a}{b}t\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L^2 + M^2 + N^2 = \frac{a\,t}{b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma = \frac{a^2}{b^3}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^b t^2 dt = \frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2+b^2}$$

7. Esercizio

Sia $\mathcal{S}$ la superficie della sfera di centro l'origine e raggio R, e sia $\overrightarrow{\nu} = \{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$ il versore normale esterno.
Calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)(\nu_x + \nu_y + \nu_z)\, d\sigma$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)(\nu_x + \nu_y + \nu_z)\, d\sigma = R^2 \iint_{\mathcal{S}} (\nu_x + \nu_y + \nu_z)\, d\sigma = 0$$

vedi precedente Esercizio 3.

8. Esercizio

Sia $\mathcal{S}$ la superficie della sfera di centro l'origine e raggio R, e $\overrightarrow{\nu} = \{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$ il versore normale esterno: calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_{\mathcal{S}} z\, \nu_z\, d\sigma$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\iint_{\mathcal{S}} z\, \nu_z\, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} \{0, 0, z\} \times \nu\, d\sigma$$

applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\iint_{\mathcal{S}} \{0, 0, z\} \times \nu\, d\sigma = \iiint_{\Omega} div(\{0, 0, z\}) dxdydz = \frac{4}{3}\pi R^3$$

9. Esercizio teorico

Siano Ω_R e Ω_r due sfere di centro l'origine e raggi R e r con $0 < r < R$, $A = \Omega_R - \Omega_r$ e $u(x, y, z)$ e $v(x, y, z)$ due funzioni di classe $C^2(A)$. Riconoscere l'uguaglianza:

$$\iint_{\partial A} \left\{ v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} \right\} d\sigma = \iiint_A \{ v \triangle u - u \triangle v \} \, dxdydz$$

avendo indicato come di consueto con ν il versore normale a ∂A esterno.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\textstyle\iint_{\partial A} v\frac{du}{d\nu} d\sigma = \iint_{\partial A} \, v \nabla u \times \nu \, d\sigma = \iiint_A \, div(v \nabla u) \, dx \, dy \, dz$$

$$\textstyle\iint_{\partial A} u\frac{dv}{d\nu} d\sigma = \iint_{\partial A} \, u \nabla v \times \nu \, d\sigma = \iiint_A \, div(u \nabla v) \, dx \, dy \, dz$$

svolgendo il conto delle *div* a secondo membro si ottiene

$$div(v \nabla u) = \nabla u \times \nabla v + v \triangle u, \quad div(u \nabla v) = \nabla v \times \nabla u + u \triangle v$$

da cui sottraendo membro a membro si ottiene l'eguaglianza richiesta nell'esercizio.

10. Esercizio teorico

Applicare la relazione dell'esercizio precedente al caso in cui $u(x, y, z)$ sia una funzione armonica, cioé tale che $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ e

$$v(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto dell'Esercizio 2 riesce, nell'insieme A definito precedentemente,

$$\iint_{\partial A} \left\{ \frac{1}{r}\frac{du}{d\nu} - u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} d\sigma = 0$$

ovvero, tenuto conto che

$$\partial A = \partial\Omega_R \cup \partial\Omega_r$$

naturalmente con le normali orientate opportunamente, e che

$$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$$

si ha

$$\frac{1}{R}\iint_{\partial\Omega_R}\frac{du}{d\nu}\,d\sigma + \frac{1}{R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u\,d\sigma = \frac{1}{r}\iint_{\partial\Omega_r}\frac{du}{d\nu}\,d\sigma + \frac{1}{r^2}\iint_{\partial\Omega_r} u\,d\sigma$$

Tenuto conto che per ogni funzione armonica riesce

$$\iint_{\partial\Omega_\rho}\frac{du}{d\nu}\,d\sigma = 0 \quad \forall\rho > 0$$

si ha

$$\frac{1}{R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u\,d\sigma = \frac{1}{r^2}\iint_{\partial\Omega_r} u\,d\sigma \tag{18}$$

11. Esercizio teorico

Ricavare dalla relazione precedente, sempre quindi con $u(x, y, z)$ armonica la relazione

$$u(0,0,0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u(x,y,z)\,d\sigma$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto della precedente (18) si ha, usando a secondo membro il teorema della media

$$\frac{1}{R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u\,d\sigma = \frac{1}{r^2}\left(4\pi\, r^2\right)\, u(\xi,\eta,\zeta)$$

ovvero

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\,\pi\,R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u\,d\sigma \tag{19}$$

Potete pensare di aver prodotto la (19) relativamente a scelte di Ω_r con r via via piú piccolo: l'unico punto $(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_r$ per ogni $r > 0$ é necessariamente l'origine, quindi non puó che essere $(\xi,\eta,\zeta) = (0,0,0)$ cioé

$$u(0,0,0) = \frac{1}{4\,\pi\,R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u\,d\sigma$$

OSSERVAZIONE 11.1. *L'espressione integrale a secondo membro della precedente uguaglianza rappresenta la media della funzione u sulla superficie sferica: la relazione ottenuta significa che il valore di una funzione armonica nel centro di una sfera é la media dei valori che essa prende sulla superficie della sfera.*
Qualcosa di simile accade per le funzioni di una variabile $f(x) = a\,x{+}b$: *scelto comunque un intervallo* $[\alpha, \beta]$ *il valore della* f *nel centro,*

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

é la media dei valori che la f *prende agli estremi dell'intervallo*

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

OSSERVAZIONE 11.2. *Un risultato analogo a quanto osservato nell'Esercizio 11 sussiste in dimensione 2, cioé per le funzioni* $u(x, y)$ *armoniche nel piano: la formula analoga di quella dell'Esercizio 11 é la seguente*

$$u(0,0) = \frac{1}{2\,\pi\,R}\int_{\partial\Omega_R} u(x,y)\,ds$$

essendo Ω_R *il cerchio di centro l'origine e raggio* R*.*
In Figura 4 si possono vedere i valori (in altezza) della funzione

$$u(x, y) = 2x + 3y + x^2 - y^2$$

armonica sui punti della circonferenza di centro l'origine e raggio $R = 0.75$
Il disegno, in grigio della quota $z = 0$ *permette di apprezzare che i valori della funzione armonica* u *siano su* metá *della circonferenza al di sopra di tale quota e per* metá *al di sotto, fenomeno che illustra il fatto che la media sia* 0, *il valore* $u(0, 0)$

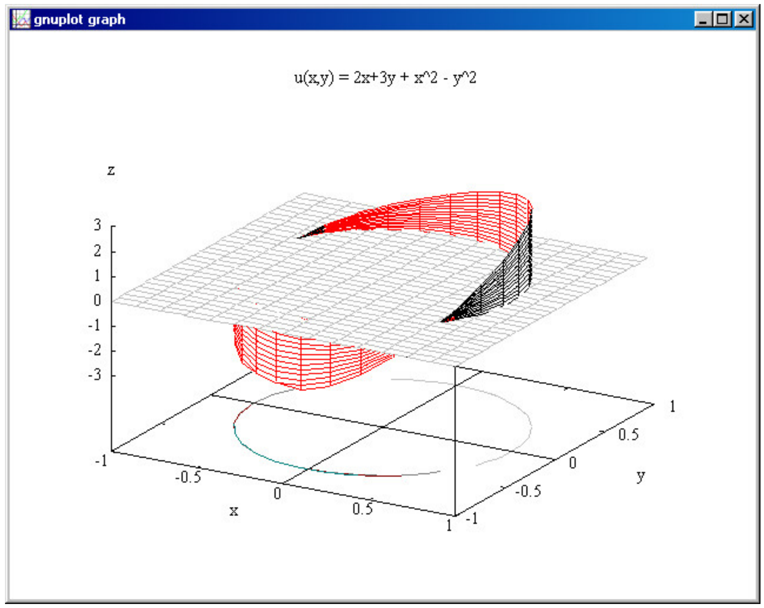


FIGURA 4. La funzione $u(x, y)$ sui punti della circonferenza $R = 0.75$

CAPITOLO 14

Le soluzioni del foglio 6

1. Esercizio

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare nella incognita $v(t)$

$$m\,v' = f - \beta\,v, \quad m, a, b \in R_+$$

Determinare il

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione riguarda la velocitá di un punto materiale che si muove di moto rettilineo sotto l'azione della forza f e soggetto a un attrito modellizzato dal termine $-\beta\,v$.
In termini matematici si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea:

- omogenea associata:

$$m\,v' = -\beta\,v, \quad \Rightarrow v_0(t) = A\,e^{-\frac{\beta}{m}t}, \quad A \in R$$

- equazione completa: il termine noto, la costante f, suggerisce di cercare soluzioni anch'esse costanti

$$\overline{v}(t) = \frac{f}{\beta}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione sono

$$v(t) = A\,e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{f}{\beta}$$

Tenuto conto che $m, a, b \in R_+$ riesce

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = A \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{f}{\beta} = \frac{f}{\beta}$$

Osservazione 1.1. *In presenza dell'attrito $-\beta\, v$. la velocitá sulla quale il moto si stabilizza non dipende dalla velocitá iniziale. La seguente Figura 1 rappresenta le soluzioni dell'equazione $v' = 1 - v$ in corrispondenza a velocitá iniziali diverse*

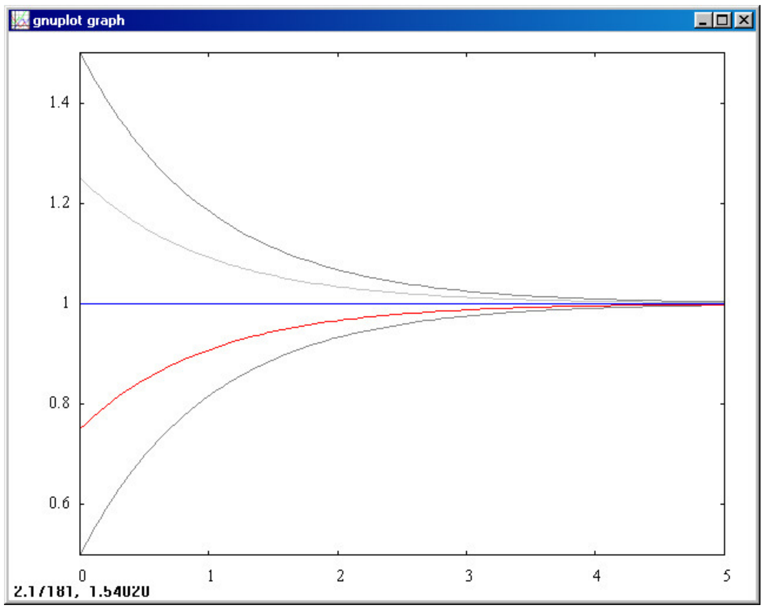


Figura 1. Le soluzioni di $v' = 1 - v$ con varie $v(0) \in [0.5, 1.5]$

Si riconosce che per $t > 4$ le varie soluzioni coincidono, praticamente con la costante 1.

2. Esercizio

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine nella incognita $x(t)$

$$x'' + ax' + b\,x = 0, \quad a, b \in R_+$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea: le soluzioni $x(t)$ formano uno spazio vettoriale V di dimensione 2.
Una base di V si cerca con le funzioni $e^{\lambda\, t}$ essendo λ soluzione dell'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0 \quad \lambda_i = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right) \; i = 1, 2$$

detta equazione caratteristica.
Poiché accogliamo anche radici complesse non dobbiamo preoccuparci del segno del radicando [1].
Dobbiamo invece preoccuparci che i due valori trovati siano diversi:

- se $a^2 - 4\,b \neq 0$ allora le due radici λ_1, λ_2 permettono di considerare due funzioni esponenziali
$$e^{\lambda_1\,x}, \quad e^{\lambda_2\,x}$$
linearmente indipendenti che, pertanto costituiscono una base di V.
- se invece $a^2 - 4\,b = 0$ allora si ha una sola radice λ_1 e una base di V é costituita dalle due funzioni
$$e^{\lambda_1\,x}, \quad x\,e^{\lambda_1\,x}$$

In altri termini le soluzioni dell'equazione omogenea assegnata sono

$$\begin{cases} \text{se} \quad a^2 - 4\,b \neq 0 : & x(t) = A\,e^{\lambda_1\,t} + B\,e^{\lambda_2\,t}, \\ & \\ \text{se} \quad a^2 - 4\,b = 0 : & x(t) = (A\,+B\,t)\,e^{\lambda_1\,t} \end{cases} \qquad \forall A, B \in R$$

Osservazione 2.1. *Il caso $a^2 - 4b \leq 0$, $\boldsymbol{a}$ piccolo rispetto a $\boldsymbol{b}$, ha particolare interesse perché, in tal caso l'equazione differenziale ha soluzioni periodiche o soluzioni dotate di oscillazioni smorzate.*
Siano $-a/2 \pm i\beta$ le due soluzioni dell'equazione caratteristica, le soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$x(t) = e^{-a\,t/2}\,(A\,\cos(\beta\,t) + B\,\sin(\beta\,t))$$

Si tratta, vedi Figura 2, delle oscillazioni elastiche con attrito...

3. Esercizio

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare nella incognita $T(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-1), & \\ & \qquad k > 0 \\ T(0) = 10 & \end{cases}$$

Determinare i tempi t_n nei quali riesce $T(t) = n, \quad n = 9, 8, \ldots 1.$

Soluzione:

[1]Se $\lambda = \alpha + i\beta$ allora $e^{(\alpha+i\beta)\,t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$

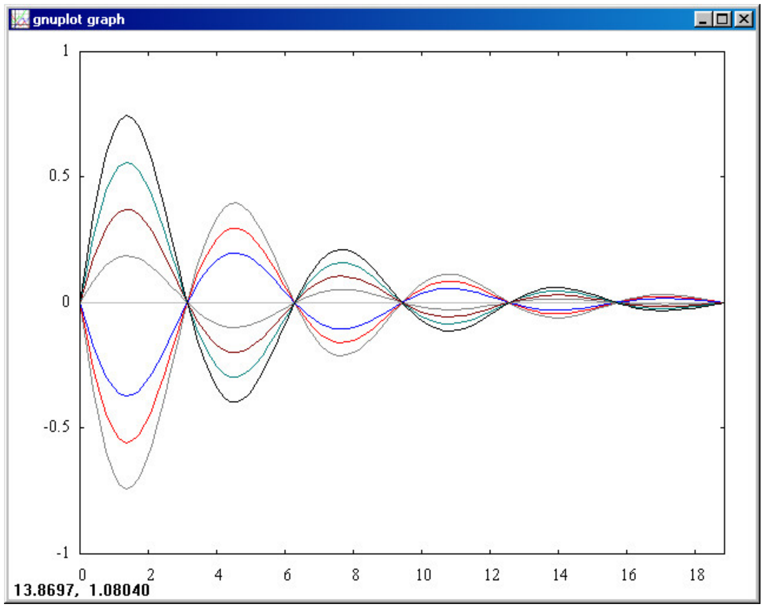


FIGURA 2. $x(t) = e^{-t/5} B \sin(t), \quad B \in [-1, 1]$

L'equazione rappresenta un modello di evoluzione temporale della temperatura $T(t)$ di un oggetto collocato in un ambiente a temperatura $T = 1$

Si tratta di un'equazione lineare di primo ordine non omogenea:

- equazione omogenea $T' = -k\,T, \quad T_0(t) = e^{k\,t}$
- equazione completa $\overline{T}(t) = 1$

Tutte le soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$T(t) = A\,e^{-k\,t} + 1$$

la soluzione che soddisfa il problema di Cauchy assegnato é quindi

$$A + 1 = 10 \quad \Rightarrow A = 9 \quad T(t) = 9\,e^{-k\,t} + 1$$

I tempi in cui si raggiungono i valori assegnati sono pertanto

$$9\,e^{-k\,t_n} + 1 = n \quad e^{-k\,t_n} = \frac{n-1}{9}$$

ovvero

$$t_n = \frac{1}{k} \log\left(\frac{9}{n-1}\right)$$

Ovviamente il valore $T = 1$ non viene raggiunto...
riesce solamente

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 1$$

4. Esercizio

Determinare una base per lo spazio vettoriale V delle soluzioni della seguente equazione differenziale lineare omogenea del terzo ordine

$$y^{[3]} - 4\,y^{[2]} + y' + 6\,y = 0$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea di terzo grado: lo spazio V ha dimensione 3
La determinazione di una sua base é affidata alla determinazione delle radici dell'equazione caratteristica associata

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

equazione che ha evidentemente la radice $\lambda = -1$ e quindi il primo membro si fattorizza in

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono pertanto

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Le tre funzioni

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{2x}, \quad y_3(x) = e^{3x}$$

sono tre elementi linearmente indipendenti di V e ne costituiscono pertanto una base.
In altri termini tutte le soluzioni dell'equazione omogenea assegnata sono date da

$$y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{2x} + C\,e^{3x}, \quad \forall A, B, C \in R$$

5. Esercizio

Determinare una base per lo spazio vettoriale V delle soluzioni della seguente equazione differenziale lineare omogenea del quarto ordine

$$y^{[4]} + 2\,y'' + y = 0$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine 4: lo spazio V delle sue soluzioni ha dimensione 4.

La determinazione di una sua base é affidata alla determinazione delle radici dell'equazione di quarto grado

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

equazione biquadratica che ha la radice doppia $\lambda^2 = -1$ da cui le due radici (doppie) dell'equazione caratteristica,

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

Una base di V é costituita pertanto dalle seguenti 4 funzioni

$$y_1(x) = e^{ix}, y_2(x) = x\, e^{ix}, y_3(x) = e^{-ix}, y_4(x) = x\, e^{-ix}$$

Tenuto conto che

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

una base di V é anche costituita da

$$y_1(x) = \cos(x),\ y_2(x) = x\cos(x),\ y_3(x) = \sin(x),\ y_4(x) = x\sin(x)$$

Ovvero ancora tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y(x) = (A + B\, x)\cos(x) + (c + D\, x)\sin(x), \quad \forall A, B, C, D \in R$$

6. Esercizio

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$$

SOLUZIONE:

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea: soluzioni dell'equazione si determinano decomponendo il secondo membro nei tre addendi che lo compongono e determinando, per ciascun addendo, una soluzione ottenibile come riconosciuto nei casi particolari (polinomi, esponenziali, ecc.) considerati.

- Equazione omogenea $y' - 5y = 0, \quad y_0(x) = e^{5x}$
- prima equazione non omogenea $y' - 5y = 3e^x, \quad \overline{y}_1(x) = -3/4\, e^x$
- seconda equazione non omogenea $y' - 5y = -2x, \quad \overline{y}_2(x) = 2/5\, x - 2/25$
- terza equazione non omogenea $y' - 5y = 1, \quad \overline{y}_2(x) = 1/5$

Tutte le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

$$y(x) = A\, e^{5x} - \frac{3}{4}\, e^x + \frac{2}{5}\, x - \frac{2}{25} + \frac{1}{5}$$

7. Esercizio

Sia assegnata l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x\,y} \\ \\ y(1) = k^2 \quad (k > 0) \end{cases}$$

- determinare la soluzione,
- determinare l'intervallo in cui é definita,
- determinare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} y(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} y'(x)$$

- disegnare il grafico della soluzione nel caso $k = 1$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$y' = \frac{1}{x\,y}, \qquad y\,y' = \frac{1}{x}$$

da cui integrando

$$\int_{k^2}^{y} y dy = \int_1^x \frac{1}{x} dx \quad y^2 - k^4 = \log(x^2)$$

La soluzione é pertanto

$$y(x) = \sqrt{k^4 + \log(x^2)}$$

funzione definita per

$$\log(x^2) \geq -k^4 \quad \to x^2 \geq e^{-k^4} \quad \to x \geq e^{-k^4/2}$$

É evidente che, seppur lentamente, $y(x)$ diverge al crescere di x e che riesce

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$$

Per quanto concerne il limite della derivata prima si ha, tenuto conto che la funzione $y(x)$ verifica l'equazione differenziale,

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,y(x)} = 0$$

Il grafico della soluzione che verifica la condizione iniziale $y(1) = 1$ é riportato in Figura 3.

Si osservi che una funzione, si pensi alle soluzione dell'equazione differenziale di questo esercizio, puó divergere per $x \to +\infty$ pur avendo una derivata prima infinitesima.

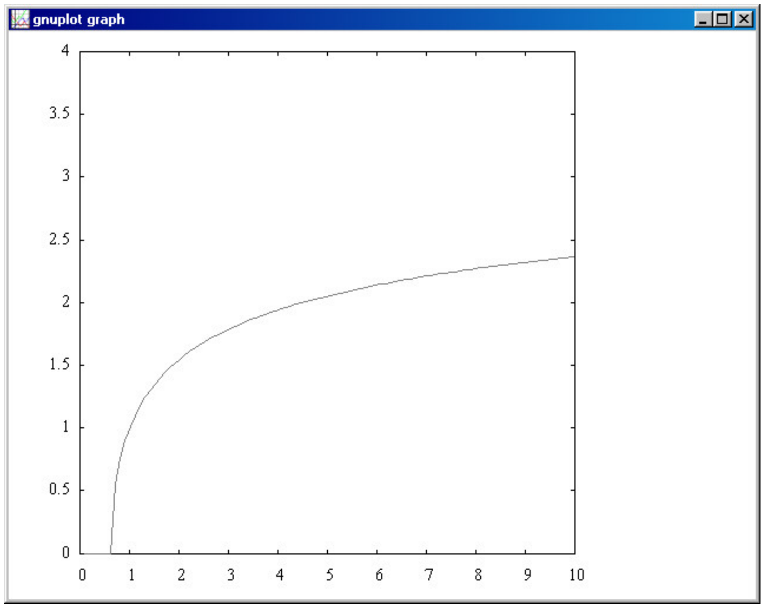


FIGURA 3. Il grafico di $y(x) = \sqrt{1 + \log(x^2)}$

8. Esercizio

Sia assegnata l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{y} = 0 \\ y(0) = n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- determinare le soluzioni $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$
- determinare gli intervalli (α_n, β_n) in cui sono definite,
- disegnarne i grafici,
- determinare i limiti

$$\lim_{x \to \alpha_n} y_n(x), \quad \lim_{x \to \beta_n} y_n(x)$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$y\, y' = -x \quad \to \left(\frac{1}{2} y^2\right)' = -\left(\frac{1}{2} x^2\right)'$$

da cui integrando si ottiene

$$y^2 - n^2 = -x^2 \quad \to y_n(x) = \sqrt{n^2 - x^2}$$

espressione che rappresenta ovviamente la semicirconferenza superiore di centro l'origine e raggio $r = n$.
Le funzioni $y_n(x)$ sono definite per $|x| \leq n$.
Si ricordi che

$$y_n \in C^0([-n, n]) \cap C^1(]-n, n[)$$

quindi sono soluzioni dell'equazione nell'intervallo aperto $(-n, n)$.
I limiti richiesti sono entrambi 0.

9. Esercizio

Sia assegnata l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' - n\,\dfrac{x}{y} = 0 \\ y(0) = 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- Determinare le soluzioni per $n = 1, 2, \dots,$
- determinare gli intervalli in cui sono definite.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$y' - n\,\frac{x}{y} = 0 \qquad \to y\,y' = n\,x$$

da cui integrando

$$\int_1^y y\,dy = \int_0^x nx\,dx \qquad \to y^2(x) - 1 = nx^2$$

ne segue

$$y_n(x) = \sqrt{1 + nx^2}$$

Si tratta di funzioni definite in tutto l'asse reale.
Ovvero le equazioni differenziali[2] assegnate hanno soluzione in grande...

10. Esercizio

Sia assegnata l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{x\,y^3} \\ y(1) = n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- Determinare le soluzioni $y_n(x)$ per gli $n = 1, 2, 3 \dots$
- determinare gli intervalli in cui sono definite,

[2]Si osservi che si tratta di equazioni differenziali lineari nella incognita y^2...

- determinare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} y_n'(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} y_n''(x)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Si tratta di un'equazione del *tipo omogeneo*

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad y = z\,x \quad z'\,x + z = f(z)$$

nel nostro caso

$$z'\,x + z = \frac{2z^4+1}{z^3} \qquad z' = \frac{1}{x}\,\frac{z^4+1}{z^3},\ z(1) = n$$

da cui

$$\int_n^z \frac{z^3}{z^4+1} dz = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$

moltiplicando per 4 entrambi i membri si ottiene la semplice integrazione

$$\log\left(\frac{z^4+1}{n^4+1}\right) = \log(x^4) \qquad \Rightarrow z(x) = \sqrt[4]{(1+n^4)x^4-1}$$

Da cui tornando ad y si ottiene

$$y_n(x) = x\,\sqrt[4]{(1+n^4)x^4-1}$$

Le funzioni $y_n(x)$ sono (ovviamente) definite per

$$(1+n^4)x^4 - 1 \geq 0, \quad \to x \geq \frac{1}{1+n^4}$$

In altri termini piú é alto il valore iniziale $n = y(1)$ piú é ampio l'intorno di $x = 1$ nel quale la soluzione é definita.
Si noti, vedi Figura 4, l'andamento verticale con cui le $y_n(x)$ piombano sull'asse delle x in corrispondenza di $x_n = 1/(1+n^4)$

$$y_n'(x) = \frac{(1+n^4)\ x^4}{(-1+(1+n^4)\ x^4)^{\frac{3}{4}}} + \left(-1+\left(1+n^4\right)\ x^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

a secondo membro due addendi entrambi divergenti al crescere di x, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} y_n'(x) = +\infty$$

$$y_n''(x) = \frac{(1+n^4)\ x^3\ (-5+2\ (1+n^4)\ x^4)}{(-1+(1+n^4)\ x^4)^{\frac{7}{4}}}$$

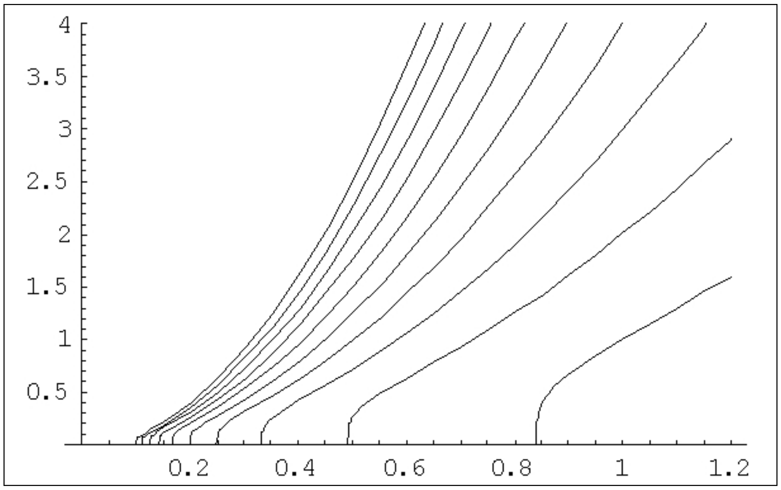


FIGURA 4. Le soluzioni $y_n(x), \quad n = 1, \dots 10$

numeratore e denominatore crescono con x^7: il limite pertanto esiste e vale

$$\lim_{x\to+\infty} y_n'(x) = \frac{2(1+n^4)^2}{(\sqrt[4]{1+n^4})^7} = 2\sqrt[4]{1+n^4}$$

OSSERVAZIONE 10.1. *Una funzione molto semplice che diverge lei, la sua derivata prima ma non la derivata seconda é, ad esempio,* x^2. *L'esponenziale* e^x *invece diverge lei, la sua derivata prima, la sua derivata seconda, ecc.ecc...*

CAPITOLO 15

Le soluzioni del foglio 7

1. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale

$$y' = \sin(y)$$

- *disegnare (in modo qualitativo) il grafico delle soluzioni,*
- *determinare le soluzioni $y_k(x)$ dei problemi di Cauchy*

$$y(0) = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathcal{N}$$

- *determinare i limiti*

$$\lim_{x\to-\infty} y_k(x), \quad \lim_{x\to+\infty} y_k(x)$$

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é di tipo autonomo $y' = f(y)$: tutti i valori y_0 per i quali riesca $\sin(y_0) = 0$ rappresentano soluzioni d'equilibrio, che sono pertanto le funzioni costanti

$$y \equiv 0, \quad y \equiv \pm\pi, \quad y \equiv \pm 2\pi, \dots \quad y \equiv \pm k\pi \quad k \in \mathcal{N}$$

Tutte le altre soluzioni dell'equazione, diverse da tali costanti,

- sono monotone,
- non prendono mai i precedenti valori d'equilibrio
- se $y(0) \in (k_0\pi, (k_0+1)\pi)$ la soluzione verifica le limitazioni

$$k_0\pi < y(x(< (k_0+1)\pi.$$

La soluzione quindi del problema $y' = \sin(y), \quad y(0) = a \neq k\pi$ é una funzione monotona crescente se $\sin(a) > 0$, decrescente se $\sin(a) < 0$.

Le soluzioni dei problemi assegnati al punto 2 sono pertanto

- se k é pari le soluzioni d'equilibrio

$$y(x) \equiv \frac{k}{2}\,\pi$$

- se k é dispari funzioni $y(x)$ monotone
  - crescenti se $\sin(k\pi/2) = 1 > 0$
  - decrescenti se $\sin(k\pi/2) = -1 < 0$

La risposta al punto 3 dipende pertanto dalla paritá di k

- se k é pari $y_k(x) \equiv k\frac{\pi}{2}$ e ovviamente i due limiti coincidono anch'essi con tale valore,
- se $k \equiv 1$ modulo 3 allora $y_k(x)$ é crescente e riesce
$$\lim_{x\to-\infty} y_k(x) = (k-1)\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} y_k(x) = (k+1)\frac{\pi}{2}$$
- se $k \equiv 0$ modulo 3 allora $y_k(x)$ é decrescente e riesce
$$\lim_{x\to-\infty} y_k(x) = (k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} y_k(x) = (k-1)\frac{\pi}{2}$$

La particolare semplicitá dell'equazione assegnata[1] consente il calcolo esplicito [2] delle soluzioni, vedi Figura 1: sia
$$y' = \sin(y), \quad y(0) = a \in (-\pi, \pi), \; a \neq 0$$

$$y' = \sin(y) \quad \leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sin(y)} dy = \int \frac{\sin^2(y/2) + \cos^2(y/2)}{2\sin(y/2)\cos(y/2)} dy = x + c$$
ovvero
$$\int \frac{\sin(y/2)}{\cos(y/2)} d(y/2) + \int \frac{\cos(y/2)}{\sin(y/2)} d(y/2) = x + c$$
ovvero ancora

$$-\log(|\cos(y/2)|) + \log(|\sin(y/2)|) = x + c \quad \to \quad \log(|\tan(y/2)|) = x + c$$
$$\frac{1}{2} y = \arctan(k\, e^x) \quad \to \quad y(x) = 2\arctan(k\, e^x)$$
Le soluzioni relative a condizioni iniziali $a \notin (-\pi, \pi)$ si ottengono semplicemente per simmetria: la soluzione $y_b(x)$ che verifica, ad esempio, la condizione iniziale
$$y(0) = b = \pi + 0.123$$
é la traslata, $y_a(x) + 2\pi$, della soluzione $y_a(x)$ relativa alla condizione iniziale
$$y(0) = a = -\pi + 0.123$$

[1] Attenzione: dovendo dividere per $\sin(y)$ riferiamoci a intervalli della y in cui tale divisione sia lecita...

[2] Funzionano, in questo caso, entrambi i passi dell'algoritmo risolutivo: una facile integrazione e una altrettanto facile esplicitazione ...

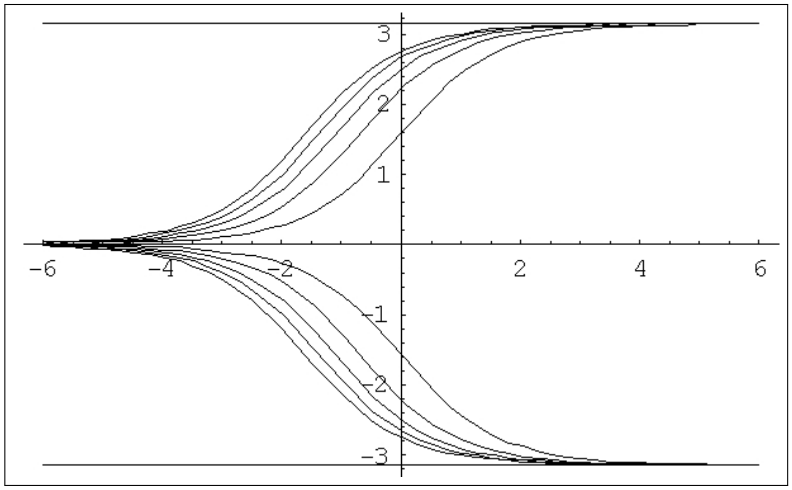


FIGURA 1. $y(x) = 2\ \arctan(k\, e^x), \quad k, -5, \ldots 5$

Pertanto i grafici di tutte le soluzioni sono riportati in Figura 2

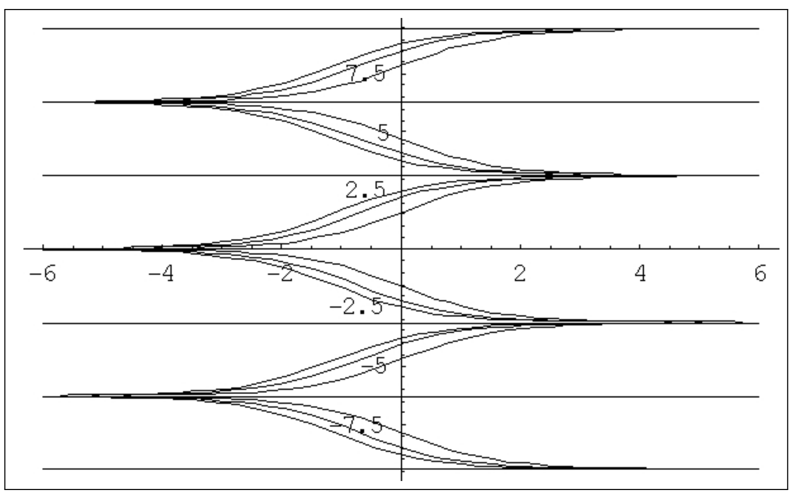


FIGURA 2. Le soluzioni dell'equazione $y' = \sin(y)$

OSSERVAZIONE 1.1. *Nel procedimento precedente é stato fondamentale il fatto che l'espressione $f(y)$ a secondo membro dell'equazione autonoma assegnata fosse una funzione periodica quale* $\sin(y)$:

$$y'(x) = f(y(x)) : \quad f(z + H) = f(z)\, \forall z \;\rightarrow\; (y(x) + H)' = f(y(x) + H)$$

2. Esercizio

Indicate con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y\dfrac{1-y}{1+y^2} \\ y(0) &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' &= y\dfrac{1-y}{1+y^2} \\ y(0) &= \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

determinare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} y_i(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} y_i(x) \quad i=1,2$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione differenziale assegnata é di tipo autonomo e possiede come soluzioni d'equilibrio

$$y(x)\equiv 0, \qquad y(x)\equiv 1$$

di conseguenza ogni altra soluzione

- non prende mai né il valore 0 né il valore 1,
- é strettamente monotona
  - crescente se $0 < y(0) < 1$,
  - decrescente negli altri casi.

Pertanto, vedi Figura 3,

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\to-\infty} y_1(x) = 0 & \lim_{x\to+\infty} y_1(x) = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} y_2(x) = +\infty & \lim_{x\to+\infty} y_2(x) = 1 \end{array}$$

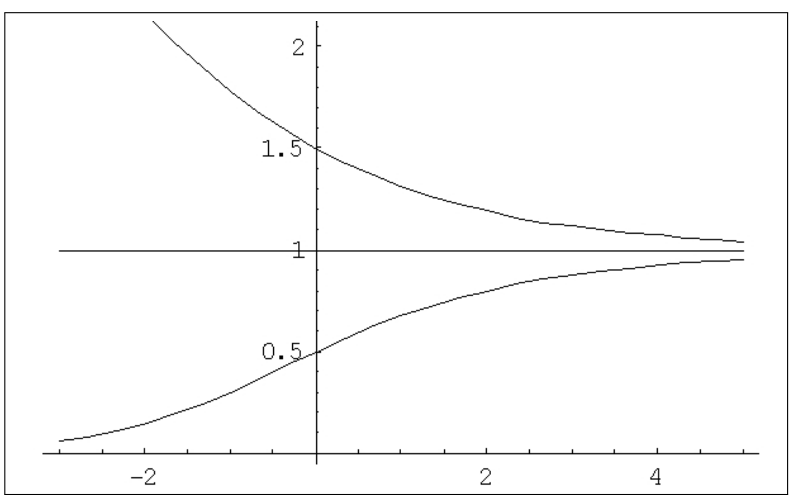


FIGURA 3. Le soluzioni $y_1(x)$, $\quad y_2(x)$ del secondo esercizio.

3. Esercizio

Sia $y(x)$ soluzione dell'equazione differenziale,

$$y' = y(1-y)(1+y)$$

diversa dalle soluzioni d'equilibrio:

- *determinare le quote alle quali il grafico di $y(x)$ presenta flessi,*
- *esaminare per quali valori del parametro a la soluzione del problema di Cauchy*

  $$y' = y(1-y)(1+y), \quad y(0) = a$$

  ammette flessi.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$y'' = f'(y).y' = f'(y).f(y), \quad f'(y) = 1 - 3y^2 = 0$$

I flessi si possono avere solo alle quote

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tenuto presente inoltre che

$$y''' = -6y\,y' = -6y^2(1-y)(1+y): \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y''' \neq 0$$

si riconosce che a tali quote esiste veramente un flesso.

I grafici delle soluzioni non costanti dell'equazione assegnata, come quelle di ogni altra equazione autonoma, non intersecano mai i grafici delle soluzioni d'equilibrio $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, e sono grafici di funzioni monotone.
Ricordato che i flessi si hanno solo alle due quote

$$-\frac{1}{\sqrt{(3)}} \in (-1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{(3)}} \in (0, 1)$$

si riconosce, vedi Figura 4 , che hanno flessi solo le soluzioni dei problemi di Cauchy con $a \in (-1, 0)$ e $a \in (0, 1)$

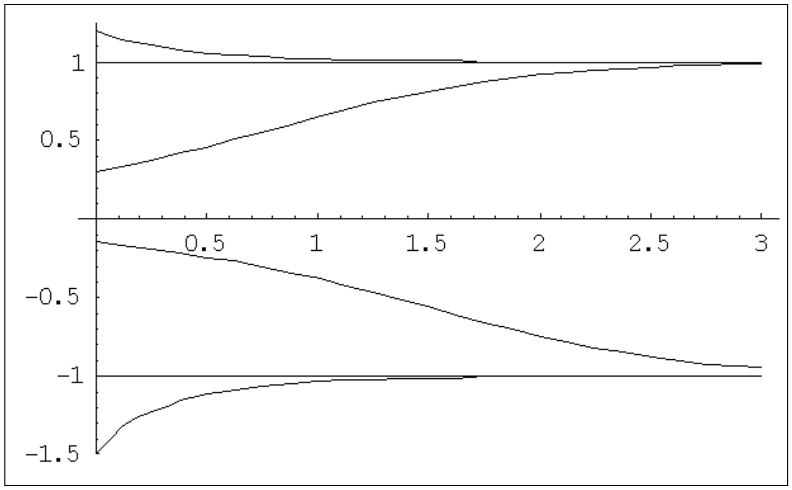


FIGURA 4. Le soluzioni del terzo esercizio, e i possibili flessi.

4. Esercizio

Assegnata la serie di potenze

$$1 - \lambda^2 x^2 + \lambda^4 x^4 - \lambda^6 x^6 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lambda^k x^{2k}$$

- *determinare servendosi del criterio del rapporto l'intervallo di convergenza,*
- *ricordata l'espressione della serie geometrica ricavare l'espressione $S_\lambda(x)$ della somma della serie assegnata,*
- *esaminare la relazione che intercorre (in un intorno dell'origine) tra $S_\lambda(x)$ e $\arctan(\lambda x)$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\left| \frac{\lambda^{2k} x^{2k}}{\lambda^{2(k-1)} x^{2(k-1)}} \right| = \left| \lambda^2 x^2 \right|$$

L'intervallo di convergenza é pertanto

$$|\lambda x| < 1, \rightarrow \ -\frac{1}{|\lambda|} < x < \frac{1}{|\lambda|}$$

La somma, tenuto conto dell'alternanza dei segni, é

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2},$$

Il legame con la funzione $\arctan(x)$ é il seguente

$$\arctan(\lambda\, x)' = \lambda\, S_\lambda(x)$$

OSSERVAZIONE 4.1. *L'espressione trovata per la somma della serie é quella di una funzione definita per ogni x : circostanza sorprendente dal momento che la serie, invece, é convergente solo in un intorno (neanche troppo grande) dell'origine, vedi Figura 5 !*

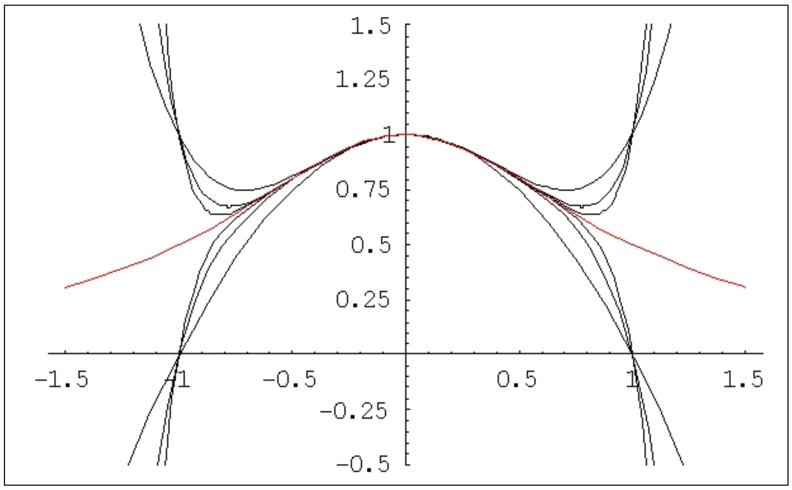


FIGURA 5. $\lambda = 1$: i grafici delle prime somme parziali e quello, in rosso, della somma $1/(1+x^2)$.

5. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale

$$y' + x^2\, y = x^2$$

determinare sotto forma di una o piú serie di potenze le sue soluzioni .

SOLUZIONE:

L'indagine standard: si tratta di un'equazione lineare, quindi, tradizionalmente, si cercano prima le soluzioni $y_0(x)$ dell'omogenea associata e poi si cerca una soluzione (qualsiasi) $\overline{y}(x)$ dell'equazione completa.
É facile trovare $\overline{y}(x) \equiv 1$, per le $y_0(x)$ abbiamo ovviamente

$$y_0(x) = c\, e^{-x^3/3}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale lineare assegnata sono

$$y(x) = 1 + c\, e^{-\frac{x^3}{3}}$$

che, ricordata l'espressione in serie di Taylor dell'esponenziale si scrivono anche come

$$y(x) = 1 + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^3/3)^k}{k!} = 1 + c \left(1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} \dots \right) \tag{20}$$

Riconosciamo ora lo stesso risultato con l'algoritmo per serie. cerchiamo

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$$

Sostituendo nell'equazione deve aversi

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots = x^2$$

da cui seguono le seguenti condizioni necessarie per i coefficienti:

$$\begin{array}{ll} a_1 & = 0 \\ 2\, a_2 & = 0 \\ 3\, a_3 + a_0 & = 1 \\ 4\, a_4 + a_1 & = 0 \\ 5\, a_5 + a_2 & = 0 \\ 6\, a_6 + a_3 & = 0 \\ \dots & = 0 \\ k\, a_k + a_{k-3} & = 0 \\ \dots & = 0 \end{array}$$

Scelto, ad esempio

$$a_0 = 1 + c,$$

si ricava

$$a_3 = -c\frac{1}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = c\frac{1}{18}, \dots$$

coefficienti che producono (ovviamente) la stessa risposta di (20): molti coefficienti nulli, diversi da zero solo quelli di indice multiplo di 3, ecc. ecc.

6. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale

$$(x+1)\,y' + y = 2\,x$$

determinare sotto forma di una o piú serie di potenze le sue soluzioni .

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$$

sostituendo nell'equazione differenziale si ha

$$(x+1)\sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 2\,x$$

ovvero

$$\begin{array}{lllll} & +a_1 x & +2a_2x^2 & +3a_3x^3 & +\dots \\ a_1 & +2a_2x & +3a_3x^2 & +4a_4x^3 & +\dots \\ a_0 & +a_1x & +a_2x^2 & +a_3x^3 & +\dots \\ = & & & & \\ 0 & +2x & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

da cui

$$a_0 + a_1 = 0,\ 2\,a_1 + 2\,a_2 = 2,\ \dots 2\,a_k + 2\,a_{k+1} = 0 \quad \forall k \geq 2$$

Posto $a_0 = \alpha$ si a

$$a_1 = -\alpha,\ a_2 = 1+\alpha,\ a_3 = -(1+\alpha),\ a_4 = 1+\alpha,\ a_5 = -(1+\alpha), \dots$$

Soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$y_\alpha(x) = \alpha(1-x)\ +\ (1+\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\, x^k$$

Si noti come la serie di potenze ottenuta, una serie geometrica, sia convergente solo nell'intervallo $(-1,1)$.

La funzione $y_\alpha(x)$ precedente é la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)\,y' + y & = 2\,x \\ y(0) & = \alpha \end{cases}$$

Il minimo di conoscenze posseduto sulla serie geometrica fa del resto riconoscere che

$$y_\alpha(x) = \alpha\ (1-x) + \frac{(1+\alpha)\ x^2}{1+x}$$

OSSERVAZIONE 6.1. *L'equazione assegnata, scritta nella forma standard $y' = f(x,y)$ si presenta come*

$$y' = \frac{2x-y}{1+x}$$

che fa prevedere... qualche incidente *per $x = -1$!*

7. Esercizio

Assegnato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x' = & -x + 2\,y \\ y' = & -3\,x + 4\,y \end{cases}$$

- *determinare gli autovalori della matrice A dei coefficienti,*
- *determinare i corrispondenti autovettori, e, quindi determinare tutte le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ del sistema,*
- *determinare le soluzioni $x_0(t)$ e $y_0(t)$ che soddisfano le condizioni iniziali*

$$x(-\log(2)) = 0, \quad y(-\log(2)) = \frac{1}{4}$$

- *determinare sul piano $(x\,y)$ la curva*

$$\mathcal{C} : x = x_0(t), y = y_0(t), t \in [-6, 0]$$

SOLUZIONE:

La matrice dei coefficienti é

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono le radici λ dell'equazione

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \to \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

Autovettore relativo a $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{cases} -x + 2y & = x \\ -3x + 4y & = y \end{cases} \quad \to x = 1, y = 1$$

Autovettore relativo a $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} -x + 2y & = 2x \\ -3x + 4y & = 2y \end{cases} \quad \rightarrow x = 2, y = 3$$

Soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ovvero

$$x(t) = c_1\, e^t + 2c_2\, e^{2t}, \quad y(t) = c_1\, e^t + 3c_2\, e^{2t}$$

La soluzione particolare richiesta in relazione alle condizioni iniziali al temp $t = -\log(2)$ si determina risolvendo il sistema nelle incognite c_1 e c_2 seguente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4}$$

ovvero, moltiplicando per 4

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad c_1 = -1, c_2 = 1$$

La soluzione richiesta é pertanto, Figura 6,

$$x_0(t) = -\, e^t + 2\, e^{2t}, \quad y_0(t) = -\, e^t + 3\, e^{2t}$$

8. Esercizio

Assegnato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x' = & 3x + 2y \\ y' = & -5\, x + y \end{cases}$$

determinare (nel campo complesso)

- *gli autovalori della matrice dei coefficienti,*
- *i corrispondenti autovettori (complessi)*
- *tutte le soluzioni del sistema, esprimendole in termini di funzioni reali.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La matrice dei coefficienti é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

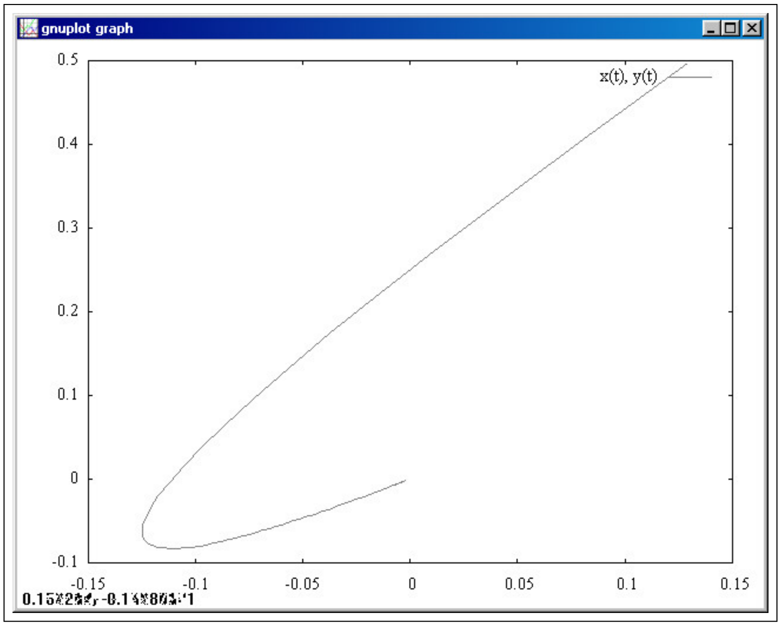


FIGURA 6. La curva $\mathcal{C} : x = x_0(t), y = y_0(t), t \in [-6, -0.5]$

I suoi autovalori sono le radici λ dell'equazione

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\,\lambda + 13 = 0 \quad \to \lambda_k = 2 \pm 3\,i$$

Si noti che si tratta di due numeri complessi diversi, coniugati fra loro:

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

Autovettore relativo a $\lambda_1 = 2 + 3i$:

$$\begin{cases} 3x + 2y = & (2+3i)x \\ -5x + y = & (2+3i)y \end{cases} \quad \to x_1 = -1 - 3i,\ y_1 = 5$$

Autovettore relativo a $\lambda_2 = 2 - 3i$:

$$\begin{cases} 3x + 2y = & (2-3i)x \\ -5x + y = & (2-3i)y \end{cases} \quad \to x_2 = -1 + 3i,\ y_2 = 5$$

Si noti che si tratta di due autovettori complessi, uno per ciascun autovalore, coniugati fra loro:

$$\{x_1, y_1\} = \overline{\{x_2, y_2\}}$$

Soluzioni del sistema, sotto forma di esponenziali complessi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1+3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(2-3i)t} + c_2 \begin{pmatrix} -1-3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(2+3i)t}$$

tradotti gli esponenziali nella forma trigonometrica,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1+3i \\ 5 \end{pmatrix} [\cos(3t) - i\sin(3t)] + \right.$$

$$\left. + c_2 \begin{pmatrix} -1-3i \\ 5 \end{pmatrix} [\cos(3t) + i\sin(3t)] \right\} =$$

$$= e^{2t} \left\{ c_1 \left(\begin{pmatrix} -\cos(3t) + 3\sin(3t) \\ 5\cos(3t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ -5\cos(3t) \end{pmatrix} \right) + \right.$$

$$\left. c_2 \left(\begin{pmatrix} -\cos(3t) + 3\sin(3t) \\ 5\cos(3t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ -5\cos(3t) \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Per somma e sottrazione si riconosce che sono soluzioni del sistema anche le parti reali e quelle immaginarie

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t} \{(-\cos(3t) + 3\sin(3t))\} \\ y_1(t) = 5e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_2(t) = e^{2t} \{(3\cos(3t) + \sin(3t))\} \\ y_2(t) = -5e^{2t} \sin(3t) \end{cases}$$

Tutte le soluzioni sono pertanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha,\, \beta \in \mathcal{R}$$

9. Esercizio

Dire se le funzioni

$$f_1(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{(x^2+1)x\sqrt{|x|}}, \quad f_2(x) = \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2}, \quad f_3(x) = \frac{\sin(x)}{x\sqrt{|x|}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[-1, 1]$ *e* $(0, +\infty)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- **Prima funzione** $f_1(x)$:

- ORIGINE: $|1-\cos^2(x)| = |1+\cos(x)||1-\cos(x)| \leq x^2$ quindi
$$|f_1(x)| \leq \frac{|x|^{1-1/2}}{1+x^2}$$
$f_1(x)$ é infinitesima nell'origine, quindi prolungabile per continuitá nell'origine.
Quindi é integrabile in qualunque intervallo anche contenente l'origine in senso classico.
- ALL'INFINITO:
$$|f_1(x)| \leq \frac{1}{x^3\sqrt{|x|}} = \frac{1}{|x|^{3+1/2}}$$
lo smorzamento con esponente $\alpha = 7/2 > 1$ garantisce l'esistenza dell'integrale improprio su qualsiasi intervallo anche illimitato, come pure su tutta la retta.

- **Seconda funzione:** $f_2(x)$
  - ORIGINE: esiste
$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \frac{1}{2}$$
quindi $f_2(x)$ é prolungabile per continuitá nell'origine.
Esiste quindi l'integrale in senso classico in ciascun intervallo chiuso e limitato anche che includa l'origine.
  - ALL'INFINITO: La funzione ha forma diversa se $x \to +\infty$ ovvero se $x \to -\infty$:
nel primo caso é divergente positivamente per via dell'addendo e^x a numeratore,
nel secondo caso $f_2(x)$ é sufficientemente smorzata, tenuto conto del numeratore limitato e del denominatore x^2
Pertanto esiste l'integrale improprio su ogni semiretta illimitata inferiormente e non esiste l'integrale improprio sulle semirette illimitate superiormente.

- **Terza funzione :** $f_3(x)$
  - ORIGINE: La funzione diverge nell'origine ma, tenuto conto che $|\sin(x)/x| \leq 1$ riesce
$$|f_3(x)| \leq \frac{1}{|x|^{1/2}}$$
divergenza di esponente $\alpha = 1/2$ tollerabile: quindi esiste l'integrale improprio di $f_3(x)$ in ogni intervallo chiuso e limitato anche contenente l'origine.

– ALL'INFINITO: Lo smorzamento della $f_3(x)$, tenuto conto della limitatezza del numeratore é

$$|f_3(x)| \leq \frac{1}{|x|^{1+1/2}}$$

sufficiente a riconoscere l'esistenza dell'integrale improprio in qualsiasi intervallo anche illimitato.

10. Esercizio

Dire per quali β la funzione

$$F(z) = \iint_C \frac{(x+y+z)^3}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}\, dx\, dy, \quad C = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

- *é definita per ogni z,*
- *ammette limite per $z \to 0$*
- *é funzione continua di z.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda é continua come funzione di x e y per ogni $z \neq 0$: quindi $F(z)$ é, ovviamente definita per ogni $z \neq 0$.
La possibilitá di riconoscere $F(0)$ dipende dalla possibilitá o meno di riconoscere l'esistenza dell'integrale

$$\iint_C \frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}\, dx\, dy$$

esistenza che dipende da β :
la divergenza consentita per un integrale doppio conduce, in questo caso a richiedere che

$$2\beta - 3 < 2 \quad \to \beta < \frac{5}{2}$$

Quindi se $\beta < 5/2$ la $F(z)$ é definita per ogni z.

Le risposte al secondo e al terzo quesito sono piú difficili: di fatto la risposta positiva ad uno dei due punti implica la risposta positiva anche all'altro.
Occupiamoci del terzo quesito: sia naturalmente $\beta < 5/2$, e indichiamo con C_ϵ il cerchietto del piano x, y di centro l'origine e raggio ϵ, riesce

$$C = C_\epsilon \cup (C - C_\epsilon)$$

e quindi

$$F(z) = \iint_{C_\epsilon} \frac{(x+y+z)^3}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}\,dx\,dy \quad + \iint_{C-C_\epsilon} \frac{(x+y+z)^3}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}\,dx\,dy$$

$$F(0) = \iint_{C_\epsilon} \frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}\,dx\,dy \qquad\qquad + \iint_{C-C_\epsilon} \frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}\,dx\,dy$$

Indicati con $p(z)$ e $s(z)$ il primo e il secondo addendo integrale nelle formule precedenti abbiamo

$$|F(z) - F(0)| \leq |p(z) - p(0)| + |s(z) - s(0)|$$

É abbastanza facile riconoscere che:

- gli addendi p sono infinitesimi con ϵ
- gli addendi s sono infinitesimi con z.

é a questo punto riconoscibile che il modulo $|F(z) - F(0)|$ sará piccolo se z é piccolo essendo maggiorato da due quantitá

$$|p(z) - p(0)| + |s(z) - s(0)|$$

che riconosciamo, per motivi diversi, piccole entrambe.

Per $\beta = 2$ la funzione F ha la seguente espressione

$$F(z) = \frac{\pi}{1+z^2}\,\{\dots\}$$

essendo l'espressione $\dots$ la seguente

$$-2\,z - 3\,z\,\log(z^2) - 3\,z^3\,\log(z^2) + 3\,z\,\log(1+z^2) + 3\,z^3\,\log(1+z^2)$$

Il suo grafico, quello di una funzione regolare anche in 0 é in Figura 7

Osservazione 10.1. *Questioni di continuitá di un integrale rispetto ai parametri presenti nella funzione integranda sono introdotte nel Capitolo 29 delle Dispense 2003.*

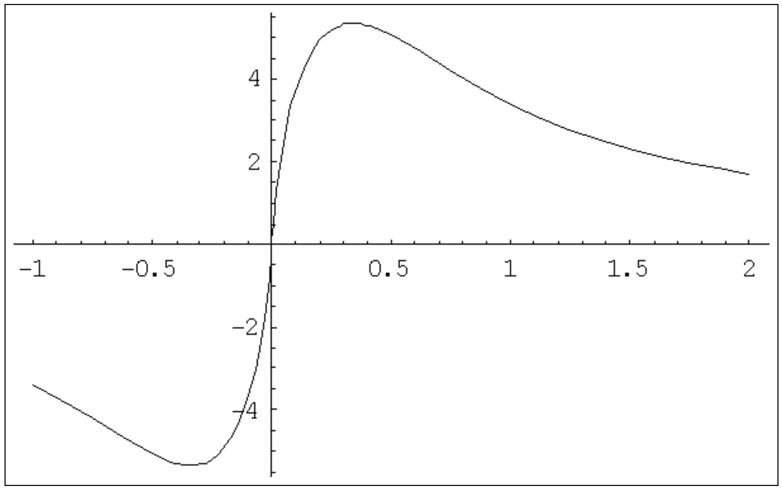


FIGURA 7. Il grafico di $F(z)$ per $\beta = 2$

Parte 3

Le esercitazioni 2005/2006

CAPITOLO 16

Le soluzioni del foglio 1

1. Esercizio

Sia $F(x, y) = x^2 - y^2 + x - y$

(1) *disegnare l'insieme di livello* $F(x, y) = 0$;
(2) *giustificare l'affermazione:* l'equazione $F(x, y) = 0$ non definisce implicitamente nè una funzione $y = y(x)$ nè $x = x(y)$ in alcun intorno di $(-1/2, -1/2)$;
(3) *dimostrare che* $F(x, y) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $y = y(x)$ *in un intorno di* $(0, -1)$*;*
(4) *determinare il polinomio di Taylor di ordine due relativo a tale funzione* $y(x)$ *di punto iniziale* $x_0 = 0$.

1.1. Soluzione.

$$x^2 - y^2 + x - y = (x - y)(x + y) + (x - y) = (x - y)(x + y + 1)$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \{x - y = 0\} \cup \{x + y + 1 = 0\}$$

L'insieme di livello E_0 richiesto coincide pertanto con le due rette

$$x - y = 0 \quad x + y + 1 = 0$$

Le due rette si intersecano nel punto $(-1/2, -1/2)$ pertanto esse (entrambe) non costituiscono in qualunque cerchio di centro tale punto né il grafico di una funzione $y = y(x)$ né quello di alcuna funzione $x = x(y)$.
Infatti le rette parallele all'asse y come pure quelle parallele all'asse x intersecano E_0 sempre in due punti, troppi...

Nel punto $(0, -1)$ sono soddisfatte le condizioni sufficienti del Teorema di Dini, infatti

- $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$
- $F((0, -1) = 0$
- $F_y(x, y) = -2y - 1 :\rightarrow F_y(0, -1) = 1 \neq 0$

La funzione implicita é $y = -1 - x$.

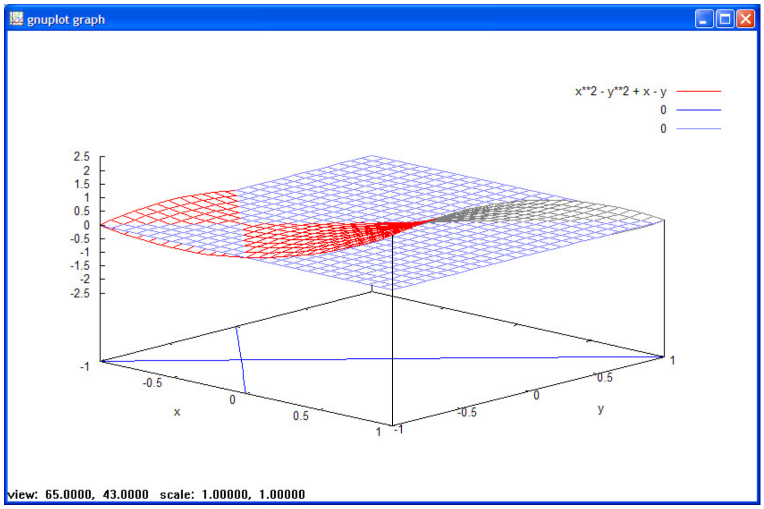


FIGURA 1. $z = x^2 - y^2 + x - y$ e il piano $z = 0$

2. Esercizio

(1) *Determinare l'insieme di livello*

$$y^2 - (x-1)^2 = 0$$

(2) *esaminare in quali sottinsiemi del piano tale insieme coincide con il grafico di una funzione* $y = f(x)$,

(3) *determinare le funzioni implicite* $y = y(x)$ *definite dall'equazione precedente.*

2.1. Soluzione.

$E_0 : \quad \{y = x - 1\} \cup \{y = 1 - x\}$, due rette,

E_0 é il grafico di una funzione $y = f(x)$ in ogni rettangolo che non includa il punto $(1, 0)$ in cui le due rette si intersecano,

$y = x - 1$, $y = -(x - 1)$

3. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = y \lg x - x \cos y$$

(1) *dimostrare che* $F(x, y) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $y(x)$ *in un intorno di* $(1, \pi/2)$;

(2) *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale $y(x)$ di punto iniziale $x_0 = 1$;*
(3) *calcolare*

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) - \pi/2}{x-1}.$$

3.1. Soluzione.

Verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni sufficienti del Teorema di Dini:

- $F \in C^1(I)$ essendo I un qualsiasi intorno di $(1, \pi/2)$ contenuto nel semipiano $x > 0$
- $F(1, \pi/2) = 0$
- $F_y(x, y) = \lg(x) + x\sin(y) \quad \to \quad F_y(1, \pi/2) = 1 \neq 0$

Per calcolare il polinomio di Taylor $P(x)$ di secondo ordine occorrono

$$y(1), \quad y'(1), \quad y''(1)$$

per calcolare tali derivate ci si serve delle due relazioni

$$\begin{cases} F_x + F_y.y'(x) = 0 \\ F_{xx} + 2F_{xy}.y'(x) + F_{yy}y'^2(x) + F_y.y''(x) = 0 \end{cases}$$

nelle quali le derivate della F sono sempre calcolate nel punto iniziale $(1, \pi/2)$ e quelle della funzione implicita $y(x)$ nel punto $x = 1$

$y(1) = \pi/2$	
$F_x = \frac{y}{x} - \cos(y)$,	$F_x(1, \pi/2) = \frac{\pi}{2}$
$F_y = \lg(x) + x\sin(y)$,	$F_y(1, \pi/2) = 1$
$F_{xx} = -\frac{y}{x^2}$,	$F_{xx}(1, \pi/2) = -\frac{\pi}{2}$
$F_{xy} = \frac{1}{x} + \sin(y)$,	$F_{xy}(1, \pi/2) = 2$
$F_{yy} = x\cos(y)$,	$F_{yy}(1, \pi/2) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + y'(1) = 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 4.y'(1) + y''(1) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} y'(1) = -\frac{\pi}{2} \\ y''(1) = 5\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$P(x) = \pi\,\frac{1}{2}\left\{1 - (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2\right\}$$

Servendosi del Teorema di Hôpital si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) - \pi/2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{y'(x)}{1} = -\frac{\pi}{2}$$

4. Esercizio

Sia $y = f(x)$ la funzione implicita definita dall'equazione

$$F(x, y) = -1 + x^4 + 3\,x^3\,y + x^2\,y^2 + y^4 = 0$$

che per $x = 0$ produce il valore $y = 1$:

(1) *esaminare se $f(x)$ é definita in un intorno di $x = 0$,*
(2) *determinare la tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(0, 1)$,*
(3) *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo ad $f(x)$, di punto iniziale $x_0 = 0$.*

4.1. Soluzione.

(1) basta verificare che nel punto $(0, 1)$ siano soddisfatte le condizioni sufficienti del Teorema di Dini
   - $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$
   - $F(0, 1) = 0$
   - $F_y(x, y) = 4\,y^3 + 3x^3 + 2\,x^2 y, \quad F_y(0, 1) = 4 \neq 0$

(2) $F_x(0, 1) = 0, \quad F_y(0, 1) = 4, \quad f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = 0$
da cui l'equazione della tangente é

$$y = 1 + f'(0)x = 1$$

una tangente orizzontale.

(3) $F_{xx}(0, 1) = 2, \quad F_{xy}(0, 1) = 4, \quad F_{yy}(0, 1) = 12$
da cui segue, tenuto conto che $f'(0)0$,

$$f''(0) = -\frac{F_{xx}}{F_y} = -\frac{2}{4}$$

Il polinomio di Taylor é pertanto

$$P(x) = 1 - \frac{1}{4}\,x^2$$

che permette di riconoscere che la funzione implicita $f(x)$ ha nel punto $x = 0$ un massimo[1].

5. Esercizio

Sia

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2y^2 + x + y - z$$

(1) *dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 0, 1)$;*

[1]Si tratta di un punto di massimo debolissimo, a occhio appare molto piú vicino ad un flesso orizzontale.

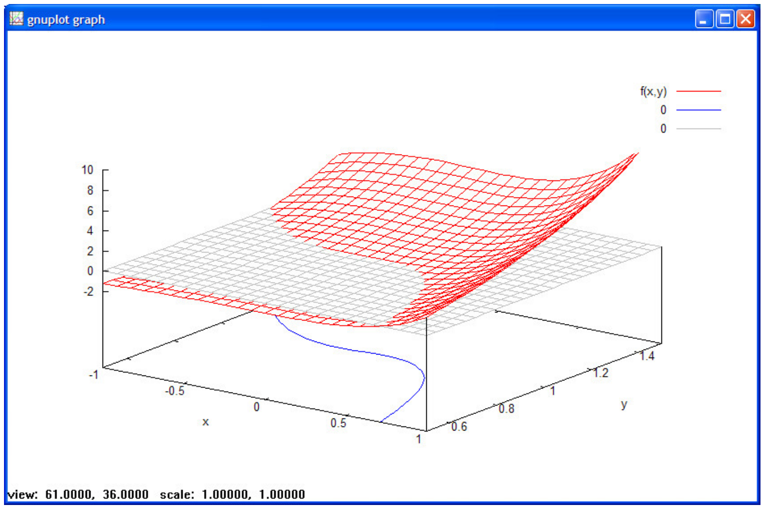


FIGURA 2. $-1 + x^4 + 3\,x^3\,y + x^2\,y^2 + y^4 = 0$

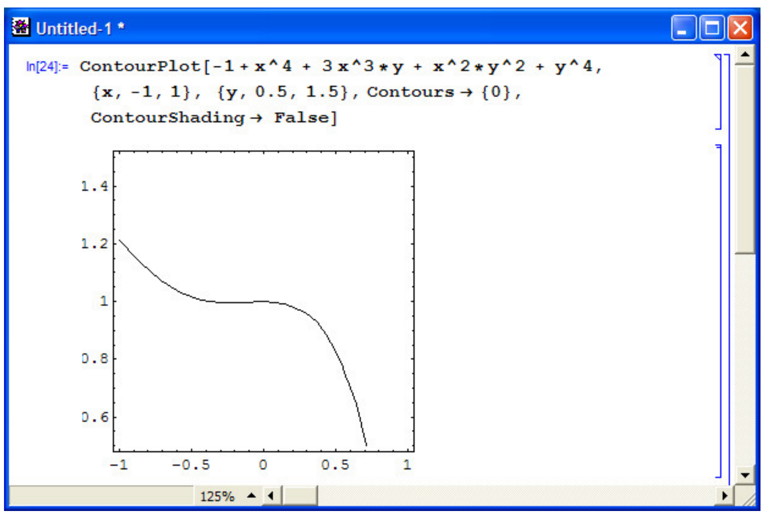


FIGURA 3. L'insieme di livello $-1 + x^4 + 3\,x^3\,y + x^2\,y^2 + y^4 = 0$

(2) *determinare l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto* $(0, 0, 1)$.

5.1. Soluzione.

(1) Si tratta di verificare le condizioni sufficienti del Teorema di Dini

- $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$
- $F(0, 0, 1) = 0$

- $F_z = -1 + 4\,z^3, \quad F_z(0,0,1) = 3 \neq 0$

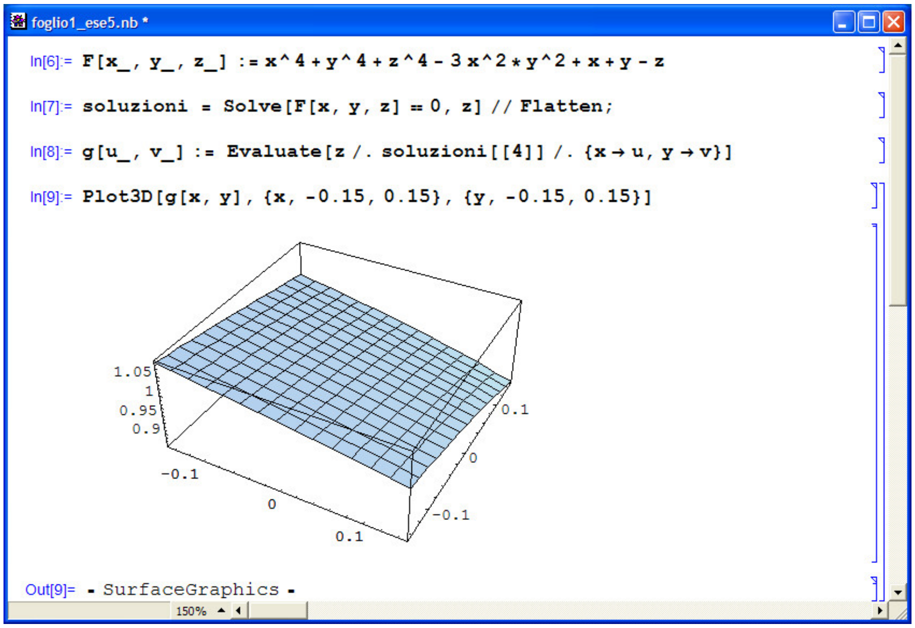


FIGURA 4. $x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2y^2 + x + y - z = 0$ il grafico per $(x, y, z) \approx (0, 0, 1)$ realizzato con *Mathematica*

(2) L'equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) si ottiene direttamente con la formula

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

che diventa in questo caso

$$x + y + 3(z - 1) = 0$$

La conoscenza del piano tangente permette di immaginare la forma della superficie in un intorno del punto $(0, 0, 1)$, forma che corrisponde a quella leggibile in Figura 4.

6. Esercizio

Sia

$$F(x, y, z) = \mathrm{e}^{2z} + xyz - \mathrm{e}^{xy} - x^4 + y^4$$

1. *dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ determina una funzione implicita $z = f(x, y)$ definita in un intorno dell'origine;*
2. *determinare il valore $f(0, 0)$;*
3. *riconoscere che l'origine è un punto stazionario per la $f(x, y)$;*
4. *riconoscere se esso sia minimo, massimo o sella.*

6.1. Soluzione.

(1) Si tratta di verificare le condizioni sufficienti del Teorema di Dini nel punto $(0, 0, z_0)$

$$\mathrm{e}^{2z_0} - \mathrm{e}^0 = 0, \quad \to \quad z_0 = 0$$

- $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$
- $F(0, 0, 0) = 0$
- $F_z = 2\, e^{2z} + x\, y, \quad F_z(0, 0, 1) = 2 \neq 0$

(2) Le derivate parziali della f sono

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

da cui, svolti i conti

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

(3) Per classificare tale punto stazionario occorre calcolare il determinante della matrice hessiana

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Le formule per le derivate seconde della funzione implicita si ricavano dalle relazioni seguenti

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y, f(x, y)) = 0 & f_{xx}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x, y, f(x, y)) = 0 & f_{xy}(0, 0) = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, f(x, y)) = 0 & f_{yy}(0, 0) = 0 \end{array}$$

Riesce pertanto

$$H(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

....punto sella, vedi Figura 5.

7. Esercizio

Sia $z = f(x, y)$ la funzione implicita definita in un intorno del punto $(0,\, 0)$ dall'equazione

$$z^5 + z + x^3 + y^2 + 1 = 0$$

(1) *verificare che f é definita in tutto $\mathbb{R}^2$,*
(2) *verificare che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$,*

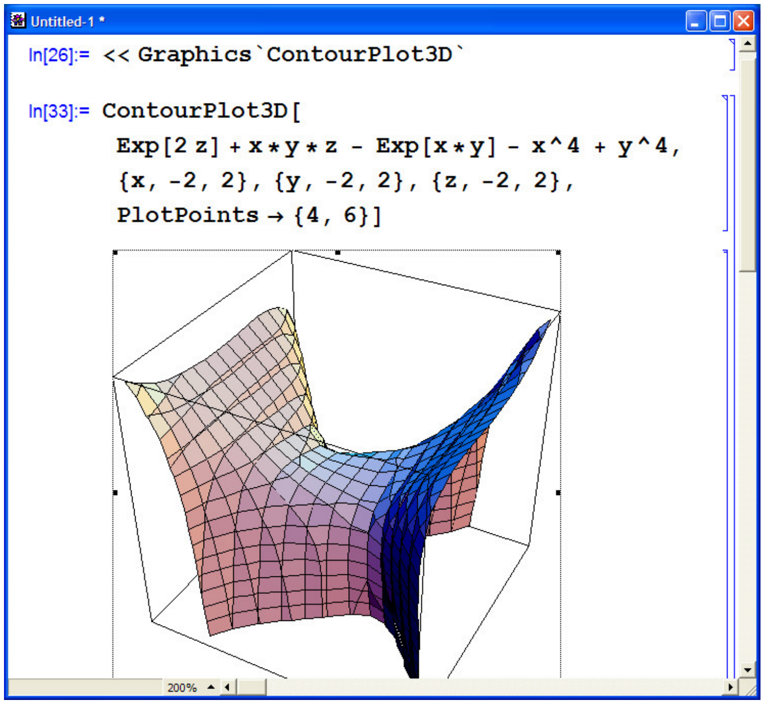


FIGURA 5. La superficie definita dall'equazione dell'Es. 6: si riconosce il carattere di sella.

7.1. Soluzione.

(1) L'equazione proposta é, portati a secondo membro i termini che non contengono z

$$z^5 + z = -(x^3 + y^2 + 1)$$

tenuto conto che il polinomio

$$z^5 + z = k$$

- ha una soluzione z per ogni $k \in \mathbb{R}$,
- tale soluzione é unica perché $f(z) = z^5 + z$ é strettamente crescente,

Si riconosce che la funzione implicita, vedi Figura 6, definita dall'equazione assegnata é definita in tutto $\mathbb{R}^2$

(2) detta $z = f(x, y)$ tale funzione implicita riesce

$$f_x(x, y) = -\frac{3x^2}{1 + 4f^4(x, y)}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2y}{1 + 4f^4(x, y)}$$

espressioni continue in tutto $\mathbb{R}^2$

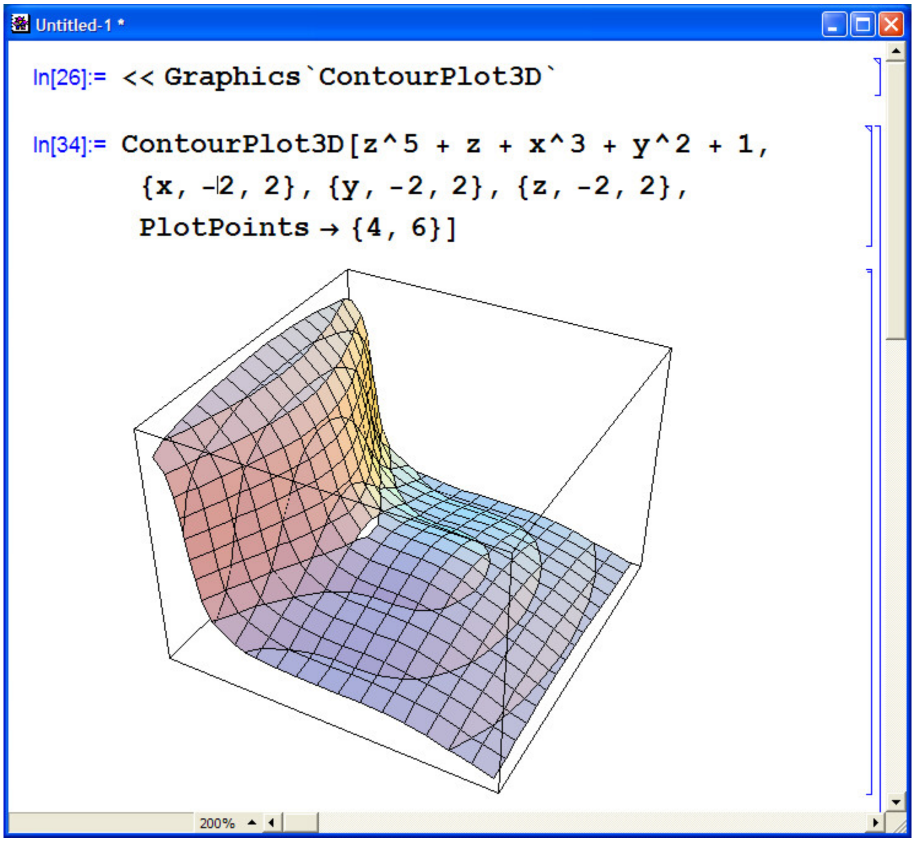


FIGURA 6. La superficie definita dall'equazione dell'es. 7

8. Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

(1) *riconoscere che esso é soddisfatto da* $(1,1,2)$ *e che definisce, in un intorno di tale punto, due funzioni implicite* $y = y(x),\ z = z(x)$,
(2) *calcolare le derivate prime* $y'(1),\ z'(1)$
(3) *fornire una rappresentazione parametrica della curva di* $\mathbb{R}^3$ *determinata dal sistema assegnato.*

8.1. Soluzione.

(1) Basta verificare le condizioni sufficienti del Teorema di Dini per i sistemi
  - le equazioni del sistema appartengono entrambe alla classe C^1,

- Il punto $(1,1,2)$ soddisfa il sistema,
- La matrice jacobiana

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha, calcolata nel punto $(1,1,2)$ determinante $3 \neq 0$

(2) Tenuto conto che le due funzioni implicite definite dal sistema in un intorno del punto $(1,1,2)$ sono derivabili riesce, derivando il sistema rispetto ad x e ponendo

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 2$$

$$\begin{cases} z_x = 2x + 2yy_x \\ 1 + y_x + z_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_x = 2 + 2y_x \\ 1 + y_x + z_x = 0 \end{cases}$$

da cui risolvendo il sistema a sinistra si ottiene

$$y_x(1) = -1, \quad z_x(1) = 0$$

(3) La curva é intersezione della ben nota superficie a forma di coppa $z = x^2 + y^2$ con il piano obliquo $x + y + z = 4$

9. Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{cases} \sin(xy) + y\cos x + z &= 0 \\ \\ \cos(xy) + x\sin y + z^2 &= 1 \end{cases}$$

(1) *dimostrare che in un intorno del punto* $(\pi/2, 0, 0)$ *il sistema definisce implicitamente due funzioni* $(y(x), z(x))$ *tali che* $(x, y(x), z(x))$ *siano soluzioni del sistema;*
(2) *calcolare* $y'(\pi/2)$ *e* $z'(\pi/2)$*;*
(3) *riconoscere il legame geometrico tra la curva*

$$x = t,\ y = y(t),\ z = z(t)$$

e le due superfici.

9.1. Soluzione. Occorre verificare le condizioni sufficienti del Teorema di Dini

- $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$
- il punto $(\pi/2, 0, 0)$ soddisfa entrambe le equazioni,
- la matrice jacobiana abbia determinate diverso da 0 in $(\pi/2, 0, 0)$

$$J(x,y,z) = \det\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \det\begin{pmatrix} x\cos(xy) - y\sin(x) & 1 \\ -x\sin(xy) + x\cos(y) & 2z \end{pmatrix}$$

$$J(\frac{\pi}{2},0,0) = -\frac{\pi}{2}$$

Esistono pertanto due funzioni $Y(x)$, $Z(x)$ definite in un intorno I di $x = \pi/2$, continue e derivabili, tali che

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sin(xY(x)) + Y(x)\cos x + Z(x) & \equiv & 0 \\ & & \\ \cos(xY(x)) + x\sin Y(x) + Z(x)^2 & \equiv & 1 \end{array} \right. \quad \forall x \in I$$

Derivando rispetto ad x le relazioni precedenti identicamente soddisfatte per $x \in I$ si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\sin(x)\,Y(x)) + \cos(x)\,Y'(x) + \cos(x\,Y(x))\;(Y(x) + x\,Y'(x)) + Z'(x) \equiv & 0 \\ & \\ \sin(Y(x)) + x\;\cos(Y(x))\,Y'(x) + \sin(x\,Y(x))\;(-Y(x) - x\,Y'(x)) + 2\,Z(x)\,Z'(x) \equiv & 0 \end{array} \right.$$

da cui si ricava per $x = \frac{\pi}{2}$, $Y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $Z(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi\,Y'(\frac{\pi}{2}) + 2Z'(\frac{\pi}{2}) & = 0 \\ \pi\,Y'(\frac{\pi}{2}) & = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad Y'(\frac{\pi}{2}) = Z'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

OSSERVAZIONE 9.1. *Una scoperta: le due funzioni $Y(x)$, $Z(x)$ che soddisfano il sistema assegnato sono null'altro che....*

...$Y(x) \equiv 0$, $Z(x) \equiv 0$

Tali due semplicissime funzioni costanti infatti

- *prendono il valore* 0 *per* $x = \pi/2$
- *soddisfano (verificare per credere) il sistema...*
- *quindi (teorema di unicitá) coincidono con le funzioni implicite garantite dal Teorema di Dini.*

Anche la faticosa scoperta che

$$Y'(\frac{\pi}{2}) = Z'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

appare ora piú verosimile...

10. Esercizio

Data l'equazione

$$(x^2 + y^2)^4 - 4(x^2 + y^2)^2 = 0$$

(1) *riconoscere che essa definisce una funzione implicita* $y = y(x)$ *nell'intorno del punto* $(1, 1)$*;*
(2) *calcolare* $y'(1)$ *e* $y''(1)$*;*
(3) *determinare il luogo definito dall'equazione assegnata.*

10.1. Soluzione. Nel punto $(1,1)$ sono soddisfatte le condizioni sufficienti del Teorema di Dini

- $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$
- $F(1,1) = 0$
- $F_y(x,y) = 4(x^2+y^2)^3\, 2y - 8(x^2+^2)\, 2y \quad \rightarrow \quad F_y(1,1) = 32 \neq 0$

esiste pertanto la funzione $y(x)$, definita in un intorno I di $x = 1$, continua e derivabile e tale che

$$y(1) = 1, \quad F(x, y(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in I$$

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \rightarrow \quad y'(1) = -1$$

$$y''(x) = -\frac{1}{F_y(x, f(x))} \left\{ F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}y'^2 \right\} \quad \rightarrow \quad y''(1) = -2$$

Il luogo descritto dall'equazione si riconosce facilmente tenuto conto che

$$(x^2+y^2)^4 - 4(x^2+y^2)^2 = (x^2+y^2)\left((x^2+y^2)^2 - 4\right) =$$
$$= (x^2+y^2)(x^2+y^2+2)(x^2+y^2-2) = 0$$

e quindi, tenuto conto che dei tre fattori

- il primo si annulla solo nell'origine,
- il secondo non si annulla mai,
- il terzo si annulla sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$

il luogo é formato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ e dall'origine, suo centro.
La funzione implicita é pertanto

$$y(x) = \sqrt{2 - x^2}$$

le sue derivate in $x = 1$ sono, verificare per credere, in accordo con i due valori precedentemente trovati.

11. Esercizio

Posto

$$F(x,y) = \int_0^y e^{-x^2t^2}\, dt - 1$$

1. *verificare che* $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$,
2. *verificare che riesce* $F(0,1) = 0$,
3. *verificare che l'equazione* $F(x,y) = 0$ *definisce, in un intorno di* $x = 0$ *una funzione implicita* $y = f(x)$, $f(0) = 1$,

(4) *determinare la retta tangente al grafico di tale* $f(x)$ *nel punto* $(0,1)$.

(5) *indicata con*

$$\Phi(s)=\int_0^s e^{-t^2}\,dt$$

verificare l'espressione

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}\Phi(x\,y)-1 & x\neq 0\\ \\ y-1 & x=0\end{cases}$$

11.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Continuitá}}$

(21)
$$|F(x,y+\triangle y)-F(x,y)|\leq\left|\int_y^{y+\triangle y} e^{-x^2t^2}\,dt\right|\leq\left|\int_y^{y+\triangle y} dt\right|\leq|\triangle y|$$

tenuto conto che dal teorema di Lagrange applicato alla variazione dell'esponenziale tra due valori si ha

$$\left|e^{-x_1^2t^2}-e^{-x_2^2t^2}\right|\leq e^{-\omega^2}\left|x_1^2t^2-x_2^2t^2\right|\leq\left|x_1^2-x_2^2\right|t^2$$

da cui segue

$$|F(x_1,y)-F(x_2,y)|\leq\left|x_1^2-x_2^2\right|\left|\int_0^y t^2\,dt\right|=\frac{1}{3}|y|^3\left|x_1^2-x_2^2\right| \tag{22}$$

Dalle relazioni (7) e (8) segue (diseguaglianza triangolare, ecc...) la continuitá di $F(x,y)$ in tutto $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{Derivabilitá}}$

La derivata parziale rispetto ad y discende (ovviamente) dal Teorema di Torricelli

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y g(t)\,dt=g(y),\quad\rightarrow\quad F_y(x,y)=e^{-x^2y^2}$$

Per quanto concerne l derivata rispetto ad x consideriamo direttamente il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+\triangle x,y)-F(x,y)}{\triangle x}=\int_0^y e^{-x^2t^2}\,\frac{e^{-(2x\,\triangle x+(\triangle x)^2)t^2}-1}{\triangle x}\,dt$$

é facile riconoscere che, per $\triangle \simeq 0$ riesce

$$\frac{e^{-(2x\,\triangle x+(\triangle x)^2)t^2}-1}{\triangle x} \simeq -2x\,t^2$$

da cui

$$\frac{F(x+\triangle x, y)-F(x,y)}{\triangle x} \simeq -\int_0^y e^{-x^2t^2}\,2x\,t^2\,dt$$

ovvero

$$F_x(x,y) = -\,2x\int_0^y e^{-x^2t^2}t^2\,dt$$

formula che corrisponde a

derivare sotto il segno di integrale.

La continuitá delle due derivate parziali F_x ed F_y trovate si riconosce facilmente e quindi si riconosce che

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

come richiesto al primo punto del Teorema di Dini.

$\boxed{\text{Il valore in } (0,1)}$

$$F(0,1) = \int_0^1 e^0\,dt - 1 = 1 - 1 = 0$$

$\boxed{\text{Il valore della derivata parziale } F_y(0,1)}$

$$F_y(x,y) = e^{-x^2y^2} \quad\rightarrow\quad F(0,1) = e^0 = 1 \neq 0$$

Il valore trovato e i conti precedenti garantiscono l'esistenza della funzione implicita $y = f(x)$ continua e derivabile in un intorno I di $x = 0$ tale che

- $f(0) = 1$
- $F(x, f(x)) \equiv \quad \forall x \in I$

$\boxed{\text{Retta tangente al grafico di } y = f(x)}$

Tenuto conto che

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))} \quad\rightarrow\quad f'(0) = -\frac{F_x(0,f(0))}{F_y(0,f(0))} = 0$$

$$y = f(0) + f'(0)x \quad\rightarrow\quad y = 1$$

$\boxed{\text{Ultima questione}}$

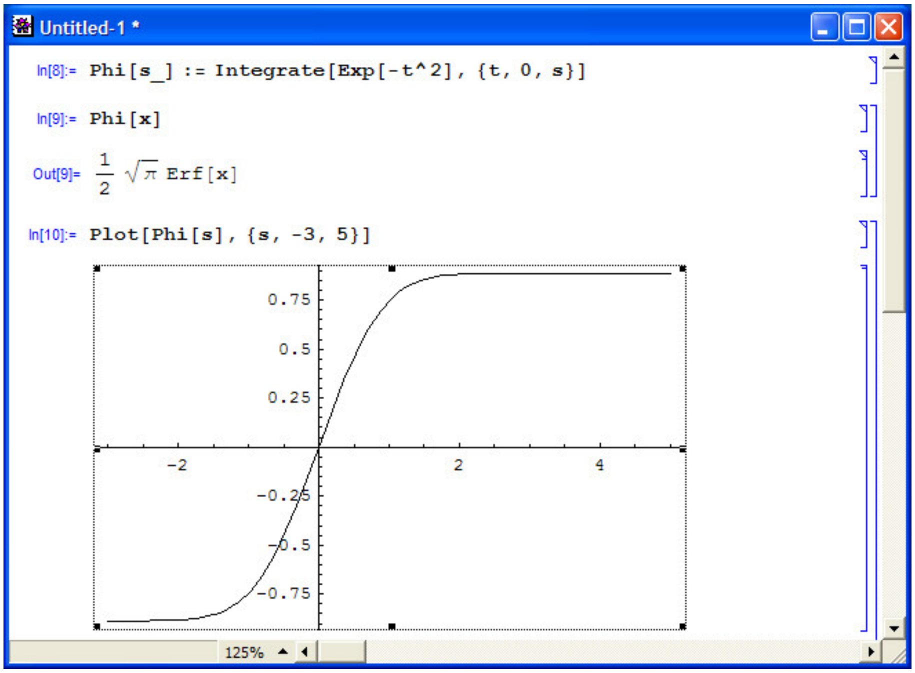


FIGURA 7. La funzione $\Phi(s)$ studiata con *Mathematica*

Cominciamo dall'ultima questione: eseguito il cambio di variabile

$$x\,t = \tau, \quad x \neq 0$$

si ha

$$\int_0^y e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{xy} e^{-\tau^2}\,d\tau$$

da cui, tenuto presente che per $x = 0$ il termine integrale vale y, la rappresentazione

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^{xy} e^{-\tau^2}\,d\tau - 1 & x \neq 0 \\ \\ y-1 & x = 0 \end{cases}$$

che, dato all'integrale il nome Φ corrisponde alla espressione proposta.

OSSERVAZIONE 11.1.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\tau^2}\,d\tau = \mathtt{Erf}(z)$$

il nome $\mathtt{Erf}(z)$ *ricorda la parola errori, come l'integrale ricorda la distribuzione gaussiana degli errori...*
Ne deriva, naturalmente

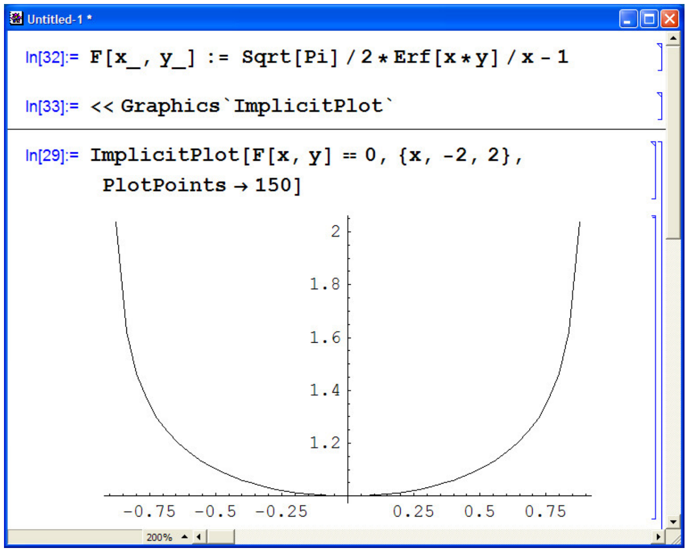


FIGURA 8. Il grafico della funzione implicita $y = f(x)$ ricavato con il modulo ‘`Graphics‘ImplicitPlot‘`’ di *Mathematica*

$$\int_0^{xy} e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathtt{Erf}(xy)$$

La funzione `Erf` *(con o senza la maiuscola) é inclusa in innumerevoli tavole, software, ecc...*

OSSERVAZIONE 11.2. *La funzione implicita $y(x)$ di cui nell'esercizio, soluzione dell'equazione*

$$\int_0^{xy} e^{-\tau^2}\, d\tau = x, \quad \leftrightarrow \quad \mathtt{Erf}(xy) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x$$

é strettamente collegata alla funzione `InverseErf` *presente in numerose tavole e numerosi software quali GnuPlot e Mathematica,*

$$xy = \mathtt{InverseErf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x\right) \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x}\left\{\mathtt{InverseErf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x\right)\right\}$$

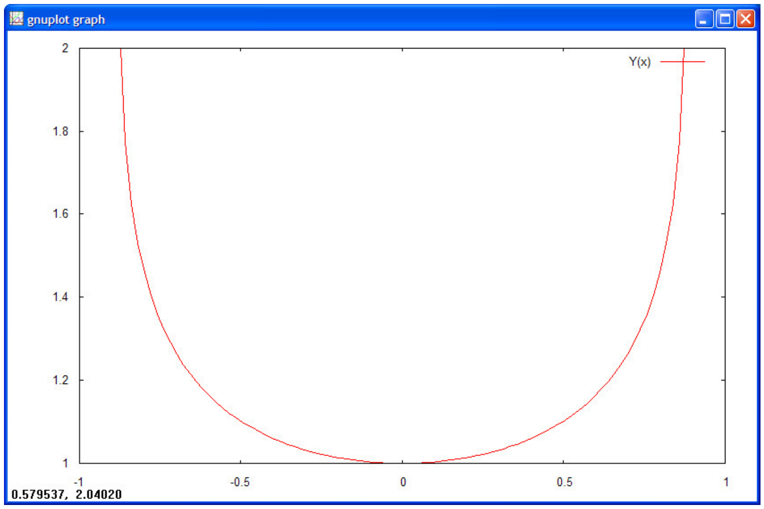


FIGURA 9. La funzione $y(x)$ precedente con la `inverf` di GnuPlot

CAPITOLO 17

Le soluzioni del foglio 2

1. Esercizio

Determinare il minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ *sulla retta* $x + y = 1$.

1.1. Soluzione.

La funzione assegnata rappresenta il quadrato $\overline{OP}^2$ della distanza dell'origine O dai punti P della retta r assegnata.

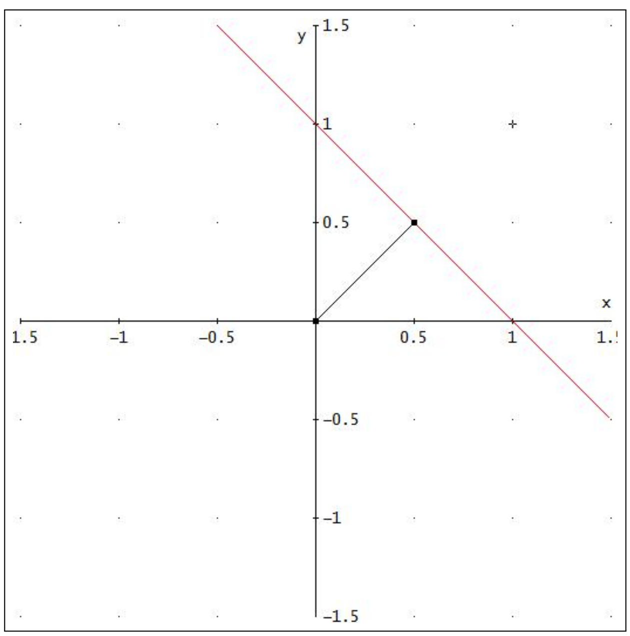


FIGURA 1. La distanza dell'origine dalla retta assegnata

Un semplice disegno, vedi Figura 1, permette di riconoscere che il punto $Q = (1/2, 1/2)$ é il punto della retta r piú vicino all'origine e pertanto

$$\min_{(x,y)\in r} \left(x^2 + y^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

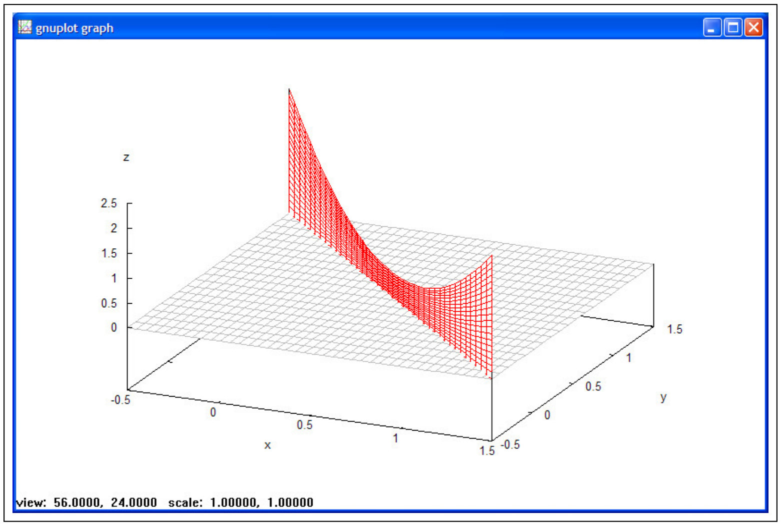


FIGURA 2. Il grafico prospettico della $f = x^2 + y^2$ sui punti della retta $x + y = 1$

$\boxed{\text{Calcolo diretto:}}$

Si ricava, dal vincolo $x + y = 1$ $y = 1 - x$, pertanto la funzione f sul vincolo coincide con

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

Tenuto presente che

$$(2x^2 - 2x + 1)' = 4x - 2, \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{4}$$

unico punto stazionario che é, necessariamente, di minimo:

$$\min_{(x,y)\in r} f(x, y) = f(1/2, 1/2) = 1/2$$

vedi figure 1 e 2.

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 & = 0 \end{cases}$$

ne segue

$$x_0 = -\frac{1}{2}\lambda_0, \quad y_0 = -\frac{1}{2}\lambda_0, \quad -\lambda_0 - 1 = 0 \quad \to \quad x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$$

OSSERVAZIONE 1.1. *Il caso considerato non garantisce l'esistenza del massimo: infatti la funzione $f = x^2 + y^2$ é continua ma il vincolo*

$$x + y = 1$$

definisce un insieme E chiuso ma non limitato, quindi non coperto dal Teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimo e minimo di una funzione reale continua su un insieme chiuso e limitato.
É facile convincersi del resto che la funzione x^2+y^2 prende sul vincolo $x + y = 1$ valori comunque grandi, ovvero é illimitata superiormente, quindi non ha massimo.

2. Esercizio

Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$

2.1. Soluzione.

La funzione assegnata $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2$ rappresenta la distanza tra $(-1, 1)$ e (x, y)
Il punto $(-1, 1)$ cade dentro il cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$: per determinare massimo e minimo basta disegnare il diametro passante per $(-1, 1)$ e considerare gli estremi in cui taglia la circonferenza $\mathcal{C}$.

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{C}} f(x, y) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2(3 - 2\sqrt{2}),$$

$$\max_{(x,y)\in\mathcal{C}} f(x, y) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2(3 + 2\sqrt{2})$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + \lambda \left(x^2 + y^2 - 4\right)$$

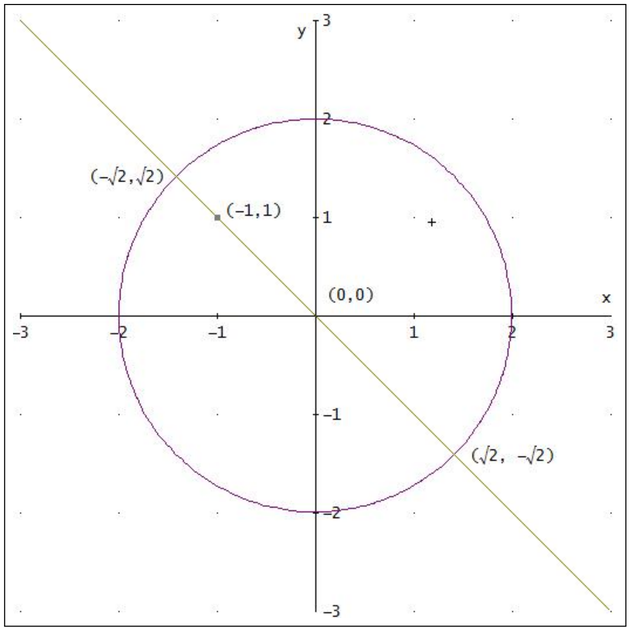


Figura 3. La distanza di $(-1,1)$ dalla circonferenza.

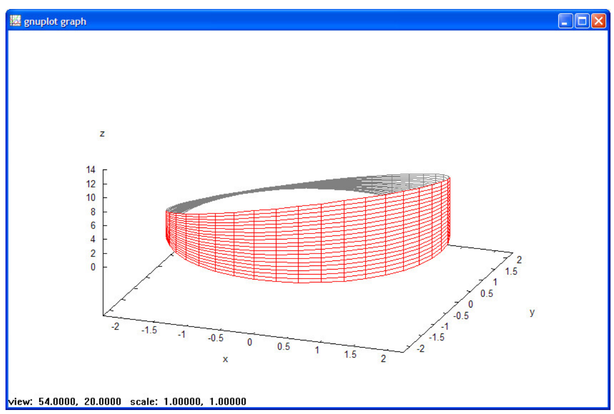


Figura 4. Il grafico della $f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2$ sul vincolo $x^2+y^2 = 4$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x+1) + 2\lambda x & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 2\lambda y & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 & = 0 \end{cases} \rightarrow x_0 = -\frac{1}{1+\lambda},\ y_0 = \frac{1}{1+\lambda}$$

$$\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2=4, \qquad \frac{1}{1+\lambda}=\pm\sqrt{2}$$

da cui si ricavano i due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) seguenti

$$x_0=-\sqrt{2},\ y_0=\sqrt{2}, \quad x_1=\sqrt{2},\ y_1=-\sqrt{2}$$

I valori della f su di essi forniscono minimo e massimo precedentemente riconosciuti direttamente.

3. Esercizio

- *Tra i rettangoli di perimetro assegnato determinare quelli di area massima,*
- *tra i rettangoli di area fissata determinare quelli di perimetro minimo.*

3.1. Soluzione.

Indichiamo con x e y le dimensioni del rettangolo, con $A(x, y) = x\,y$ l'area e con $P(x, y) = 2(x + y)$ il perimetro.
Il primo problema di massimo vincolato é

$$\max_{P(x,y)=p} A(x,y)$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x,y,\lambda)=A(x,y)+\lambda\,\{P(x,y)-p)\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda & =0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2\lambda & =0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=2x+2y-p & =0 \end{cases} \quad \to X_0=y_0=\frac{p}{4}$$

Il quadrato ha, tra i rettangoli di stesso perimetro, l'area maggiore:

$$A=\frac{p^2}{4^2}$$

Osservazione 3.1. *Il problema di massimo vincolato posto prende anche il nome di problema isoperimetrico per l'ovvio richiamo al tipo di vincolo.*
Esso viene anche detto problema di Didone dalla leggenda classica che attribuisce alla regina Didone la scelta del terreno su cui fondare Cartagine, il terreno piú ampio che lei fosse riuscita a delimitare con una cinghia di cuoio ricavata dalla pelle di un solo momtone.
Il problema é naturalmente duplice: ricavare dall'unica pelle la cinghia piú lunga, quindi molto sottile, distenderla sul terreno nella forma piú conveniente in termini di area.
Il secondo punto, la forma piú conveniente, conduce, nel caso di un terreno pianeggiante, naturalmente alla circonferenza, che naturalmente l'intelligente Didone scelse.
Il problema proposto nell'esercizio precedente ha un vincolo in piú, che Didone non aveva, si deve scegliere un terreno rettangolare.
Liberandosi dall'obbligo del rettangolo, e quindi autorizzati a prendere anche cerchi, con un perimetro p si costruisce una circonferenza di raggio

$$r = \frac{p}{2\pi}$$

e quindi di area

$$A = \pi \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2}{4\pi}$$

maggiore di quella $\frac{p^2}{4^2}$ trovata con l'obbligo di delimitare solo rettangoli.
Il guadagno scegliendo, a paritá di perimetro, un cerchio anziché un quadrato

$$\frac{4}{\pi} \simeq 1,274$$

di oltre il 27%.

Il secondo problema é

$$\min_{A(x,y)=k} P(x,y)$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = P(x, y) + \lambda \{A(x, y) - k\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + y\lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + x\lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x\,y - k & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \; x_0 = y_0 = \sqrt{k}$$

Il quadrato ha, tra i rettangoli di stessa area, il perimetro minore.

4. Esercizio

Determinare fra i rettangoli inscritti nella circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ quelli di area massima.

4.1. Soluzione.

Il vincolo imposto di essere inscritto nella circonferenza corrisponde a richiedere che i vertici (x, y) del rettangolo soddisfino l'equazione $x^2 + y^2 = 1$.
Indichiamo con x e y le coordinate di uno dei quattro vertici del rettangolo, le dimensioni saranno allora $2x$ e $2y$, e l'area

$$A(x, y) = 4xy$$

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda \left\{x^2 + y^2 - 1\right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4y + 2x\lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4x + 2y\lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \; x_0 = \pm y_0 = \pm\sqrt{2}$$

Il rettangolo di maggiore area inscritto nella circonferenza di raggio 1 é il quadrato di lato $\ell = 2\sqrt{2}$.

Osservazione 4.1. *Il problema poteva essere affrontato direttamente ricordando che i punti (x, y) della circonferenza sono dati da*

$$x = \cos(\theta),\; y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0,\, 2\pi]$$

e che quindi l'area risulta

$$A(\theta) = 4\cos(\theta\sin(\theta)$$

ovvero

$$A(\theta) = 2\sin(2\theta)$$

espressione che raggiunge il massimo se

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

che conduce al quadrato....

5. Esercizio

Determinare il minimo della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

sulla retta $x + y + 1 = 0$ (legge della riflessione)

5.1. Soluzione.

La funzione assegnata $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ rappresenta la somma delle lunghezze

$$\overline{OP} + \overline{PR}$$

essendo

$$O = (0, 0),\ R = (1, -1),\ P = (x, y) \in r$$

avendo indicato con r la retta $x + y + 1 = 0$.
Il problema di minimo assegnato richiede il punto $P \in r$ rispetto al quale la poligonale OPR sia di lunghezza minima.

$\boxed{\text{Soluzione geometrica}}$

Il punto O' é il simmetrico di O rispetto alla retta $x + y + 1 = 0$, pertanto

$$\overline{OP} + \overline{PR} = \overline{O'P} + \overline{PR} \geq \overline{O'Q} + \overline{QR} = \overline{OQ} + \overline{QR}$$

Il punto Q intersezione della retta $x + y + 1 = 0$ con la retta per R e O' é il punto di minimo per f.

$\boxed{\text{Lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \lambda\,\{x + y + 1\}$$

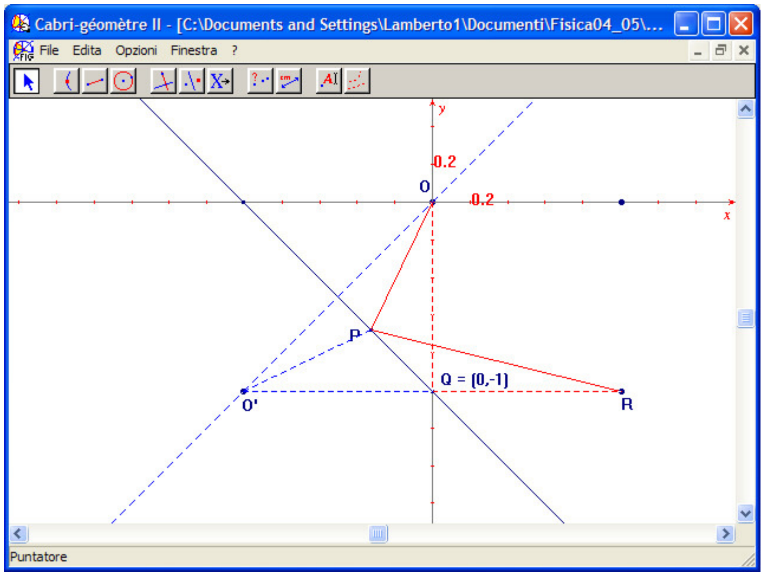


FIGURA 5. La poligonale OQR di lunghezza minima.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-1+x}{\sqrt{(-1+x)^2+(1+y)^2}} + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1+y}{\sqrt{(-1+x)^2+(1+y)^2}} + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 + x + y & = 0 \end{cases} \quad \to x_0 = 0, \quad y_0 = -1$$

Ovviamente il punto ottenuto annullando le derivate della Lagrangiana é il punto previsto geometricamente: il valore minimo é pertanto

$$f(0,-1) = 2.$$

6. Esercizio

Determinare la distanza minima che intercorre tra il punto $P = (-1, 0)$ e i punti della linea $y^2 = x^3$.

6.1. Soluzione.

Possiamo tranquillamente occuparci del quadrato della distanza anziché della distanza, lavorando cosí con un'espressione senza radici: infatti nel punto (x_0, y_0) nel quale riesce minima la distanza riuscirá minimo anche il suo quadrato e viceversa.

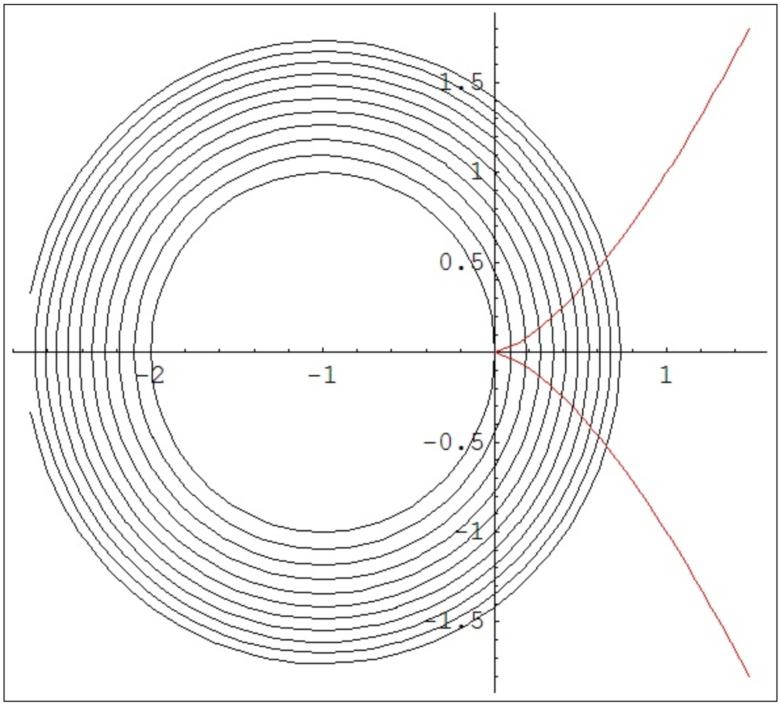


FIGURA 6. Linee di livello di $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ e, in rosso, il vincolo $y^2 = x^3$

$$L(x,y,\lambda) = (x+1)^2 + y^2 + \lambda\left\{y^2 - x^3\right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x+1) - 3\lambda x^2 & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y^2 - x^3 & = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni:

- lo si riconosce eseguendo un paio di sostituzioni e pervenendo ad equazioni di secondo grado prive di soluzione,
- oppure osservando che le linee di livello della funzione f, circonferenze di centro $(-1,0)$ non sono mai tangenti al vincolo $y^2 - x^3 = 0$, vedi Figura 6.

Tuttavia é evidente come l'origine $O = (0,0)$ sia il punto della curva $y^2 - x^3 = 0$ piú vicino al punto $P = (-1,0)$.

Come si spiega la questione ?
Nell'origine il gradiente dell'espressione $g(x,y) = y^2 - x^3$ che determina il vincolo

$$\nabla g = \{-3x^2,\, 2y\} \quad \to \quad \nabla g(0,0) = \{0,\, 0\}$$

é il vettore nullo.
Tutta la teoria fatta, fondata sulla possibilitá di esplicitare dall'equazione $g(x,y) = 0$ o $y = Y(x)$ o $x = X(y)$ naufraga...
Ricordate pertanto che la tecnica della Lagrangiana funziona relativamente a

- funzioni e vincoli di classe C^1
- vincoli $g(x,y) = 0$ localmente esplicitabili, cosa che accade certamente per il Teorema di Dini se $\nabla g \neq 0$.

OSSERVAZIONE 6.1. *Nell'esercizio precedente abbiamo assistito al naufragio della (peraltro sempre utilissima) tecnica dei moltiplicatori di Lagrange: osserviamo che, invece l'algoritmo apparentemente equivalente del sistema*

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ \phi_x & \phi_y \end{pmatrix} = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

avrebbe funzionato bene...

Infatti

$$f_x = 2(x+1),\; f_y = 2y,\; \phi_x = -3x^2,\; \phi_y = 2y$$

e quindi

$$\det\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ \phi_x & \phi_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2(x+1) & 2y \\ -3x^2 & 2y \end{pmatrix} = 4y(x+1)+6yx^2 = 0 \to y = 0$$

da cui sostituendo nell'equazione del vincolo si sarebbe ricavato $x_0 = 0$, ritrovando il punto di minimo previsto.

7. Esercizio

Determinare il massimo della funzione $f(x,y) = x^2\,y^2$ sul segmento $x + y = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$.

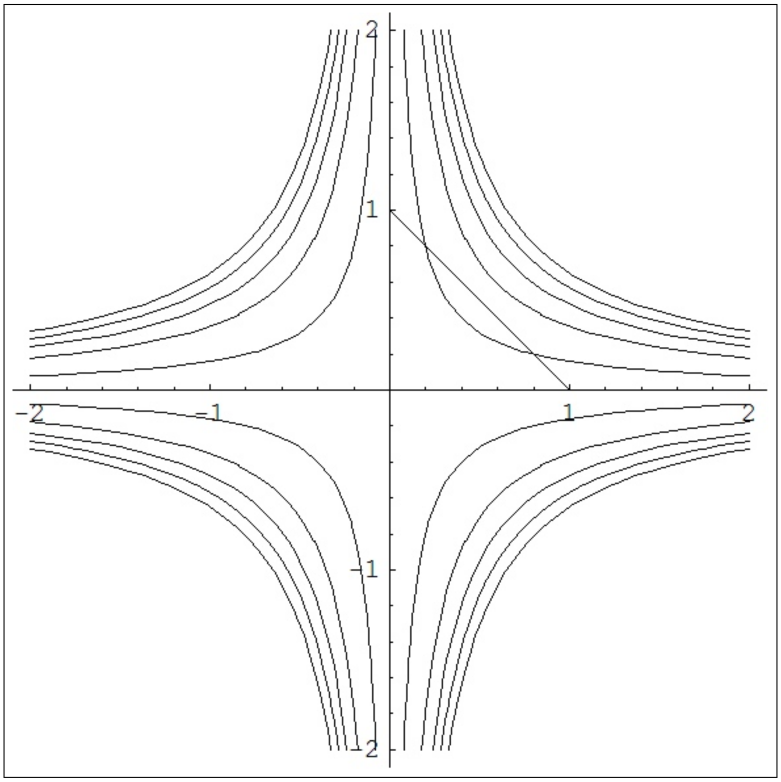


FIGURA 7. Le linee di livello di $f(x, y) = x^2y^2$ e il segmento assegnato.

7.1. Soluzione.

La funzione $f(x, y) = x^2y^2$ é non negativa, negli estremi $(0, 1)$ e $(1, 0)$ del segmento $\mathcal{S}$ prende il valore 0 quindi il minimo é giá noto,

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{S}} x^2y^2 = 0$$

Il massimo si intuisce guardando le linee di livello in Figura 7: quella piú alta é quella che passa, tangente al segmento, nel punto medio

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

8. Esercizio

Decomporre il numero positivo a *in tre addendi positivi* x, y, z, $\quad x + y + z = a$, *tali che il prodotto*

$$x^m\, y^n\, z^r$$

relativo ai tre esponenti m, n, $r\ \in \mathbb{N}$ *sia massimo.*

8.1. Soluzione.

Conviene considerare, e cercare di rendere massimo, il logaritmo del prodotto assegnato

$$f(x,y,z) = \ln(x^m\, y^n\, z^r) = m\ln(x) + n\ln(y) + r\ln(z)$$

Indicato con $g(x,y,z) - a = 0$ il vincolo la condizione di tangenza

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \leftrightarrow \quad \left\{\frac{m}{x}, \frac{n}{y}, \frac{r}{z}\right\} \parallel \{1,1,1\}$$

$$x = \rho m,\ y = \rho n,\ z = \rho r, \quad \rho(m+n+r) = a$$

da cui discende che il massimo per f si realizza prendendo

$$x_0 = \frac{am}{m+n+r},\ y_0 = \frac{an}{m+n+r},\ z_0 = \frac{ar}{m+n+r}$$

Il massimo del prodotto assegnato si raggiunge naturalmente nello stesso punto e vale

$$\left(\frac{a}{m+n+r}\right)^{m+n+r} m^m\, n^n\, r^r$$

OSSERVAZIONE 8.1. *L'algoritmo di risoluzione del problema di massimo del prodotto di tre variabili di somma assegnata si adatta anche al caso di un numero diverso di addendi.*
Cosí, ad esempio, include anche il quesito del precedente esercizio 7

$$a = 1, \quad m = n = 2, \quad r = 0,$$

$$\left(\frac{a}{m+n+r}\right)^{m+n+r} m^m\, n^n\, r^r = \left(\frac{1}{4}\right)^4 2^2\, 2^2 = \frac{1}{16}$$

9. Esercizio

Determinare il parallelepipedo di volume $V = xyz$ maggiore tra quelli di superfice laterale $2(xy + xz + yz) = S$ assegnata.

9.1. Soluzione.

OSSERVAZIONE 9.1. *Il vincolo assegnato é, oltre all'equazione* $2(xy + xz + yz) = S$, *espresso dalle condizioni*

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

Si tratta di un insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ *chiuso ma non limitato: quindi la ricerca del massimo di* $V(x, y, z) = xyz$ *su di esso non é coperta dal Teorema di Weierstrass.*
Tuttavia é facile riconoscere che, posto $S = 2\sigma$ *si ha*

- $(x, y, z) \in E \to xy \leq \sigma, \quad xz \leq \sigma, \quad yz \leq \sigma$
- $(x, y, z) \in E \to \sqrt{xy} \leq \sqrt{\sigma}, \quad \sqrt{xz} \leq \sqrt{\sigma}, \quad \sqrt{yz} \leq \sqrt{\sigma}$
- $xyz = \sqrt{xy}\,\sqrt{xz}\,\sqrt{yz} \leq \sigma\,\sqrt{\sigma}$

Quindi, com'era intuibile, il volume si mantiene limitato per $(x, y, z) \in E$*: questo non vuol dire ancora che abbia massimo, ma costituisce un primo passo in tale direzione importante.*
Consideriamo i punti $(x, y, z) \in E$ *con* $n \leq x \leq (n + 1)$: *riesce, di conseguenza*

$$ny + nz \leq xy + xz + yz \leq \sigma$$

da cui

$$n \leq x \leq (n+1) \to \left\{ y \leq \frac{\sigma}{n},\ z \leq \frac{\sigma}{n} \right\} \to V \leq (n+1)\frac{\sigma^2}{n^2} < \frac{2}{n}\sigma^2$$

ovvero il volume relativo a valori di una delle tre dimensioni, ad esempio x, grande é... piccolo!
Detta pertanto B *la palla di centro l'origine e raggio* R *sufficientemente grande riesce*

$$\sup_{(x,y,z)\in E} V(x, y, z) = \sup_{(x,y,z)\in E\cap B} V(x, y, z)$$

con il notevole vantaggio che, essendo $E \cap B$ *chiuso e limitato in tale insieme la funzione continua* $V(x, y, z)$ *é dotata di massimo* $V(x_0, y_0, z_0)$ *e quindi*

$$\sup_{(x,y,z)\in E} V(x, y, z) = V(x_0, y_0, z_0)$$

$\boxed{\text{La lagrangiana:}}$

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\,[2(xy + xz + yz) - S]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda(y+z) & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda(x+z) & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = yx + 2\lambda(y+x) & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2(xy + xz + yz) - S & = 0 \\ \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si ricava $x = y = z = \rho$ e tenendo conto della quarta si ha

$$6\rho^2 = S, \quad \to \quad x_0 = y_0 = z_0 = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{6}}$$

Ne segue che il volume massimo é relativo al cubo di lato ρ ed é pertanto

$$V_{Max} = \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$$

Osservazione 9.2. *L'esercizio precedente é ancora un caso di problema isoperimetrico: il vincolo $2(xy + xz + yz) = S$ rappresenta la superficie laterale del parallelepipedo, si chide di determinare il parallelepipedo di volume maggiore tra quelli che hanno la stessa superficie laterale.*
La risposta ottenuta é che tale massimo spetta alla forma cubica e vale

$$V_{Max} = \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$$

Rinunciando alla forma del parallelepipedo si puó pensare, ad esempio, a quella sferica: tenuto conto che la superficie della palla di aggio R vale

$$S = 4\pi R^2$$

si riconosce la possibilitá di considerare una sfera di raggio

$$R_0 = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

e quindi di volume

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{\pi}}$$

volume maggiore di quello del cubo considerato sopra.
Il vantaggio é

$$\frac{V_0}{V_{Max}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \simeq 1,39$$

circa del 39%

10. Esercizio

Determinare tra i triangoli di base e perimetro assegnati quello di area maggiore.

10.1. Soluzione.

Sia 1 la lunghezza della base assegnata e siano x e y gli altri due lati: il vincolo E (problema isoperimetrico) assegnato é

$$x + y + 1 = 2p, \quad x \geq 0,\ y \geq 0$$

L'insieme E é chiuso e limitato: il problema di massimo é coperto dal Teorema di Weierstrass.
L'area si puó calcolare con la formula di Erone[1]

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)}$$

Il minimo é, ovviamente, 0.

$\boxed{\text{La lagrangiana:}}$

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)} + \lambda(x + y + 1 - 2p)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{p(p-y)(p-1)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)}} + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{p(p-x)(p-1)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-1)}} + \lambda & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + 1 - 2p & = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava $p - y = p - x, \quad \rightarrow \quad x = y$ e dall'ultima

$$x_0 = y_0 = \frac{2p-1}{2}$$

il triangolo isoscele: l'area che gli compete é pertanto

[1] http://www.matematicamente.it/cimolin/formula/formula2.htm

$$A = \sqrt{p(p-x_0)(p-y_0)(p-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p\,(p-1)}$$

11. Esercizio

Assegnato un triangolo $\triangle_{ABC}$ con tutti e tre gli angoli acuti, determinare un punto $P \in \triangle_{ABC}$ tale che la somma

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$$

sia minima. (Punto di Fermat, vedi Courant Hilbert)

11.1. Soluzione.

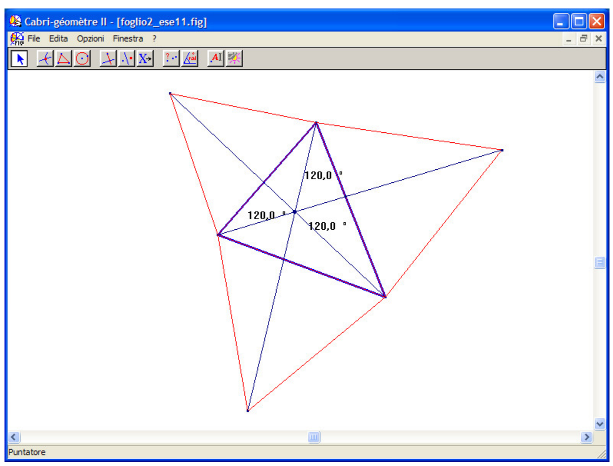


FIGURA 8. La costruzione geometrica del punto di Fermat

La costruzione geometrica, tutta da giustificare, é semplice: si costruiscono sui tre lati del triangolo assegnato i tre corrispondenti triangoli equilateri e si congiungono i loro vertici esterni con i vertici del triangolo.
L'intersezione di tali segmenti individua il punto di Fermat, punto dal quale i tre vertici del triangolo sono visti sotto un angolo di 120^0

Il problema di minimo assegnato é coperto dal Teorema di Weierstrass:

- la funzione $d(P) = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ 'e ovviamente continua,
- l'insieme in cui varia P é il triangolo $\triangle_{ABC}$ ovviamente chiuso e limitato.

Non si tratta di un problema di massimo o minimo vincolati come i precedenti: si tratta di un problema di minimo del tutto standard !

Tuttavia si trova in questo foglio perché la sua classica soluzione si fonda su un problema di tipo vincolato:

- scelto $P \in \triangle_{ABC}$ tracciamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C passante per P,
- muovendo P su tale circonferenza non varia $\overline{CP}$ ma variano certamente $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$,
- quindi un algoritmo di ottimizzazione puó essere quello di scegliere $P \in \mathcal{C}$ in modo da rendere minima la somma $\overline{AP}+\overline{BP}$
- il problema
$$min_{\in\mathcal{C}}(AP + BP)$$
é un problema di minimo vincolato la cui soluzione é data dalla nota regola della riflessione per la quale dovrá aversi, tenuto conto che la retta CP é perpendicolare in P alla $\mathcal{C}$
$$A\widehat{P}C = B\widehat{P}C$$
- eseguendo lo stesso procedimento invece che sul vertice C su quello A o su quello B si ottengono le relazioni analoghe
$$B\widehat{P}A = C\widehat{P}A, \quad A\widehat{P}B = C\widehat{P}B$$
- ne segue
$$A\widehat{P}C = B\widehat{P}C = A\widehat{P}B$$

che quindi riconosce come il punto di minimo sia collegato al fatto di essere visto dai tre vertici sotto lo stesso angolo, naturalmente di 120^0

OSSERVAZIONE 11.1. *Se il triangolo $\triangle_{ABC}$ é acutangolo o i suoi angoli interni sono minori di 120^0 esiste un punto interno che vede i tre vertici sotto un angolo di 120^0, altrimenti il punto P di minimo della $d(P)$ cade sulla frontiera.*

12. Esercizio

Siano
$$r_1 : \{y = x,\ z = 0\}, \quad r_2 : \{x + y = 1,\ z = 1\}$$
due rette di $\mathbb{R}^3$ prive di punti comuni

- *determinare $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in r_1,\ P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in r_2$ tali che*
$$\overline{P_1P_2} \le \overline{PQ} \quad \forall P \in r_1,\ Q \in r_2$$
- *Verificare che la retta per P_1 e P_2 é ortogonale alle due rette $r_1,\ r_2$ assegnate.*

12.1. Soluzione.

Indichiamo con P_1 e P_2 i punti rispettivamente delle due rette

$$P_1 = \{u, u, 0\}, \quad P_2 = \{1 - v, v, 1\}$$

$$\overline{P_1 P_2}^2 = (1 - v - u)^2 + (u - v)^2 + 1$$

Si tratta, contrariamente a quello che puó apparire di un problema di minimo definito in tutto il piano (u, v) : si tratta pertanto di cercare i punti critici della funzione $\phi(u, v) = (1 - v - u)^2 + (u - v)^2 + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial u} = -2(1 - v - u) + 2(u - v) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial v} = -2(1 - v - u) - 2(u - v) = 0 \end{array} \right. \quad \to u_0 = v_0 = \frac{1}{2}$$

I punti piú vicini delle due rette sonoi pertanto

$$P_{10} = \{1/2, 1/2, 0\}, \quad P_{20} = \{1/2, 1/2, 1\}$$

Un vettore parallelo alla r_1 é $v_1 = \{1, 1, 0\}$, uno parallelo ala r_2 é $v_2 = \{1, -1, 0\}$ uno parallelo alla $P_{10}P_{20}$ é $v = \{0, 0, 1\}$: é facile riconoscere (prodotto scalare) che

$$v_1 \perp v, \quad v_2 \perp v$$

13. Esercizio

Tra le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 0$$

che verificano la condizione

$$\int_0^\pi y^2(x)\, dx = 1$$

determinare quella che rende minimo l'integrale

$$\int_0^\pi y(x)\, dx$$

13.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale

- lineare,
- del secondo ordine,
- omogenea.

Le sue soluzioni sono tutte le funzioni

$$y(x) = A\sin(x) + B\cos(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Riesce

$$\int_0^\pi y^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)\pi, \quad \int_0^\pi y(x)\,dx = 2A$$

Occorre pertanto determinare il minimo della funzione $f(A, B) = 2A$ sui punti (A, B) che verificano la condizione vincolare

$$g(A, B) = A^2 + B^2 - \frac{2}{\pi} = 0$$

Il vincolo é, nel piano (A, B) una circonferenza di centro l'origine e raggio

$$r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

La funzione di cui cercare il minimo é

il doppio dell'ascissa

É pertanto evidente che essa raggiunge il minimo nel punto della circonferenza vincolo piú a sinistra

$$A_0 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad B_0 = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale richiesta é pertanto

$$y_0(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\sin(x)$$

14. Esercizio

Determinare il massimo e il minimo della funzione reale di n variabili reali

$$f(x_1,\, x_2,\, ...,x_n) = x_1^2\, x_2^2 \,....\, x_n^2$$

sulla superfice sferica $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1.$

14.1. Soluzione.

Si tratta di un problema di massimo e minimo vincolato in n dimensioni, con garanzia dell'esistenza di massimo e minimo fornita dal Teorema di Weierstrass.

- la funzione da rendere minima o massima $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2\, x_2^2 \ldots . x_n^2$ é continua,
- l'insieme E determinato dal vincolo é chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$.

Indicate con
$$y_1 = x_1^2, \;\; y_2 = x_2^2, \;\; ..., \, y_n = x_n^2$$
il problema assegnato corrisponde a

- decomporre il numero $a = 1$ nella somma degli n numeri positivi $y_1 + y_2 + ... + y_n$
- tali che il loro prodotto $y_1\, y_2 .. y_n$ sia massimo,

Si tratta di una generalizzazione dell'Esercizio 8 pagina 220, che si riferiva, fra l'altro a prodotti con esponenti diversi.
Nel caso attuale gli esponenti sono tutti uguali, quindi il massimo cade nella scelta
$$y_1 = y_2 = ... = y_n = \frac{1}{n}$$
ovvero
$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
Il valore massimo del prodotto $x_1^2\, x_2^2 \ldots . x_n^2$ é pertanto
$$\frac{1}{n^n}$$

CAPITOLO 18

Le soluzioni del foglio 3

1. Esercizio

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x^4, xy)$ *uscente dal triangolo di vertici* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

1.1. Soluzione.

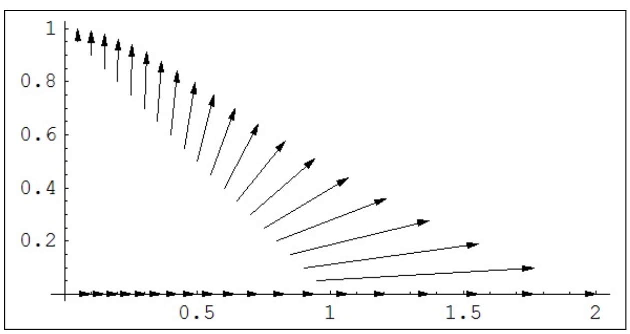


FIGURA 1. Il flusso del campo F traverso la frontiera del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$

Il flusso richiesto, vedi Figura 1, é il valore dell'integrale curvilineo seguente

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds$$

Tenuto presente che sui due cateti del triangolo retttangolo T assegnato riesce $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu} = 0$ il flusso si riduce all'integrale sulla sola ipotenusa

$$x = t,\; y = 1 - t, \quad t \in [0,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(t^4 + t(1-t)\right) \sqrt{2}\, dt = \frac{11}{30}$$

Il valore del flusso richiesto poteva essere calcolato anche servendosi del Teorema della divergenza

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_T div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = \iint_T \left(4x^3 + x\right) dxdy =$$
$$= \int_0^1 \left(4x^3 + x\right) dx \int_0^{1-x} dy = \frac{11}{30}$$

2. Esercizio

Calcolare il flusso del campo

$$F = \{x^2, y^2\}$$

uscente dalla corona circolare $\Omega : 1 \le x^2 + y^2 \le 2.$

2.1. Soluzione.

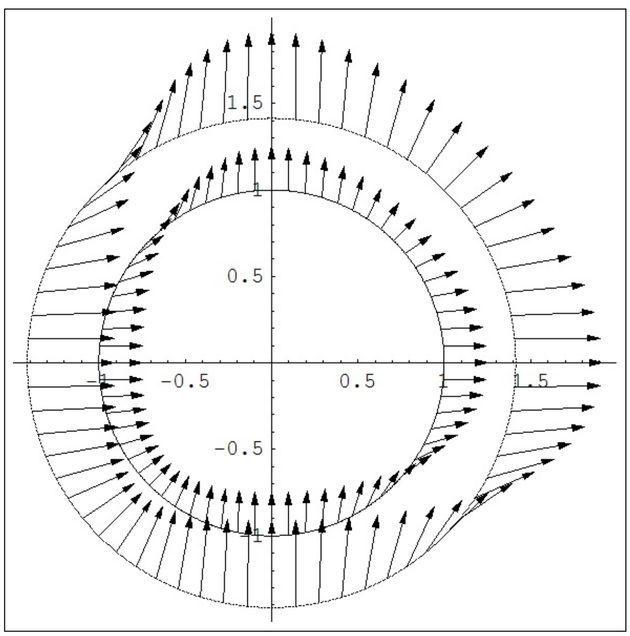


Figura 2. Il campo F sulla frontiera della corona circolare: tanto ne entra... quanto ne esce!

La frontiera che delimita la corona circolare Ω é composta delle due circonferenze

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 1, & x = \cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad ds = d\theta \\ \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 2, & x = \sqrt{2}\cos(\theta), \quad y = \sqrt{2}\sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad ds = \sqrt{2}d\theta \end{cases}$$

il versore normale esterno ha sulle due circonferenze espressioni diverse per quanto concerne l'orientamento

$$\nu_1 = -\{x,\, y\}\,, \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{x,\, y\}$$

Si ha pertanto

$$\int_{\partial\Omega} (F \times \nu)\, ds = -\int_{\mathcal{C}_1} (x^3 + y^3)\, ds + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathcal{C}_2} (x^3 + y^3)\, ds =$$

$$= (2\sqrt{2} - 1) \int_0^{2\pi} \left\{\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)\right\}\, d\theta = 0$$

Il flusso richiesto poteva essere calcolato anche tramite il Teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega} (F \times \nu)\, ds = \iint_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = \iint_{\Omega} (2x + 2y)\, dx\, dy = 0$$

risultato ottenuto riconoscendo la disparitá della funzione integranda e la simmetria del dominio Ω.

Osservazione 2.1. *Come si calcolano gli integrali*

$$\int_0^{2\pi} \cos^m(\theta)\, d\,\theta, \quad \int_0^{2\pi} \sin^m(\theta)\, d\,\theta, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

Basta ricordare le formule di Eulero

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

e calcolare con esse e con la formula del binomio di Newton le potenze da integrare.
Ad esempio

$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left\{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\{2\cos(3t) + 6\cos(t)\}$$

3. Esercizio

Calcolare l'area della regione del piano limitata dalla curva $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

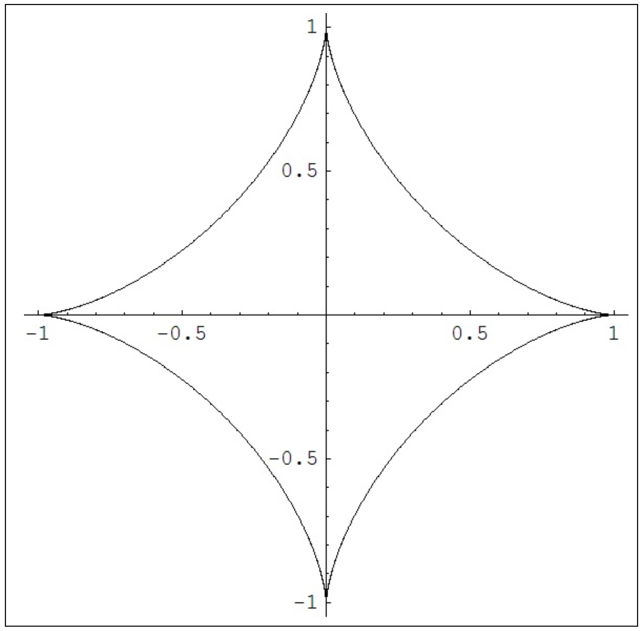


FIGURA 3. La regione del piano limitata dalla curva $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

3.1. Soluzione.

$$Area = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\overrightarrow{\{x,\, y\}} \times \overrightarrow{\nu} \right) ds$$

La determinazione del versore normale esterno ν si ottiene a partire dalla rappresentazione parametrica:

- prima si determina un vettore tangente
$$\overrightarrow{t} = (x'(t),\, y'(t)) = \left(-3\cos^2(t)\sin(t),\, 3\sin^2(t)\cos(t)\right)$$
- si determinano vettori ad essi ortogonali
$$\pm \left(3\sin^2(t)\cos(t),\, 3\cos^2(t)\sin(t)\right)$$
- si determina, sperimentalmente, quale dei due segni compete all'orientamento esterno, nel nostro caso il segno $+$,
- si normalizza il vettore trovato, dividendolo per il suo modulo.

Tenuto conto di quanto premesso

$$Area = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(3\sin^2(t)\cos^4(t) + 3\sin^4(t)\cos^2(t)\right)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3\sin^2(t)\cos^2(t)\right)\, dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt = \frac{3}{8}\pi$$

4. Esercizio

Calcolare l'area della regione del piano racchiusa dal ramo di spirale $\rho = \theta,\ \theta \in [0, 2\pi]$ e dal segmento $[0, 2\pi]$ dell'asse x.

4.1. Soluzione.

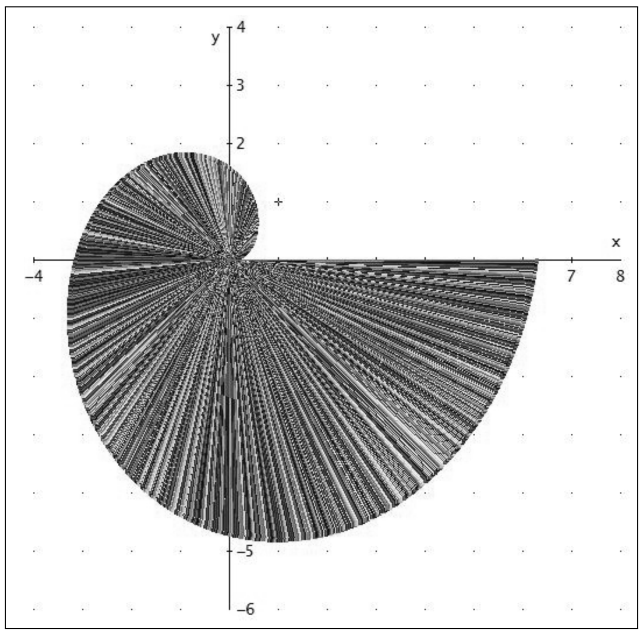


FIGURA 4. La regione del piano limitata dalla spirale

Le equazioni parametriche della curva data in forma polare come $\rho = \theta$ sono

$$x = \theta\, \cos(\theta), \quad y = \theta\, \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Un vettore normale é, per quanto osservato precedentemente

$$\overrightarrow{n} = \pm \{y',\, -x'\} = \pm \{\sin(\theta) + \theta\cos(\theta), -\cos(\theta) + \theta\sin(\theta)\}$$

una semplice verifica ad esempio per $\theta = \pi/2$ permettedi riconoscere che l'orientamento esterno corrisponde al segno $+$.

Tenuto conto che nel tratto di frontiera costituito dal segmento orizzontale $[0, 2\pi]$ riesce $\nu = (0, 1)$ si puó esprimere l'area richiesta con la formula

$$Area\ = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \{x, y\}\ \times\ \nu\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\theta\, \cos(\theta)\, (\sin(\theta) + \theta \cos(\theta)) \, + \theta\, \sin(\theta)\, (-\cos(\theta) + \theta \sin(\theta))\} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 \, d\theta = \frac{8}{6} \pi^3$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Confrontate, a titolo di buon senso il valore dell'area trovato con quello che ci si potrebbe attendere guardando la figura:*

- *piú o meno un semicerchio di diametro 3π inferiormente,*
- *una frazione, meno di $1/4$ di esso, superiormente.*

5. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = (x(x+y), xy^2)$$

lungo la frontiera del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *percorsa in senso antiorario.*

5.1. Soluzione.

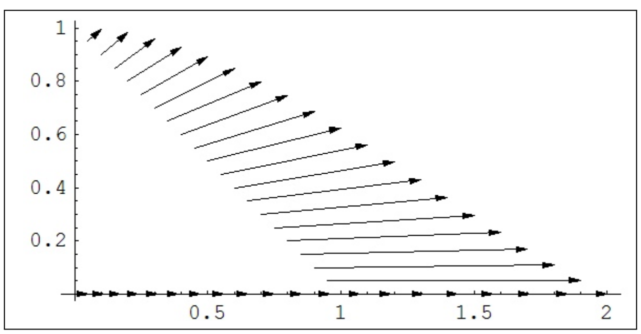


FIGURA 5. Il campo F lungo la frontiera del triangolo

Il lavoro richiesto é il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau} \, ds$$

essendo $\overrightarrow{\tau}$ il versore tangente alla curva orientato nel verso di percorrenza assegnato.

Tenuto presente che il campo $\overrightarrow{F}$ é nullo sul cateto verticale, l'integrale curvilineo si riduce al tratto orizzontale

$$x = t, \, y = 0 \quad t \in [0,1], \quad \overrightarrow{\tau} = \{1, 0\}$$

e all'ipotenusa

$$x = t,\ y = 1 - t, \quad t \in [0,1], \quad \overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-1, 1\}$$

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 t^2\, dt + \int_0^1 \left(-t + t(1-t)^2\right)\, dt = -\frac{1}{12}$$

6. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo

$$\overrightarrow{F} = \left\{ \frac{x}{x^2+y^2}, \ \frac{y}{x^2+y^2} \right\}$$

lungo la semicirconferenza $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, *percorsa da* $A = (-2, 0)$ *a* $B = (2, 0)$.

6.1. Soluzione.

É facile riconoscere che

$$\overrightarrow{F} = \nabla \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

quindi, come appreso nel Corso di Funzioni di piú variabili,

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \tau ds = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \Big|_{(x,y)=(-2,0)}^{(x,y)=(2,0)} = 0$$

7. Esercizio

Calcolare l'integrale lungo il segmento $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{S}} (x^2 - y^2)\, ds, \quad \mathcal{S} : AB,\ A = (0,1),\ B = (3,2)$$

e verificare la disequazione

$$\left| \int_{\mathcal{S}} (x^2 - y^2)\, ds \right| \leq \int_{\mathcal{S}} \left| x^2 - y^2 \right|\, ds$$

7.1. Soluzione.

Equazioni parametriche del segmento sono

$$x = 3t,\ y = 1 + t, \quad t \in [0, 1], \quad ds = \sqrt{3^2 + 1^2}dt = \sqrt{10}\, dt$$

$$\int_S (x^2 - y^2) ds = \int_0^1 \left\{(3t)^2 - (1+t)^2\right\} \sqrt{10}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

Per il calcolo dell'integrale

$$\int_S \left|x^2 - y^2\right| ds$$

occorre tener presente il modulo: la funzione integranda infatti cambia segno traversando la retta $y = x$: il segmento S la traversa nel punto $C = (3/2,\ 3/2)$

$$\left|x^2 - y^2\right| = \begin{cases} y^2 - x^2 & (x, y) \in AC \\ \\ x^2 - y^2 & (x, y) \in CB \end{cases}$$

Pertanto

$$\int_S \left|x^2 - y^2\right| ds = \int_{AC} \left(y^2 - x^2\right) ds + \int_{CB} \left(x^2 - y^2\right) ds =$$

$$\int_0^{1/2} \left(1 + 2t - 8t^2\right) \sqrt{10}\, dt + \int_{1/2}^1 \left(8t^2 - 1 - 2t\right) \sqrt{10}\, dt = \frac{34}{12}\sqrt{10}$$

I valori ottenuti soddisfano la disequazione della seconda domanda.

8. Esercizio

Tenuto conto della relazione

$$\iint_\Omega f_x(x, y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \nu_x\, f(x, y)\, ds$$

esprimere l'integrale doppio

$$\iint_\Omega 2x\, e^{-y^2}\, dx\, dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \le 1$$

mediante due diversi integrali curvilinei estesi alla frontiera $\partial\Omega$

8.1. Soluzione.

Si tratta di trovare due funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ tali che

$$f_x(x,y) = 2x\, e^{-y^2}, \quad g_x(x,y) = 2x\, e^{-y^2}$$

Per quanto concerne la prima si ha ovviamente

$$f(x,y) = x^2\, e^{-y^2}$$

altre si ottengono semplicemente con

$$g(x,y) = x^2\, e^{-y^2} + \varphi(y)$$

ad esempio

$$g(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)\, e^{-y^2}$$

Gli integrali curvilinei richiesti sono, tenuto conto che $\nu_x = x$,

$$\int_{\partial\Omega} x^3\, e^{-y^2}\, ds, \quad \int_{\partial\Omega} x\left(x^2 + y^2 - 1\right)\, e^{-y^2}\, ds$$

La seconda delle due espressioni vale evidentemente zero...

9. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x + y + 3$, *calcolare*

$$\int_{\partial E} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds$$

con $E = \{(x,y) : -1 \leq y \leq 1, -(1+y^2) \leq x \leq 0\}$ *e* ν *il versore normale esterno.*

9.1. Soluzione.

Il Teorema della divergenza applicato alle funzioni armoniche produce la relazione

$$\int_{\partial E} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds = \iint_E \triangle f\, dx\, dy$$

nel nostro caso quindi

$$\triangle\left(x^2 + y^2 + xy + x + y + 3\right) = 4 \quad \to \quad \int_{\partial E} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds = 4 \iint_E dx\, dy$$

Tenuto conto che l'area di E vale $8/3$ si ha

$$\int_{\partial E} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds = \frac{8}{3}$$

10. Esercizio

Calcolare usando il Teorema della divergenza

$$\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds$$

dove $f(x,y) = x^2+x^3+3\,y^2-3\,x\,y^2$, Γ é la curva di equazione $4x^2+9y^2 = 36$ e ν il versore normale orientato verso l'esterno.

10.1. Soluzione.

Si tratta, come nel precedente esercizio di calcolare

$$\triangle\left(x^2+x^3+3\,y^2-3\,x\,y^2\right) = 8$$

Ne segue

$$\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds = 8\, \iint_E dx\, dy$$

Tenuto conto dell'ellisse assegnato

$$4x^2+9y^2 = 36 \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$$

che ha area $3\times 2\times\pi = 6\pi$ si ha

$$\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \nu}\, ds = 48\,\pi$$

OSSERVAZIONE 10.1. *Polinomi $P_n(x,y)$ di grado n, funzioni armoniche si ottengono prendendo, ad esempio la parte reale o la parte immaginaria delle potenze*

$$(x+i\,y)^n$$

Sono pertanto funzioni armoniche

$$P_3(x,y) = x^3-3\,x\,y^2, \quad Q_3(x,y) = 3\,x^2\,y-\,y^3$$

Come si riconosce le due superfici armoniche di Figure 6 e 7 arrivano sul bordo della circonferenza a volte in salita a volte in discesa, essendo le due situazioni egualmente, armoniosamente*, presenti: l'integrale infatti della derivata normale deve essere nullo !*

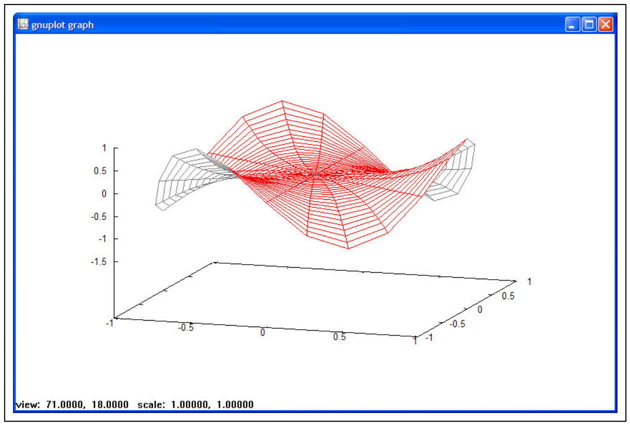


FIGURA 6. La superficie armonica $z = x^3 - 3\,x\,y^2$

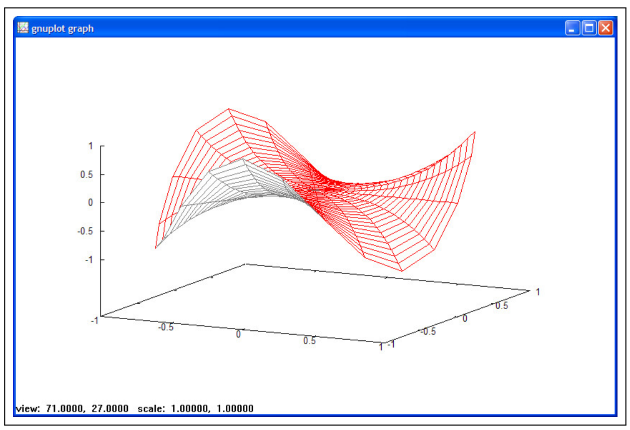


FIGURA 7. La superficie armonica $z = 3\,x^2\,y - \,y^3$

CAPITOLO 19

Le soluzioni del foglio 4

1. Esercizio

Siano[1]

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \\ g(x,y) = 10 - (3x^2 + 2xy + 5y^2) \end{cases}$$

e sia

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ f(x,y) \leq z \leq g(x,y),$$

- disegnare approssimativamente la regione Ω,
- detto $\overrightarrow{\nu} = \{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$ riflettere sui valori della componente ν_z sulla frontiera $\partial\Omega$,
- calcolare i tre integrali superficiali

$$\iint_{\partial\Omega} z\,\nu_z\,d\sigma, \quad \iint_{\partial\Omega} x\,\nu_x\,d\sigma, \quad \iint_{\partial\Omega} x\,\nu_y\,d\sigma.$$

1.1. Soluzione.

Il versore $\overrightarrow{\nu}$ normale esterno a $\partial\Omega$ ha la terza componente ν_z

- positiva sulla superficie che delimita Ω superiormente,

$$\nu_z = \frac{1}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}}$$

- nulla sulla superficie laterale, una parte di superficie cilindrica verticale,
- negativa sulla superficie inferiore

$$\nu_z = \frac{-1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

[1] Attenzione, la funzione $g(x,y)$ é stata un po' alzata... per evitare che il grafico intersecasse quello della $f(x,y)$

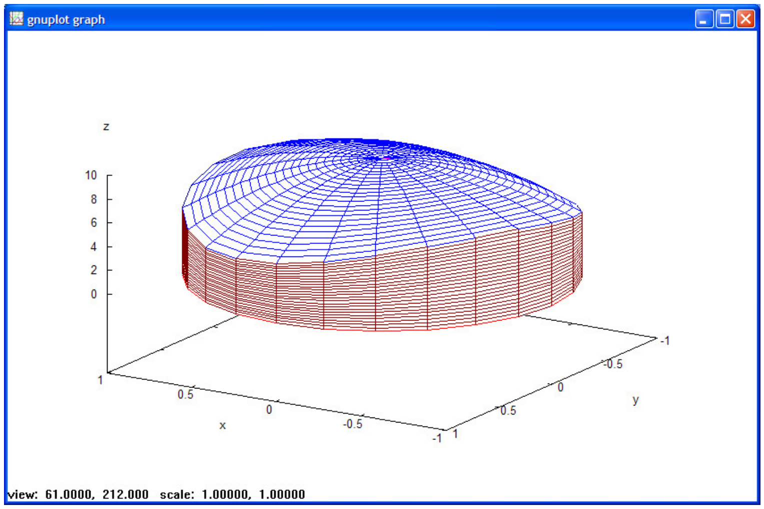


FIGURA 1. La regione Ω del primo esercizio.

$\boxed{\text{Primo integrale}}$

$$\iint_{\partial\Omega} z\,\nu_z\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \{0,\,0,\,z\}\times\overrightarrow{\nu}\,d\sigma = \iiint_\Omega div\{0,\,0,\,z\}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz =$$

$$= \int_0^1 \rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\left\{11-4\rho^2\cos^2(\theta)-6\rho^2\sin^2(\theta)-2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\right\}d\theta =$$

$$11\pi - 4\pi\frac{1}{4} - 6\pi\frac{1}{4} = \frac{17}{2}\pi$$

$\boxed{\text{Secondo integrale}}$

$$\iint_{\partial\Omega} x\,\nu_x\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega}\{x,\,0,\,0\}\times\overrightarrow{\nu}\,d\sigma =$$

$$= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \frac{17}{2}\pi$$

$\boxed{\text{Terzo integrale}}$

$$\iint_{\partial\Omega} x\,\nu_y\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega}\{0,\,x,\,0\}\times\overrightarrow{\nu}\,d\sigma = \iiint_\Omega 0\,dx\,dy\,dz = 0$$

2. Esercizio

Sia

$$\overrightarrow{F} = \frac{k}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,\{x,\,y,\,z\}$$

il campo elettrico generato da una carica posta nell'origine: calcolare il flusso uscente di $\overrightarrow{F}$ attraverso

- la superficie sferica
$$\mathbb{S} : x^2+y^2+z^2=1$$
- l'ellissoide
$$\mathbb{E} : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$
- il parallelepipedo
$$\mathbb{P} : 1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 6,\ 1 \le z \le 7$$

2.1. Soluzione.

Flusso attraverso la superficie sferica $x^2+y^2+z^2=1$, $\overrightarrow{\nu} = \{x,\,y,\,z\}$

$$\iint_{\mathbb{S}} \frac{k}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,\{x,\,y,\,z\} \times \{x,\,y,\,z\}\,d\sigma = \ k\ \iint_{\mathbb{S}} d\sigma = 4\,k\,\pi$$

Flusso attraverso la superficie ellissoidale $\mathbb{E} : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{=}1$: consideriamo la regione $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ compresa tra la superficie sferica $\mathbb{S}$ e la superficie $\mathbb{E}$

In $\mathbb{B}$ (che non include l'origine) il campo $\overrightarrow{F}$ é regolarissimo: dal teorema della divergenza segue quindi

$$\iiint_{\mathbb{B}} div(\overrightarrow{F})\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\mathbb{B}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\,d\sigma$$

ovvero,

- tenuto conto che $\partial\mathbb{B} = \partial\mathbb{E} \cup \partial\mathbb{S}$ orientate in verso opposto
- e che

$$div(F) = 0, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{B}$$

$$\iint_{\mathbb{E}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma \; - \; \iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 0$$

Ne segue che

$$\iint_{\mathbb{E}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma \; = \; \iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 4\, k\, \pi$$

Flusso uscente dal parallelepipedo:

Nel parallelepipedo (che non include l'origine) il campo $\overrightarrow{F}$ é regolarissimo: dal teorema della divergenza segue quindi

$$\iint_{\partial\mathbb{P}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iiint_{\mathbb{P}} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz = 0$$

3. Esercizio

Assegnata la curva

$$\mathbb{C} : \begin{cases} x = \cos(t), \\ y = 2\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 3\cos(t), \end{cases}$$

- determinare il lavoro del campo $\overrightarrow{F} = \{x + y,\, 2x + z,\, z + y\}$ lungo $\mathbb{C}$ in uno dei due versi possibili,
- riconoscere che $\mathbb{C}$ é bordo della superficie cartesiana

$$\mathbb{S} : z = 3\, x, \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,$$

- calcolare tale lavoro avvalendosi della Formula di Stokes,
- riconoscere il legame tra il lavoro ottenuto e l'area di $\mathbb{S}$

3.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

Assumiamo il verso quello offerto dalla rappresentazione parametrica al crescere di $t \in [0, 2\pi]$:

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{4 + 6\sin^2(t)}}\; \{-\sin(t),\, 2\cos(t),\, -3\sin(t)\}$$

$$\int_{\mathbb{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} \{\cos(t) + 2\sin(t),\, 2\cos(t) + 3\cos(t),\, 3\cos(t) + 2\sin(t)\} \times$$

$$\{-\sin(t),\ 2\cos(t),\ -3\sin(t)\}\,dt \quad =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-10\sin(t)\cos(t) - 8\sin^2(t) + 10\cos^2(t)\right) dt = 2\pi$$

Seconda domanda:

La rappresentazione parametrica di $\mathbb{C}$ mostra chiaramente che

$$z = 3x$$

e quindi che $\mathbb{C}$ é una curva piana appartenente a tale piano.
Sempre dalla rappresentazione parametrica si riconosce che

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

e quindi che la curva assegnata é il bordo della superficie ottenuta tagliando la colonna ellittica

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

col piano $z = 3x$.

Terza domanda:

$$\int_{\mathbb{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \iint_S \mathrm{rot}\,(\overrightarrow{F}) \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

$$\mathrm{rot}\,(\overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & 2x+z & z+y \end{vmatrix} = \{0,\ 0,\ 1\}$$

$$\overrightarrow{\nu} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\,\{3,\ 0,\ 1\}$$

L'analogia con il caso piano suggerisce la scelta del segno + : il versore normale (un ipotetico osservatore posto in piedi come ν) vede girare lungo il bordo nel verso antiorario.
Pertanto

$$\int_{\mathbb{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \frac{1}{\sqrt{10}} \iint_{\mathbb{S}} d\sigma$$

L'ultimo integrale superficiale si calcola, tenuto conto che $\mathbb{S}$ é la superficie cartesiana

$$z = 3x,\ \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \quad \to \quad d\sigma = \sqrt{1+3^2}\ dx\,dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\iint_{\mathbb{S}} d\sigma = \iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1} dxdy = 2\pi$$

avendo semplicemente usato la formula $\pi\, a\, b$ dell'area di un'ellisse di semiassi a e b.

$\boxed{\text{Quarta domanda:}}$

L'area della superficie $\mathbb{S}$ é

$$area(\mathbb{S}) = \iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1} \sqrt{10}\, dx\, dy = 2\sqrt{10}\,\pi$$

Tenuto presente che

- sia il rot $(\overrightarrow{F})$ che $\overrightarrow{\nu}$ sono costanti su $\mathbb{S}$
- e il loro prodotto scalare vale $1/\sqrt{10}$

é naturale che il lavoro richiesto, tradotto con la formula di Stokes, valga

$$2\pi \;=\; \frac{1}{\sqrt{10}}\; area(\mathbb{S})$$

4. Esercizio

Assegnata la superficie cartesiana

$$z = 1 + 3x + 2y, 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1$$

- disegnarla approssimativamente nello spazio,
- calcolare i suoi termini L^2, M^2, N^2,
- calcolare l'area e confrontarla con quella del quadrato $0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1$ su cui la superficie é assegnata.

4.1. Soluzione.

Si tratta di un parallelogramma del piano $z = 1 + 3x + 2y$
Un esempio delle istruzioni GnuPlot usate per la Figura 2

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set xlabel "x"
gnuplot> set ylabel "y"
gnuplot> set zlabel "z"
gnuplot> set urange [0:1]
gnuplot> set vrange [0:1]
gnuplot> set isosamples 20,20
gnuplot> splot u,v, 1+3*u+2*v
```

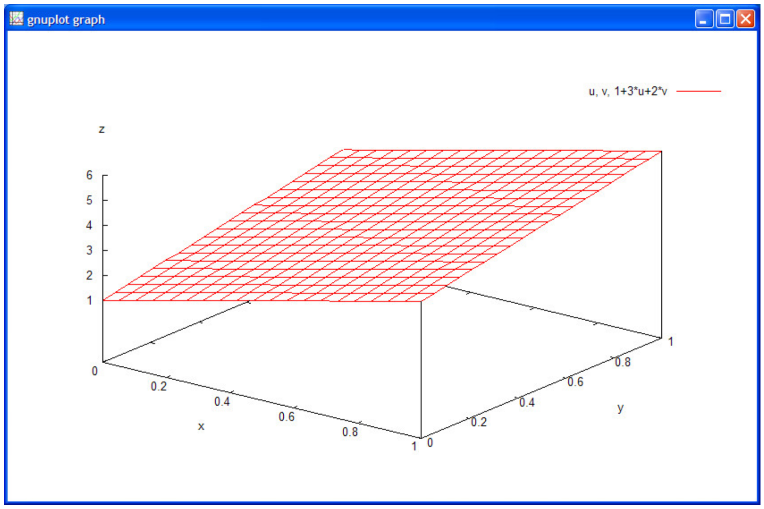


FIGURA 2. $z = 1 + 3x + 2y, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

La matrice da cui si ricavano le tre espressioni $L,\ M,\ N$, i tre minori del secondo ordine, é la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da cui, calcolati come di consueto,

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad N = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Si noti che il vettore $\{L,\ M,\ N\}$ é normale alla superficie.
Riesce

$$L^2 + M^2 + N^2 = 9 + 4 + 1 = 14$$

e quindi i versori normali alla superficie sono

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{14}} \{-3,\ -2,\ 1\}$$

L'area é, per definizione,

$$area(S) = \iint_{x \le 1,\ 0 \le y \le 1} \sqrt{14}\ dx\, dy\ =\ \sqrt{14}$$

Si noti che

- l'area del quadrato Q del piano xy su cui la superficie si rappresenta é 1,

- il coseno della normale alla superficie con l'asse z vale $\nu_z = 1/\sqrt{14}$

é naturale[2] che tra l'area del parallelogramma S e l'area del quadrato Q su cui si proietta valga la relazione

$$area(S)\,\nu_z \;=\; area(Q)$$

5. Esercizio

Assegnata la superficie

$$\mathbb{S}: \; x = u^2 + v^2,\; y = u^2 - v^2,\; z = 2uv,\;\; u^2 + v^2 \leq 1$$

- calcolare la matrice jacobiana
$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$
- calcolare i tre valori L^2, M^2, N^2
- esprimere l'elemento d'area $d\,\sigma$
- calcolare l'area di $\mathbb{S}$.

5.1. Soluzione.

Elevando al quadrato le tre espressioni parametriche si riconosce che esse verificano la relazione

$$x^2 = y^2 + z^2$$

che é la nota equazione cartesiana di un cono rotondo, molto piú esteso di quello rappresentato dalla superficie assegnata...vedi Figura 3 (attenzione ai nomi degli assi)

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2u & 2v \\ 2v & -2v & 2u \end{pmatrix}$$

$$L = 4u^2 + 4v^2, \quad M = 4v^2 - 4u^2, \quad N = -8uv$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = 32(u^4 + v^4 + 2u^2v^2),$$

$$d\sigma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, du\, dv = 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

$$area(\mathbb{S}) = \iint_{\mathbb{S}} d\sigma \;=\; \iint_{u^2+v^2\leq 1} 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

da cui servendosi delle coordinate polari

[2] La copertura dei tetti di montagna costa piú della pavimentazione dei piani, non solo per la difficoltá del montaggio..., ma anche per la quantitá del materiale !

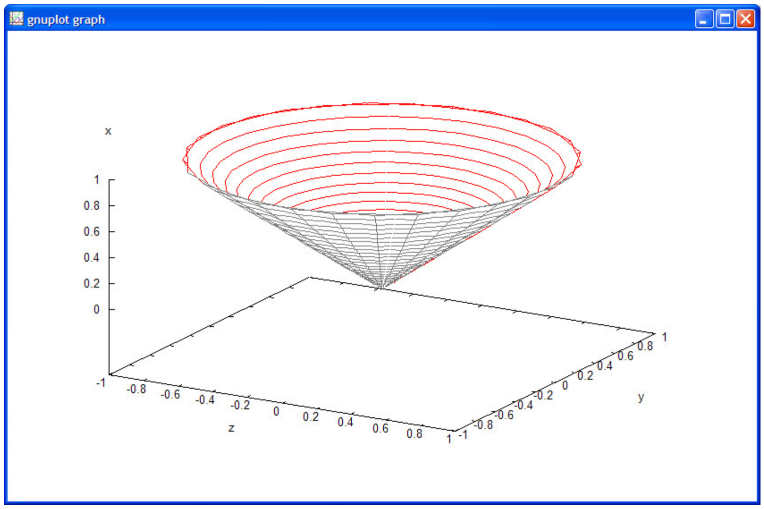


FIGURA 3. $\mathbb{S}:\ x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = 2uv,\ \ u^2 + v^2 \leq 1$

$$area(\mathbb{S}) = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = 2\sqrt{2}\,\pi$$

.... ***Sorpresa !***
L'esercizio non é terminato...

Chiunque abbia un po' di memoria ricorderá la formula elementare dell'area della superficie laterale del cono rotondo di raggio r, altezza h e apotema $a = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$area = \frac{1}{2} 2\pi\, r\, a = \pi\, r\, a$$

che nel nostro caso darebbe, vedi Figura 3,

$$area = \pi\sqrt{2}$$

la metá del valore $\boxed{2\sqrt{2}\,\pi}$ trovato sopra.
E allora ?
La rappresentazione parametrica fornita produce in realtá non il cono di Figura 3 ma lo stesso... contato due volte !
Pensate ad esempio al punto $P = (1, 1, 0)$ prodotto sia dal punto $(u, v) = (1, 0)$ che dal punto $(u, v) = (-1, 0)$, ecc.
Non é quindi sorprendente che l'area venga raddoppiata.

.... ***ora***
l'esercizio é terminato.

6. Esercizio

Assegnato nel piano $x\,z$ il grafico

$$x = 1 + z^2, \ -1 \le z \le 1$$

consideriamo la superficie $\mathbb{S}$ ottenuta facendo ruotare tale grafico intorno all'asse z

- determinare le equazioni parametriche di $\mathbb{S}$,
- determinare l'area di $\mathbb{S}$.

6.1. Soluzione.

Le equazioni parametriche della superficie di rotazione sono

$$\begin{cases} x = (1+z^2)\cos(\theta) \\ y = (1+z^2)\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi], \ -1 \le z \le 1$$

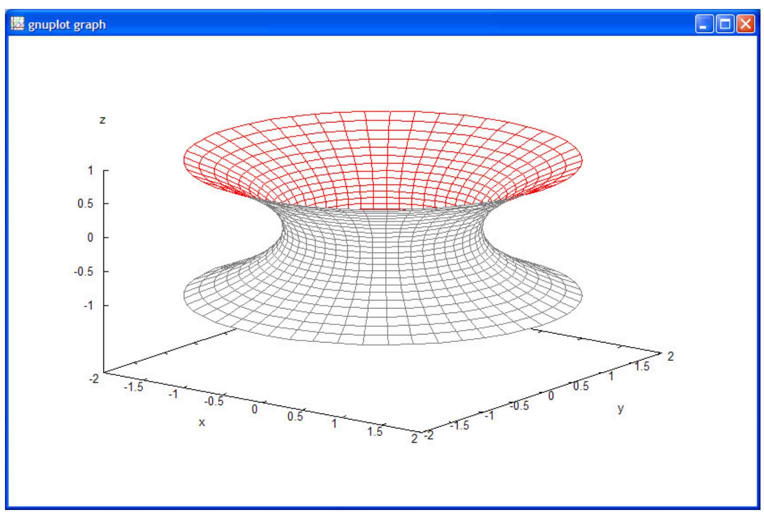


FIGURA 4. $x = (1+z^2)\cos(\theta), y = (1+z^2)\sin(\theta), -1 \le z \le 1$

$$\begin{pmatrix} 2z\cos(\theta) & 2z\sin(\theta) & 1 \\ -(1+z^2)\sin(\theta) & (1+z^2)\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \sqrt{L^2+M^2+N^2} = (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}$$

$$d\sigma = (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}\ dz\,d\theta$$

$$Area(\mathbb{S}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}\, dz =$$

$$2\pi\, \frac{50\,\sqrt{5} + 15\,\mathrm{ArcSinh}(2)}{32} \simeq 26.2044$$

7. Esercizio

Assegnato l'integrale superficiale

$$\iint_{\mathbb{S}} \left\{ x^2\, dy\, dz \,+\, y^2\, dz\, dx \,+\, z^2\, dx\, dy \right\}$$

espresso con il linguaggio delle forme differenziali esterne e riferito alla superficie sferica $\mathbb{S}$ di centro l'origine e raggio R

- esprimerlo traducendo le espressioni $dy\, dz, ...$ nelle corrispondenti espressioni $\nu_x\, d\,\sigma, ...$
- calcolarne il valore servendosi del Teorema della divergenza,
- calcolarne il valore direttamente servendosi della rappresentazione parametrica della sfera e delle formule

$$dy\, dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\psi)} d\theta\, d\psi, \ldots$$

7.1. Soluzione.

La rappresentazione parametrica della sfera é

$$\begin{cases} x = R\sin(\psi)\cos(\theta) \\ y = R\sin(\psi)\sin(\theta) \qquad \psi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,2\pi] \\ z = R\cos(\psi) \end{cases}$$

$$d\sigma = R^2\ \sin(\psi)\, d\psi\, d\theta, \quad \overrightarrow{\nu} = \frac{1}{R}\{x,\, y,\, z\}$$

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

$$\iint_{\mathbb{S}} \left\{ x^2\, dy\, dz \,+\, y^2\, dz\, dx \,+\, z^2\, dx\, dy \right\} = \iint_{\mathbb{S}} \{x^2,\, y^2,\, z^2\} \times \overrightarrow{\nu}\ d\sigma$$

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

Detta $\mathbb{B}$ la sfera delimitata da $\mathbb{S}$ si ha:

$$\iint_{\mathbb{S}} \{x^2,\, y^2,\, z^2\} \times \overrightarrow{\nu}\ d\sigma = \iiint_{\mathbb{B}} (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz = 0$$

dove il risultato numerico si giustifica dal fatto che la funzione integranda é dispari e $\mathbb{B}$ é simmetrico rispetto all'origine.

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

$$dy\, dz = \begin{vmatrix} y_\psi & z_\psi \\ y_\theta & z_\theta \end{vmatrix} d\psi\, d\theta = R^2 \cos(\psi) \sin(\psi) \cos(\theta)\, d\psi\, d\theta$$

$$dz\, dx = \begin{vmatrix} z_\psi & x_\psi \\ z_\theta & x_\theta \end{vmatrix} d\psi\, d\theta = R^2 \cos(\psi) \sin(\psi) \sin(\theta)\, d\psi\, d\theta$$

$$dx\, dy = \begin{vmatrix} x_\psi & y_\psi \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} d\psi\, d\theta = R^2 \cos(\psi) \sin(\psi)\, d\psi\, d\theta$$

L'integrale diviene pertanto

$$R^4 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ (\sin(\psi)\cos(\theta))^2 \cos(\psi)\sin(\psi)\cos(\theta) + (\sin(\psi)\sin(\theta))^2 \cos(\psi)\sin(\psi)\sin(\theta) + \right.$$

$$\left. + (\cos(\psi))^2 \cos(\psi)\sin(\psi) \right\} d\psi\, d\theta = 0$$

La gestione automatica dell'integrale superficiale della forma differenziale assegnata avrebbe del resto prodotto

$$\iint_{\partial\mathbb{B}} \left\{ x^2\, dy\, dz \,+\, y^2\, dz\, dx \,+\, z^2\, dx\, dy \right\} =$$

$$= \iiint_{\mathbb{B}} d\left\{ x^2\, dy\, dz \,+\, y^2\, dz\, dx \,+\, z^2\, dx\, dy \right\} =$$

$$= \iiint_{\mathbb{B}} (2x dx\, dy\, dz + 2y\, dy\, dz\, dx + 2z dz\, dx\, dy) =$$

$$= 2 \iiint_{\mathbb{B}} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$$

come era stato ottenuto precedentemente servendosi del teorema della divergenza.
Si noti come sono stati correttamente permutati i prodotti

$$dy\, dz\, dx = dx\, dy\, dz, \quad dz\, dx\, dy = dx\, dy\, dz$$

8. Esercizio

Calcolare la quota del baricentro

$$z_G = \frac{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z \; d\,\sigma}{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} \; d\,\sigma}$$

della calotta sferica

$$\mathbb{S}_{RH} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad H \leq z \leq R$$

8.1. Soluzione.

Rappresentazione parametrica della $\mathbb{S}_{RH}$:

$$\begin{cases} x = R\sin(\psi)\cos(\theta) \\ y = R\sin(\psi)\sin(\theta) \qquad \psi \in [0, \arccos(H/R)],\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z = R\cos(\psi) \end{cases}$$

$$d\sigma = R^2 \; \sin(\psi)\, d\psi\, d\theta,$$

$$\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z \; d\,\sigma = 2\pi\, R^3 \int_0^{\arccos(H/R)} \cos(\psi)\; \sin(\psi) d\psi = \pi R^3 (1 - (H/R)^2)$$

$$\iint_{\mathbb{S}_{RH}} d\,\sigma = 2\pi R^2 \int_0^{\arccos(H/R)} \sin(\psi)\, d\psi = 2\pi R^2 (1 - H/R)$$

Ne segue che:

$$z_G = \frac{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z \; d\,\sigma}{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} \; d\,\sigma} = \frac{\pi R^3 (1 - (H/R)^2)}{2\pi R^2 (1 - H/R)} = \frac{1}{2}(R + H)$$

La quota z_G ottenuta é fisicamente comprensibile: si tratta della quota media tra la $z = H$ del piano che delimita la calotta e la $z = R$ del polo nord

- se H si avvicina ad R la calotta diviene un'areola intorno al polo nord e il baricentro z_G si avvicina al polo stesso,
- se H si avvicina a $-R$ la calotta diviene quasi tutta la sfera e il baricentro z_G si avvicina sempre piú al centro della sfera...

CAPITOLO 20

Le soluzioni del foglio 5

1. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale lineare

$$y' + \frac{4}{x}\,y = x^4$$

- *determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata* $y' + \frac{4}{x}\,y = 0$,
- *determinare, cercandola nella forma di un polinomio di grado adeguato, una soluzione dell'equazione completa assegnata,*
- *determinare la soluzione* $y_n(x)$ *del problema di Cauchy* $y(1) = n,\ n = 1, 2, 3, ...$ *per l'equazione completa e indicare in quale intorno di* $x = 1$ *esse siano definite.*

1.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

L'equazione é definita (per via di quel x a denominatore) o per $x > 0$ o per $x < 0$.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{4}{x}\,dx \qquad \ln(|y|) = -4\,\ln(|x|) + c$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y' + \frac{4}{x}\,y = 0$ hanno segno costante quindi

$$|y(x)| = e^c\frac{1}{|x|^4} \qquad \to \qquad y(x) = \frac{A}{x^4}$$

si noti infatti che $|x|^4 = x^4$.

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

Si puó provare, tenuto conto che a secondo membro cé un x^4 almeno con un polinomio di grado 5 : scegliamo kx^5, sostituendo nell'equazione si ha

$$5kx^4 + 4kx^4 = x^4 \qquad \to \qquad 9k = 1 \qquad \to \qquad k = \frac{1}{9}$$

Una soluzione dell'equazione completa assegnata é pertanto

$$y = \frac{1}{9}x^5$$

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa sono, per $x > 0$

$$y(x) = \frac{A}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$$

La soluzione del problema di Cauchy $y(1) = n,\ n = 1, 2, 3, ...$ si trova scegliendo A in modo da soddisfare le condizioni iniziali assegnate

$$n = \frac{A}{1^4} + \frac{1}{9}1^5 \quad \to \quad A = n - \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} y' + \frac{4}{x}\,y = x^4 \\ y(1) = n, \end{cases} \quad \to \quad y(x) = \left(n - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$$

2. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale lineare

$$(x^2 + 1)\,y' + 4\,x\,y = x$$

- *presentarla nella forma normale* $y' + a(x)\,y = b(x)$
- *determinare tutte le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *determinare la soluzione dell'equazione completa assegnata che soddisfa la condizione di Cauchy* $y(1) = 3/4$.

2.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

$$(x^2 + 1)\,y' + 4\,x\,y = x \quad \to \quad y' + \frac{4x}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2}$$

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

$$y' + \frac{4x}{1 + x^2} = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{y} = -2\,\frac{2x}{1 + x^2}\,dx$$

$$\ln(|y|) = -2\ln(1 + x^2) + c \quad \to \quad y(x) = A\frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma generale

$$y(x) = \frac{u(x)}{(1+x^2)^2}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene, a calcoli fatti,

$$u'(x)\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} \quad \to \quad u'(x) = x + x^3$$

da cui

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c\right)\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

La soluzione del problema di Cauchy $y(1) = 3/4$ si determina pertanto determinando la costante c tale che

$$\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c\right)\frac{1}{(1+1)^2} \quad \to \quad c = \frac{9}{4}$$

La soluzione richiesta é pertanto, vedi Figura 1,

$$y(x) = \frac{9 + 2\,x^2 + x^4}{4\,(1+x^2)^2}$$

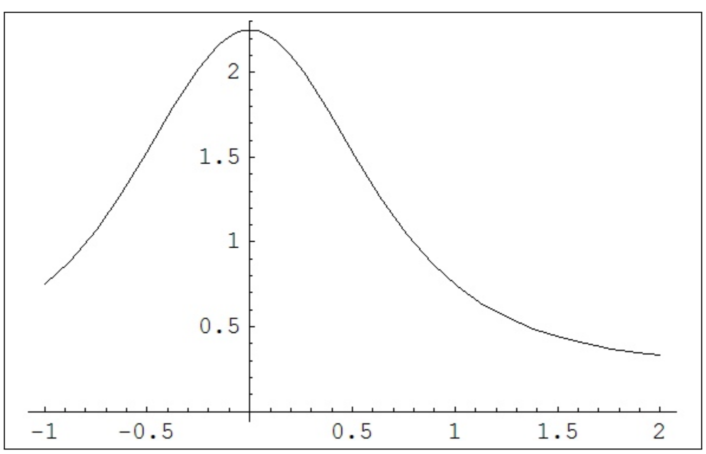


FIGURA 1. La soluzione del problema di Cauchy dell'esercizio 2

3. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale lineare

$$y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$$

- *presentarla nella forma normale $y' + a(x)\, y = b(x)$ e indicare in quali intervalli x sia definita,*
- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata,*
- *determinare la soluzione dell'equazione completa assegnata che soddisfa la condizione di Cauchy $y(0) = 0$.*

3.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

$$y' \cos(x) + y \sin(x) = 1 \quad \to \quad y' + y\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

equazione definita negli (infiniti) intervalli in cui $\cos(x) \neq 0$, gli intervalli in cui é definita $\tan(x)$.

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

$$y' + y\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \quad \to \quad \frac{y'}{y} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\ln(|y|) = \ln(|\cos(x)|) + c \quad \to \quad y(x) = A\, \cos(x)$$

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

Una soluzione dell'equazione completa

$$y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$$

é evidentemente $y(x) = \sin(x)$ e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono

$$y(x) = A\, \cos(x) * \sin(x)$$

la soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 0$ é pertanto

$$y(x) = \sin(x)$$

Osservazione 3.1. *Anche senza la precedente intuizione che $y = \sin(x)$ fosse una soluzione della completa si sarebbe potuto procedere cercandola nella forma generale*

$$y(x) = u(x)\,\cos(x)$$

sostituendo nell'equazione si ottiene, a conti fatti

$$u(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \to \quad u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

da cui

$$u(x) = \tan(x) + c$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa

$$y(x) = (\tan(x) + c)\,\cos(x).$$

Tra queste quella che soddisfa la condizione $y(0) = 0$ é quella con $c = 0$ ovvero

$$y(x) = \tan(x)\,\cos(x) = \sin(x)$$

4. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale autonoma

$$y' + e^y = 0$$

- *determinare le soluzioni $y(x)$ dell'equazione, e riconoscere che sono funzioni monotone,*
- *determinare la soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 1$*
- *determinare le soluzioni delle nuove equazioni ancora autonome*

$$y' + e^y = n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

4.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

$$y' + e^y = 0 \quad \to \quad y' = -e^y < 0$$

quindi le soluzioni x) dell'equazione hanno, tuute, la derivata prima negativa: sono pertanto strettamente decrescenti.
Algoritmo di soluzione:

$$y' + e^y = 0 \quad \to \quad -e^{-y}\,dy = dx \quad \to \quad e^{-y} = x + c$$

da cui

$$\ln(e^{-y}) = \ln(x + c) \quad \to \quad y = -\ln(x + c)$$

Si tratta, evidentemente di funzioni definite per $x + c > 0$

Seconda domanda:

Basta scegliere opportunamente la costante c

$$1 = -\ln(0 + c) \quad \rightarrow \quad c = e^{-1}$$

Si tratta di una funzione definita per $x > -e^{-1}$, vedi Figura 2,

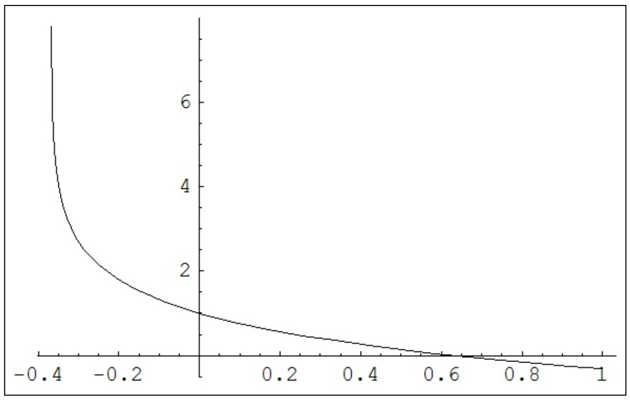


FIGURA 2. La soluzione $y(0) = 1$ dell'Es. 4

Terza domanda:

determinare le soluzioni delle nuove equazioni ancora autonome

$$y' = n - e^y, \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{n - e^y} = dx$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{n - e^y} = \frac{1 - e^y/n + e^y/n}{n - e^y} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{e^y}{n - e^y}$$

si riconosce che

$$\int \frac{dy}{n - e^y} = x + c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n}y + \frac{1}{n}\ln(n - e^y) = x + c$$

Si noti che il primo passo - l'integrazione esplicita - sia andato in questo caso bene.

Per esplicitare - secondo passo (teorema di Dini) - dalla precedente relazione la y si procede al modo seguente

$$\frac{1}{n}y + \frac{1}{n}\ln(n - e^y) = x + c \quad \rightarrow \quad y - n(x + c) = -\ln(n - e^y)$$

ovvero

$$e^y\, e^{-n(x+c)} = -(n - e^y) \quad \rightarrow \quad e^y = \frac{n}{1 - e^{-n(x+c)}}$$

da cui ancora

$$y(x) = \ln\left(\frac{n}{1 - e^{-n(x+c)}}\right)$$

5. Esercizio

Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-(t+y)} \\ \\ (3y^2 + 2y)y' = t\cos t \\ \\ y' = \dfrac{e^{2t}}{4y^3} \end{cases}$$

5.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima equazione:}}$

$$y' = \mathrm{e}^{-(t+y)} \quad \rightarrow \quad y'\, e^y = e^{-t} \quad \rightarrow \quad e^y = -e^{-t} + c \quad \rightarrow \quad y(t) = \ln(-e^{-t} + c)$$

$\boxed{\text{Seconda equazione:}}$

$$(3y^2 + 2y)y' = t\cos t \quad \rightarrow \quad y^3 + y^2 = \cos(t) + t\ \sin(t) + c$$

Il secondo passo, esplicitare la y in questo caso dipende dalla condizione iniziale, infatti l'espressione $y^3 + y^2$ non é, in generale invertibile, come si riconosce dal grafico della funzione $x^3 + x^2$ riportato in Figura 3

$\boxed{\text{Terza equazione:}}$

$$y' = \frac{e^{2t}}{4y^3} \quad \rightarrow \quad 4\, y^3\, dy = e^{2t}\, dt \quad \rightarrow \quad y^4 = \frac{1}{2}\left(e^{2t} + c\right)$$

Anche qui il secondo passaggio, esplicitare la y non é univoco in generale

$$y(t) = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}\,(e^{2t} + c)}$$

La scelta del segno dipenderá dal dato iniziale che si deve soddisfare: se, ad esempio $y(0) = 1$ avremo, a conti fatti per determinare c

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\,(e^{2t} + 1)}$$

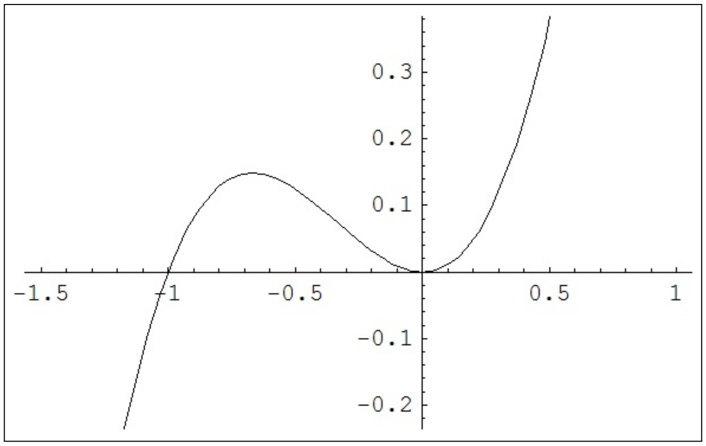


FIGURA 3. Il grafico di $x^3 + x^2$

mentre per $y(0) - 1$ avremo,

$$y(t) = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(e^{2t} + 1\right)}$$

6. Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$t\,y\,y' = \lg(t), \qquad y(1) = 2.$$

6.1. Soluzione.

$$t\,y\,y' = \lg(t) \quad \rightarrow \quad \int y\,dy = \int \frac{1}{t}\lg(t)dt \quad \rightarrow \quad y^2 = \lg^2(t) + 2c$$

Tenuto conto della condizione iniziale $y(1) = 2$ si ha

$$2^2 = \lg^2(1) + 2c \quad \rightarrow \quad c = 2 \quad \rightarrow \quad y(t) = \sqrt{\lg^2(t) + 4}$$

Come si vede l'ambiguitá del segno da prendere avanti alla radice quadrata viene risolta dal segno, positivo, di $y(1)$.

7. Esercizio

Tracciare grafici qualitativi delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y(4 - y^2)$ *che verificano rispettivamente le condizioni iniziali*

$$y(0) = 1, \qquad y(0) = -1, \qquad y(0) = -3, \qquad y(0) = 3.$$

7.1. Soluzione.

L'espressione $f(y) = y(4 - y^2)$ a secondo membro dell'equazione autonoma assegnata si annulla per

$$y = -2, \quad y = 0, \quad y = 2$$

mentre, vedi Figura 4

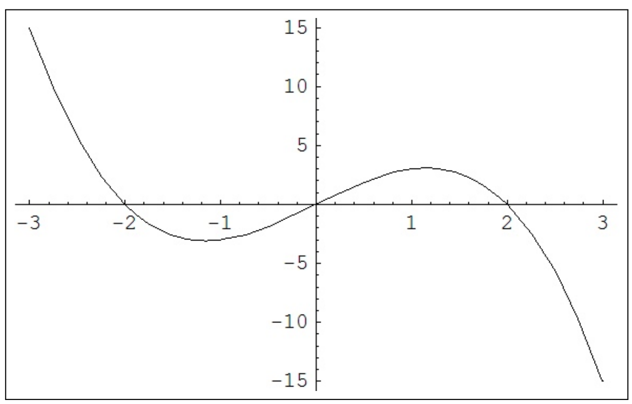


FIGURA 4. $f(y) = y(4 - y^2)$

Pertanto le tre funzioni

$$y_1(x) = -2, \quad y_2(x) = 0, \quad y_3(x) = 2$$

sono tre soluzioni d'equilibrio.
Tutte le altre soluzioni sono funzioni strettamente monotone, i cui grafici non intersecano in alcun punto quelli delle tre soluzioni d'equilibrio, pur avvicinandosi asintoticamente ad essi, vedi Figura 5.
Pertanto

é positiva	per $y < -2$	$y(x)$ strettamente crescente
é negativa	per $-2 < y < 0$	$y(x)$ strettamente decrescente
é positiva	per $0 < y < 2$	$y(x)$ strettamente crescente
é negativa	per $y > 2$	$y(x)$ strettamente decrescente

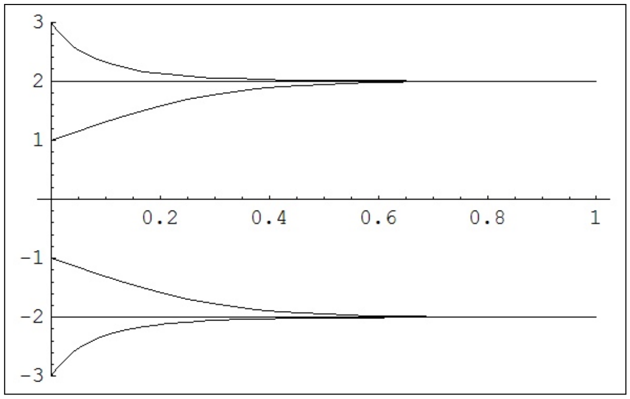


FIGURA 5. Le soluzioni dell'Esercizio 7 per $x \in [0, 1]$

8. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

$$y^{[4]} + 18y'' + 81y = 0.$$

8.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti del quarto ordine: occorrono 4 soluzioni, collegate alle radici dell'equazione (detta caratteristica)

$$\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = (\lambda^2 + 9)^2 = 0$$

Si trovano due sole radici, complesse coniugate,

$$\lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i$$

Si tratta di due radici ciascuna di molteplicitá 2: le soluzioni che se ne deducono sono pertanto

$$e^{3ix}, \quad xe^{3ix}, \quad e^{-3ix}, \quad xe^{-3ix} \tag{23}$$

Tenuto presente che

$$e^{3ix} = \cos(3x) + i\sin(3x), \quad e^{-3ix} = \cos(3x) - i\sin(3x)$$

lo spazio vettoriale V delle soluzioni dell'equazione omogenea generato dalle quattro funzioni (23) é lo stesso generato dalla quattro seguenti

$$\cos(3x), \quad \sin(3x), \quad x\cos(3x), \quad x\sin(3x)$$

L'integrale generale, ovvero la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea di quarto ordine assegnata, é pertanto

$$y(x) = A\,\cos(3x) + B\,\sin(3x) + C\,x\,\cos(3x) + D\,x\,\sin(3x)$$

al variare di $A,\ B,\ C,\ D\ \in \mathbb{R}$.

9. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti completa

$$y'' + k^2\,y = 1 + t + \cos(2t)$$

al variare del parametro k.

9.1. Soluzione.

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y(t) = \alpha\cos(kt) + \beta\sin(kt)$$

Soluzioni dell'equazione completa si trovano in tre rate:

- $y'' + k^2\,y = 1 \quad \to \quad y_1(t) = 1/k^2$
- $y'' + k^2\,y = t \quad \to \quad y_2(t) = 1/k^2\,t$
- $y'' + k^2\,y = \cos(2t) \quad \to \quad y_3(t) = \frac{1}{k^2-4}\,\cos(2t)$

Se $k \neq 0$ e $k^2 \neq 4$ le formule precedenti sono corrette e l'integrale generale, cioé la totalitá delle funzioni che soddisfano l'equazione differenziale assegnata sono

$$y(t) = \alpha\cos(kt) + \beta\sin(kt) + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\,t + \frac{1}{k^2-4}\,\cos(2t)$$

I casi osservati, che si escludono l'un l'altro, vanno trattati a parte:

$\boxed{k = 0}$ Si devono rivedere le prime due delle precedenti: si ottiene

$$y'' = 1 + t + \cos(2t) \quad \to \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}\cos(2t) + \alpha t + \beta$$

$\boxed{k^2 = 4}$ Occorre rivedere la terza delle precedenti

$$y'' + 4\,y = \cos(2t)$$

Cerchiamone soluzioni nella forma

$$y(t) = t(A\sin(2t) + B\cos(2t))$$

sostituendo nell'equazione si ottiene

$$y'' + 4y = 4A\cos(2t) + 4B\sin(2t)$$

per ottenere quindi a secondo membro $\cos(2t)$ basterá scegliere

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0$$

ovvero

$$y_3(t) = \frac{1}{4}t\sin(2t)$$

L'integrale generale in questo caso é quindi

$$y(t) = \alpha\cos(kt) + \beta\sin(kt) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,t + \frac{1}{4}\,t\sin(2t)$$

10. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 4y' + 4y = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

10.1. Soluzione.

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono dedotte dalle radici dell'equazione

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -2$$

tenuto conto che l'unica radice trovata ha molteplicitá 2 le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_1(t) = e^{-2t}, \quad y_2(t) = t\,e^{-2t}$$

Una soluzione dell'equazione completa si cerca nella forma di polinomio almeno di secondo grado

$$y(t) = At^2 + Bt + C$$

sostituendo si ha

$$2A + 4(2At + B) + 4(At^2 + Bt + C) = t^2 \quad \to \quad \begin{cases} 4A = 1 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4C = 0 \end{cases}$$

Il polinomio di secondo grado soluzione dell'equazione completa é pertanto

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(t) = \alpha\,e^{-2t} + \beta\,t\,e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato si ottiene scegliendo le due costanti in modo da soddisfare il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \frac{3}{8} = 0 \\ -2\alpha + \beta - \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \quad \to \quad \alpha = -\frac{3}{8}, \quad \beta = \frac{6}{8}$$

La soluzione richiesta é quindi

$$y(t) = -\frac{3}{8}\, e^{-2t} + \frac{6}{8}\, t\, e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

11. Esercizio

Assegnata il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + x^2\, y = \sin(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- *rappresentare la soluzione $y(x)$ servendosi della (105) di pag. 185 delle Dispense,*
- *determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y(x)$ per $x = 0$*
- *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a $y(x)$ per $x_0 = 0$.*

11.1. Soluzione.

La soluzione del problema di Cauchy, vedi Figura 6, é

$$y(x) = e^{-x^3/3} \left\{ 1 + \int_0^x \sin(t)\, e^{t^3/3}\, dt \right\}$$

La retta tangente é, per definizione,

$$y = y(0) + y'(0)\, x \quad \to \quad y = 1 + y'(0)\, x$$

Il valore $y'(0)$ si legge nell'equazione differenziale stessa

$$y' + x^2\, y = \sin(x) \quad \to \quad y'(0) + 0^2\, y(0) = \sin(0) \quad \to \quad y'(0) = 0$$

la tangente richiesta é pertanto

$$y = 1$$

Per determinare il polinomio

$$P(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2$$

manca solo l'ultimo coefficiente che, tuttavia si ricava dall'equazione differenziale stessa

$$y' + x^2\, y = \sin(x) \quad \to \quad y'' + 2xy + x^2 y' = \cos(x) \quad \to \quad y''(0) = 1$$

Il polinomio richiesto é pertanto

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

espressione in accordo con la concavitá leggibile in Figura 6.

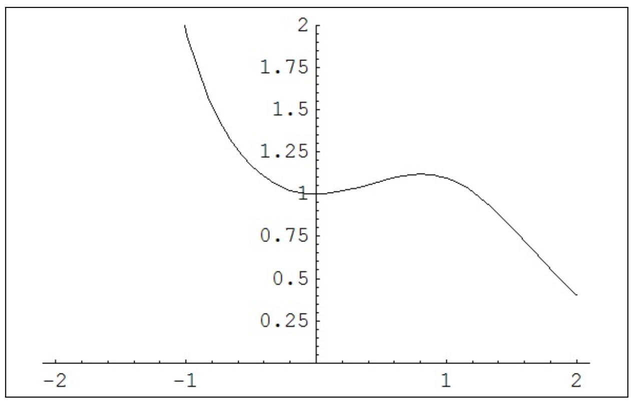


Figura 6. La soluzione dell'Esercizio 11 per $x \in [-1, 1]$

CAPITOLO 21

Le soluzioni del foglio 6

1. Esercizio

Integrare le seguenti equazioni differenziali di Eulero:

- $$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0, \quad x > 0;$$
- $$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, \quad x > 0.$$

1.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y \ = \ 0, \quad x > 0 \tag{24}$$

Si tratta di un'equazione differenziale

- lineare del secondo ordine,
- omogenea,
- a coefficienti variabili, definiti per $x \neq 0$, quindi o nell'intervallo $x < 0$ o in quello $x > 0$.

L'espressione particolare dei coefficienti inquadra l'equazione nel tipo *equazioni di Eulero*, vedi Dispense Cap. 24.

Nell'intervallo $x > 0$ si possono trovare soluzioni dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2\, y'' + \, xy' - \, 4\, y = 0$$

nella forma $y(x) = x^\lambda$: sostituendo si ha infatti

$$\{\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 4\}\ x^\lambda \ = \ 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) + \lambda - 4 = 0$$

da cui deriva

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$$

Le due funzioni

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

sono due soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine $n = 2$, pertanto tutte le soluzioni dell'equazione (24) sono fornite dalle loro combinazioni lineari

$$y(x) = A\,x^2 + B\,\frac{1}{x^2}$$

OSSERVAZIONE 1.1.
...e se avessimo cercato le soluzioni [1] *definite nell'altro possibile intervallo,* $x < 0$ *?*
La domanda é ben posta: dal momento che si propongono soluzioni della forma $x^\lambda = e^{\lambda \ln(x)}$ *é naturale richiedere, a meno che* λ *sia un intero o un razionale con denominatore dispari, che la base* x *sia positiva.*
Del resto l'equazione é perfettamente considerabile anche nell'intervallo $x < 0:$ *come cavarsela ?*
Nel caso di equazioni di Eulero del secondo ordine, quella dell'esercizio, la difficoltá é superabile molto facilmente (fra l'altro gli esponenti λ *coinvolti in questo caso sono interi).*
La tecnica é la seguente:

- *sia* $u(x)$ *una soluzione dell'equazione per* $x > 0$
- *definiamo* $v(x) = u(-x)$ *funzione* v *definita quindi per* $x < 0$
- *riesce*

$$\begin{cases} v'(x) = -u'(-x), \\ v''(x) = u''(x), \\ x\,v'(x) = (-x)\,u'(-x), \\ x^2\,v''(x) = (-x)^2 u''(-x) \end{cases}$$

quindi

$$x^2 v''(x) + x\,v'(x) - 4v(x) = (-x)^2 u''(-x) + (-x)\,u'(-x) - 4\,u(-x) = 0$$

In altri termini se $u(x)$ *é soluzione per* $x > 0$ *allora*

$$u(|x|)$$

é soluzione per ogni $x \neq 0$.
NOTA: *La precedente affermazione*

se $u(x)$ é soluzione per $x > 0$ allora $u(|x|)$ é soluzione per ogni $x \neq 0$

é valida per le soluzioni di ogni equazione di Eulero, anche per $n > 2$.

Seconda domanda:

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0 \quad x > 0 \tag{25}$$

[1] Vedi Smirnov, Corso di Matematiche Superiori, Vol. II, Cap. II, § 1.18

Si tratta di un'equazione analoga alla precedente: l'espressione $y(x) = x^\lambda$ conduce a

$$x^2\,y'' + 3xy' + 2\,y \;=\; 0 \quad \to \quad \{\lambda(\lambda-1)+3\lambda+2\}\;x^\lambda = 0$$

da cui segue

$$(\lambda+1)^2+1=0 \quad \to \quad \lambda = -1 \pm i$$

Tenuto conto che, per $x>0$,

$$x^{u+iv} = e^{(u+iv)\ln(x)} = e^{u\ln(x)}\,e^{i\,v\,\ln(x)} = x^u\,\{\cos(v\,\ln(x)) + i\sin(v\,\ln(x))\}$$

si hanno le due soluzioni

$$y_1(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln(x)), \quad y_2(x) = \frac{1}{x}\sin(\ln(x))$$

L'integrale generale dell'equazione (25) é pertanto, per $x>0$

$$y(x) = \frac{1}{x}\,\{A\,\cos(\ln(x)) \;+\; B\sin(\ln(x))\}$$

Osservazione 1.2. *Tenuto conto dell'Osservazione precedente, pagina 272, le funzioni*

$$y(x) = \frac{1}{|x|}\,\{A\,\cos(\ln(|x|)) \;+\; B\sin(\ln(|x|))\}$$

sono soluzioni dell'equazione per ogni $x \neq 0$.

2. Esercizio

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 6\,x + 5\cos x.$$

2.1. Soluzione.

Equazione omogenea: determinare le radici dell'equazione di terzo grado

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 3$$

Le soluzioni linearmente indipendenti che ne derivano sono quindi

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = 1, \quad y_3(x) = e^{3x}$$

Equazione completa : riferendosi ad un termine alla volta, una soluzione della $y''' - 2y'' - 3y' = 6\,x$ si cerca nella forma di polinomio di secondo grado $\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Sostituendo si perviene a

$$-4A - 6Ax - 3B = 6x \quad \rightarrow \quad A = -1, \quad B = \frac{4}{3}$$

da cui

$$\overline{y}_1(x) = -x^2 + \frac{4}{3}\,x$$

Riferendosi al secondo addendo a secondo membro $y''' - 2y'' - 3y' = 5\cos x$, una soluzione si trova nella forma $\overline{y}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, da cui, sostituendo, si ricava

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1 \quad \rightarrow \quad \overline{y}_2(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - \sin(x)$$

L'integrale generale dell'equazione completa assegnata é pertanto

$$y(x) = A\,e^{-x} \,+\, B \,+\, C\,e^{3x} \,-\, x^2 + \frac{4}{3}\,x + \frac{1}{2}\cos(x) - \sin(x)$$

3. Esercizio

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y'' + y = \cos^3(x).$$

3.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione

- lineare del secondo ordine
- completa
- con termine noto che non sembra appartenere ai pochi tipi particolari indicati.

Equazione omogenea:

$$y'' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y(x) = A\cos(x) \,+\, B\,\sin(x)$$

Equazione completa:
Cerchiamo una soluzione nella forma

$$\overline{y}(x) = h_1(x)\cos(x) + h_2(x)\sin(x)$$

suggerita dal metodo della variazione delle costanti, vedi Dispense Cap. 24, § 6 prendendo le due funzioni $h_1(x)$ e $h_2(x)$ che soddisfino, con le loro derivate $h_1'(x)$ e $h_2'(x)$ il sistema

$$\begin{cases} h_1'(x)\cos(x) & + \quad h_2'(x)\sin(x) = 0 \\ h_1'(x)(-\sin(x)) & + \quad h_2'(x)\cos(x) = 0 \end{cases}$$

Le espressioni di $h_1(x)$ e $h_2(x)$ si trovano esplicitamente nell'Esempio 6.3 delle Dispense e producono quindi la soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\overline{y}(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, \cos^3(t)\, dt$$

L'integrale generale richiesto é pertanto

$$y(x) = A\cos(x) \,+\, B\,\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)\, \cos^3(t)\, dt$$

L'addendo integrale é, in questo caso calcolabile esplicitamente:

$$\int_0^x \sin(x-t)\, \cos^3(t)\, dt = \int_0^x \left\{-\cos^3(t)\, \cos(x)\, \sin(t) + \cos^4(t)\, \sin(x)\right\}\, dt =$$

$$= \cos(x) \int_0^x \cos^3(t)\,(-\sin(t))\, dt + \sin(x) \int_0^x \cos^4(t)\, dt =$$

$$= \cos(x) \left\{\frac{1}{4}\cos^4(x) - \frac{1}{4}\right\} + \sin(x) \left\{\frac{3\,x}{8} + \frac{\sin(2\,x)}{4} + \frac{\sin(4\,x)}{32}\right\}$$

Osservazione 3.1. *L'equazione non omogenea $y'' + y = \cos^3(x)$ poteva essere studiata anche in modo piú semplice tenendo conto che il termine $\cos^3(x)$ si puó rappresentare come somma di seni e coseni come ricavabile da formule trigonometriche o, piú semplicemente ancora dalle formule di Eulero*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Da esse segue[2] *infatti che*

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}\left\{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right\} = \frac{1}{8}\left\{2\cos(3x) + 6\cos(x)\right\}$$

L'equazione si sarebbe allora letta al modo seguente

$$y'' + y = \frac{1}{8}\left\{2\cos(3x) + 6\cos(x)\right\}$$

e le sue soluzioni potevano essere trovate direttamente tenuto conto che adesso il secondo membro rientra perfettamente in quelli particolari trattati:

[2]La possibilitá di esprimere $\cos^3(x)$ come somma lineare di seni e coseni di frequenze diverse si chiama *Sviluppo in serie di Fourier* ed é applicabile al 99.99 % delle funzioni periodiche.

$$y(x) = c_1\,\cos(x) + c_2\,\sin(x) - \frac{\cos(3\,x)}{32} + \frac{3}{8}\,x\,\sin(x)$$

Attenzione comunque alla risonanza.... il secondo addendo a secondo membro coincide con una delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea...!
Notate infatti nell'espressione delle soluzioni dell'equazione completa il termine

$$\frac{3}{8}\,x\,\sin(x)$$

oscillante e di ampiezze sempre piú grandi....

4. Esercizio

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}.$$

4.1. Soluzione.

Equazione omogenea:

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad \to \quad \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = --3, \quad \lambda_2 = -2$$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono pertanto

$$y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

Equazione non omogenea:
Si cerca una soluzione nella forma suggerita dal *metodo della variazione delle costanti*:

$$y(x) = h_1(x)\,e^{-3x} + h_2(x)\,e^{-2x}$$

con $h_1(x)$ e $h_2(x)$ che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} h_1'(x)e^{-3x} & + & h_2'(x)e^{-2x} & = 0 \\ -3h_1'(x)e^{-3x} & - & 2h_2'(x)e^{-2x} & = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}} \end{cases}$$

da cui, tenuto conto delle formule di Cramer,

$$h_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} \quad h_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

da cui, sviluppando i conti,

$$h_1'(x) = -e^{3x}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}, \quad h_2'(x) = e^{2x}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

Le due primitive si trovano facilmente tenuto conto che, con semplici passaggi algebrici si ottiene che

$$h_1'(x) = -e^x + \frac{e^x}{1+(e^x)^2}, \quad h_2'(x) = \frac{1}{2}\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

da cui

$$h_1(x) = -e^x + \arctan(e^x) + c_1, \quad h_2(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c_2$$

L'integrale generale del'equazione non omogenea

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

é pertanto

$$y(x) = \{-e^x + \arctan(e^x) + c_1\}\ e^{-3x} + \left\{\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c_2\right\}\ e^{-2x}$$

se si preferisce si possono separare i termini soluzioni dell'omogenea, termini nei quali compaiono le due costanti arbitrarie c_1 e c_2 dalla parte che rappresenta una soluzione dell'equazione completa, scelta, ad esempio, privilegiata da *Mathematica*

$$y(x) \ = \ \frac{c_1}{e^{3\,x}} + \frac{c_2}{e^{2\,x}} + \frac{2\ \arctan(e^x) + e^x\ \log(1+e^{2\,x})}{2\,e^{3\,x}}$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Le soluzioni dell'equazione $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$, vedi grafici in Figura 1, appaiono tutte infinitesime per $x \to +\infty$: non bisogna sorprendersi*

- *per $x \to +\infty$ il termine a secondo membro é infinitesimo,*
- *in altri termini per $x \to +\infty$ l'equazione somiglia alla $y'' + 5y' + 6y = 0$,*
- *le soluzioni della $y'' + 5y' + 6y = 0$, sono combinazioni di e^{-3x} e e^{-2x} entrambe infinitesime per $x \to +\infty$....*

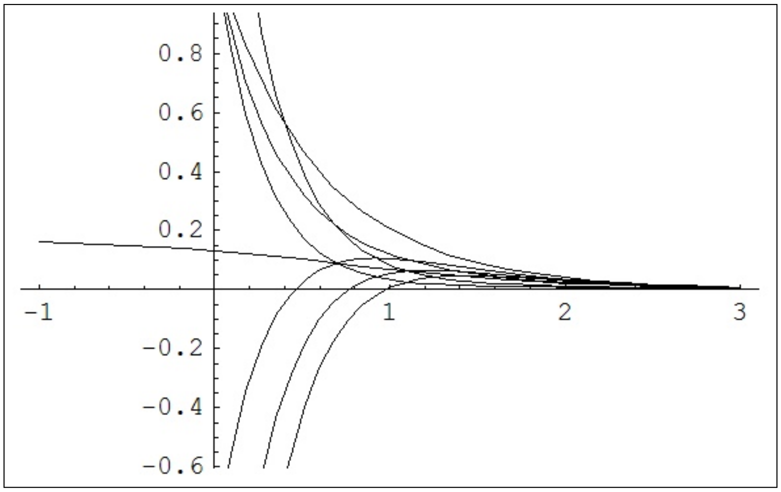


FIGURA 1. Alcune soluzioni dell'equazione non omogenea $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

5. Esercizio

Assegnato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} + 3y_1 - 2y_2 & = 0 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} + 5y_1 - 4y_2 & = 0 \end{cases}$$

- *determinare tutte le soluzioni* $\{y_1(t), y_2(t)\}$ *del sistema;*
- *determinare le soluzioni* $\{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)\}$ *che soddisfano le condizioni iniziali*

$$\bar{y}_1(0) = 1; \qquad \bar{y}_2(0) = 1;$$

- *determinare, se esistono, i limiti*

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{y}_i(t) \qquad \lim_{t\to-\infty} \bar{y}_i(t), \qquad i = 1, 2.$$

5.1. Soluzione.

Schema:

- autovalori $\lambda_1, \ \lambda_2$ della matrice A dei coefficienti
- autovettori $\overrightarrow{v_1}, \ \overrightarrow{v_2}$ associati
- vettori combinazione lineare degli autovettori moltiplicati per le funzioni esponenziali $e^{\lambda_1 t}, \ e^{\lambda_2 t}$

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

- autovalori

$$(-3-\lambda)(4-\lambda)+10=0 \quad \to \quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$$

- autovettori corrispondenti

$$\lambda_1=-1 \quad \to \quad \overrightarrow{v_1}=\{1,1\}$$
$$\lambda_2=2 \quad \to \quad \overrightarrow{v_2}=\{2,5\}$$

- Tutte le soluzioni del sistema sono pertanto

$$\{y_1(t),\, y_2(t)\} = c_1\overrightarrow{v_1}\, e^{\lambda_1 t} + c_2\overrightarrow{v_2}\, e^{\lambda_2 t} = c_1\{1,1\}\, e^{-t} + c_2\{2,5\}\, e^{2t}$$

Le soluzioni che verificano le condizioni iniziali $\bar{y}_1(0)=1; \qquad \bar{y}_2(0)=1$ sono

$$\{y_1(t),\, y_2(t)\} = \{1,1\}\, e^{-t}$$

e per esse riesce

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{y}_i(t)=0 \qquad \lim_{t\to-\infty} \bar{y}_i(t)=+\infty, \qquad i=1,2.$$

6. Esercizio

Integrare il seguente sistema differenziale lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} + y_1 + 2y_2 &= 0 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} - 8y_1 - 7y_2 &= 0 \end{cases}$$

6.1. Soluzione.

Stesso schema (autovalori, autovettori) dell'esercizio precedente, con alcune sorprese dovute al fatto che si trova un solo autovalore in luogo di 2 e un solo autovettore:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Autovalori: uno solo $\lambda=3$
Autovettori:uno solo $\{-1,\, 2\}$
Soluzioni: vedi **Dispense di Analisi Vettoriale**, Capitolo 30 §1,

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t\, e^{3t}$$

derivando si ha

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{3t} + 3 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t\, e^{3t} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

mentre applicando la matrice A si ha

$$A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{3t} + A \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t\, e^{3t}$$

I conti tornano se e solo se

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\ \\ A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La risoluzione dei due sistemi produce:

$$A \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ k/2 + 2h \end{pmatrix}$$

Si notino le due costanti arbitrarie entrambe causate dal fatto che 3 é autovalore per A.
Le soluzioni sono pertanto

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ k/2 + 2h \end{pmatrix} e^{3t} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} t\, e^{3t}$$

ovvero

$$\begin{cases} y_1(t) = -(h + kt)e^{3t} \\ \\ y_2(t) = (k/2 + 2h + 2kt)e^{3t} \end{cases}$$

7. Esercizio

Integrare il seguente sistema differenziale lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 & = 0 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 - 2y_2 & = 0 \end{cases}$$

7.1. Soluzione.

Stesso schema (autovalori, autovettori) degli esercizi precedenti, con altre sorprese....

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

autovalori : $\lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i$
autovettori : $\{\{i, 1\}, \{-i, 1\}\}$
$\boxed{\text{NOTA:}}$

- se A possiede un autovalore complesso possiede anche il coniugato,
- se A possiede un autovettore complesso possiede anche il coniugato,

Soluzioni:
una prima coppia:

$$\begin{pmatrix} \overline{y_1}(t) \\ \overline{y_2}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2-i)t} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} \right\} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

una seconda coppia:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y_1}(t) \\ \widetilde{y_2}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2-i)t} - \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} \right\} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

Tutte le soluzioni si ottengono combinando linearmente le due coppie trovate

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{2t} \; + \; B \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

Ovvero in notazione scalare

$$y_1(t) = (A \sin(t) + B \cos(t))e^{2t}, \quad y_2(t) = (A \cos(t) - B \sin(t))e^{2t}$$

Si tratta delle equazioni parametriche di una spirale

$$\sqrt{y_1^2(t)+y_2^2(t)}=\sqrt{A^2+B^2}\,e^{2t}$$

che si allarga.... molto rapidamente.

8. Esercizio

Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+\tan(x)\,y'=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

osservando che l'equazione é del tipo $f(x,y',y'')=0$ *(cioé non dipende esplicitamente da* y*) e puó quindi essere abbassata di grado ponendo* $y'(x)\ =\ u(x)$*.*

8.1. Soluzione.

La sostituzione[3] proposta, $y'(x)\ =\ u(x)$, trasforma il problema al modo seguente

$$\begin{cases} y''+\tan(x)\,y'=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=1 \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} u'+\tan(x)\,u=0 \\ u(0)=1 \end{cases}$$

Il problema trasformato, lineare del primo ordine, omogeneo, si risolve come ogni equazione a variabili separabili,

$$\frac{d\,u}{u}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx \quad \to \quad \ln(|u|)=\ln(|\cos(x)|)+c$$

Tenuto conto della condizione iniziale assegnata $x=0 \quad \to \quad u(0)=1$ si ha

$$u(x)=\cos(x), \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

Per tornare alla $y(x)$ si ha il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=u \\ y(0)=2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} y'=\cos(x) \\ y(0)=2 \end{cases} \quad \to \quad y(x)=\sin(x)+2$$

Il problema assegnato inizialmente ha pertanto soluzione

$$y(x)=\sin(x)+2, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

[3]...puramente tipografica

La limitazione sulla x deriva dalla presenza nell'equazione iniziale del coefficiente $\tan(x)$ definito appunto in tale intorno di $x = 0$.

9. Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

osservando che ponendo $z(x) = x + y(x)$ l'equazione in z risulta a variabili separabili.

9.1. Soluzione.

La sostituzione proposta,

$$z(x) = x + y(x) \quad \to \quad y(x) = z(x) - x, \quad y' = z' - 1$$

trasforma il problema al modo seguente

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} z' = 1 + z^2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

pervenendo ad un'equazione autonoma che si risolve, come tutte le equazioni a variabili separabili

$$\frac{dz}{1+z^2} = dx \quad \to \quad \arctan(z) = x + c$$

Tenuto conto della condizione iniziale si ha

$$\arctan(0) = 0 + c \quad \to \quad c = 0 \quad \to \quad z(x) = \tan(x)$$

Tenuto conto della sostituzione effettuata si ricava

$$y(x) = \tan(x) - x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

10. Esercizio

Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y\,y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

osservando che l'equazione é del tipo $f(y, y', y'') = 0$ (cioé non dipende esplicitamente da x) e puó quindi essere abbassata di grado ponendo $y' = u(y)$ e quindi $y'' = u'(y)\,y' = u'\,u$.

10.1. Soluzione.

La sostituzione proposta, sulla quale ragioneremo nell'Osservazione in fondo, produce

$$y' = u(y) \quad \to \quad y'' = u'\, y' = u'\, u$$

l'equazione differenziale si trasforma pertanto al modo seguente

$$y'' - y\, y' = 0 \quad \to \quad (u' - y)\, u = \; 0$$

le cui soluzioni sono

$$u = 0, \quad u = \frac{1}{2}y^2 + c$$

La prima, $u = 0$ produce

$$y' = 0 \quad \to \quad y(x) = k$$

la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy assegnato, $y'(0) = 1/2$ con derivata prima non identicamente nulla non é costante e quindi non rientra in tali funzioni.
La seconda $u = \frac{1}{2}y^2 + c$ produce

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + c$$

che, tenuto conto delle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$, implica $c = 0$

$$y' = \frac{1}{2}y^2 \quad \to \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}dx \quad \to \quad y = \frac{-2}{x + c}$$

Tenuto conto della condizione iniziale $y(0) = 1$ si ricava

$$1 = \frac{-2}{0 + c} \quad \to \quad c = -2 \quad \to \quad y(x) = \frac{2}{2 - x}$$

La numerositá delle manipolazioni eseguite consiglia di verificare che la funzione trovata sia effettivamente soluzione del problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y(x) & = & \frac{2}{2-x} \\ y(0) & = & 1 \\ y'(x) & = & \frac{2}{(2-x)^2} \\ y'(0) & = & \frac{1}{2} \\ y(x)\,y'(x) & = & \frac{4}{(2-x)^3} \\ y''(x) & = & \frac{4}{(2-x)^3} \end{cases}$$

....verifica OK !

OSSERVAZIONE 10.1. *La derivata di una funzione non é quasi mai espressa tramite il solo valore della funzione: in altri termini formule quali*

$$y' = u(y)$$

non sono quasi mai corrette.
La derivata $y'(x_0)$ infatti non dipende dal valore della funzione $y(x_0)$ ma dal limite del rapporto incrementale, quindi dipende anche dai valori della $y(x)$ nei punti x vicini a x_0
Il **quasi** *usato corrisponde al fatto che qualche volta la formula é buona: ad esempio se $y(x) = x^3$ riesce $y' = u(y)$ con*

$$u(y) = 3(\sqrt[3]{y})^2$$

Riflettendoci un po' si capisce che il procedimento va bene per le funzioni monotone.

Nel caso dell'esercizio il procedimento é, ammesso il teorema di esistenza e di unicitá della soluzione del problema di Cauchy, corretto.
Infatti l'equazione

$$y'' - y\,y' = 0$$

ha le soluzioni $y(x) = k$ costanti e, per l'unicitá, quelle $\overline{y}(x)$ non costanti sono strettamente monotone, infatti se la loro derivata prima $\overline{y}'(x)$ si annullasse in un punto x_0, $\overline{y}'(x_0) = 0$, allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'' - z\,z' = 0 \\ z(x_0) = \overline{y}(x_0) \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

avrebbe due soluzioni, la costante $z(x) = \overline{y}(x_0)$ e la $\overline{y}(x)$.

Riconosciuta la monotonia delle soluzioni $y(x)$ *dell'equazione*

$$y'' - y\,y' = 0$$

si riconosce che esse sono invertibili

$$y = y(x) \quad \leftrightarrow \quad x = \varphi(y)$$

e quindi la posizione

$$y'(x) = y'\,(\varphi(y)) = u(y)$$

é corretta.

CAPITOLO 22

Le soluzioni del foglio 7

1. Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza e la somma delle serie

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-x)^k, \quad n=1,2,3$$

1.1. Soluzione.

É noto che per la serie geometrica si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

da essa segue, scambiando x con $-x$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Le serie proposte differiscono dalla prima per qualche termine in meno.
Per $n=1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 \qquad \forall x \in (-1,1)$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k = \frac{-x}{1+x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Sottraendo in maniera analoga $1-x$ per $n=2$ e $1-x+x^2$ per n $=3$ si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k - 1 + x = \frac{1}{1+x} - 1 + x \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-x)^k = \frac{x^2}{1+x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k - 1 + x - x^2 = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}(-x)^k = \frac{-x^3}{1+x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Osservazione 1.1. *Un fenomeno interessante: le serie geometriche* $\sum_{k=n}^{\infty} x^k$ *di addendo iniziale* x^n.
Le loro somme, ovviamente definite $\forall x \in (-1,1)$ *si possono ottenere oltre che sottraendo dalla somma nota di tutta la serie i primi addendi non inclusi, anche con la osservazione seguente:*

$$\sum_{k=n}^{\infty} x^k = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^n \left\{1 + x + x^2 + \dots\right\} = \frac{x^n}{1-x}$$

2. Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza e la somma delle serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^{k+1}}{k!}, \quad x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{5^k\, x^k}{k}$$

2.1. Soluzione.

Si tratta di semplici manipolazioni tipografiche di tre serie di potenze note:

$\boxed{\text{Prima serie:}}$

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad \to \quad t\, e^t = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k!} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^{k+1}}{k!} = 3\, x\, e^{3x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Seconda serie:}}$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \dots \quad \rightarrow \quad \sin(t^2) = t^2 - \frac{(t^2)^3}{3!} + \frac{(t^2)^5}{5!} \dots \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + ... = \sin(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\textsc{Terza serie:}}$

$$1 - x + x^2 - x^3 ... = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1)$$

integrando si ottiene $\forall x \in (-1,1)$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x)$$

e quindi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in (-1,1)$$

ne segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{5^k\, x^k}{k} = 5x - \frac{(5x)^2}{2} + \frac{(5x)^3}{3} ... = \ln(1+5\,x) \quad \forall\, x \in (-1/5, 1/5)$$

3. Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} (x-1)^n.$$

3.1. Soluzione.

Dal criterio del rapporto applicato alla serie dei moduli si ricava

$$\frac{\left|\frac{n+1}{n+2}(x-1)^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{n+1}(x-1)^n\right|} = |x-1| \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} \rightarrow |x-1| < 1$$

Ne segue che la serie assegnata converge assolutamente per tutti gli x per i quali riesca $|x-1| < 1$, cioé $\forall x \in (0,2)$.
Al di fuori di tale intervallo aperto la serie non puó convergere perché i suoi termini

$$\frac{n}{n+1}(x-1)^n$$

non sono in alcun punto $x \notin (0, 2)$ infinitesimi.
Quindi l'insieme di convergenza della serie assegnata é

$$E : 0 < x < 2$$

Osservazione 3.1. *Una interessante manipolazione della serie assegnata:*
posto

$$x - 1 = t$$

la serie si presenta come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\, t^n$$

ovvero anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\, t^{n+1}$$

Da cui,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, t^n = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t}\, \ln(1-t) \quad \forall t \in (-1, 1) \cap (t \neq 0)$$

Riponendo in luogo di t la $x - 1$ si ha quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}(x-1)^n = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x-1}\, \ln(2-x), \quad \forall x \in (0, 2) \cap (x \neq 1)$$

La singolaritá per $x = 1$ è del tutto apparente: esiste infatti il

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}\, \ln(2-x) = -1$$

4. Esercizio

Data la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\, x^k}{(2k^2+1)\, 4^k}$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *determinare l'insieme di convergenza assoluta,*
- *determinare un intervallo dove la serie converge totalmente.*

4.1. Soluzione.

Convergenza assoluta: criterio del rapporto

$$\frac{\left|\frac{(k+1)\,x^{k+1}}{(2(k+1)^2+1)\,4^{k+1}}\right|}{\left|\frac{k\,x^k}{(2k^2+1)\,4^k}\right|} = \frac{|x|}{4}\frac{(k+1)(2k^2+1)}{(2(k+1)^2+1)k} \to \frac{|x|}{4} < 1$$

Si riconosce quindi che la serie converge assolutamente per $x \in (-4, 4)$. Al di fuori dell'intervallo chiuso $[-4, 4]$ la serie non puó convergere in quanto i suoi termini

$$\frac{k}{(2k^2+1)}\left(\frac{x}{4}\right)^k$$

non sono piú infinitesimi. Infatti

$$x \notin [-4, 4] \quad \to \quad \left|\frac{x}{4}\right| > 1$$

e riesce, di conseguenza[1],

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{(2k^2+1)}\left(\frac{x}{4}\right)^k\right| = +\infty$$

Restano da esaminare i comportamenti della serie in $x04$ e in $x = -4$: per $x = 4$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(2k^2+1)}$$

serie che puó essere confrontata con la serie armonica, notamente divergente.
Il confronto é il seguente: scritti i termini

$$\frac{k}{(2k^2+1)} = \frac{1}{2k+1/k}$$

si riconosce che

$$2k + \frac{1}{k} \leq 3k$$

e quindi

$$\frac{1}{2k+1/k} \geq \frac{1}{3}\,\frac{1}{k}$$

[1]Riflettete sugli ordini di infinito di k, k^2 e $|x/4|^k$

Tenuto presente che la serie di addendi $\frac{1}{3}\frac{1}{k}$ é divergente a maggior ragione sará divergente anche la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k^2+1)}$$

Per $x = -4$ riesce i termini diventano

$$\frac{k}{(2k^2+1)}\,(-1)^k$$

- a segni alterni
- infinitesimi
- decrescenti[2]

Tali tre requisiti garantiscono la convergenza (semplice, cioé non assoluta) della serie, per il Criterio di Leibnitz, vedi Dispense di Analisi Vettoriale, pag. 317, Teorema 2.1.

Pertanto la serie assegnata

- converge assolutamente per $x \in (-4, 4)$
- non converge per $x \notin [-4, 4]$
- converge (semplicemente) anche nel punto $x = -4$
- l'insieme di convergenza é pertanto $E : [-4, 4)$

Si ha inoltre convergenza totale, quindi uniforme in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ con $-4 < \alpha < \beta < 4$.

5. Esercizio

Data la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!}$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *calcolare la somma $S(x)$ della serie.*

5.1. Soluzione.

Conosciamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

[2]Verificare derivando rispetto a k

Tenuto conto che $e^{kx} = (e^x)^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-e^x)^k}{k!}$$

si riconosce che la serie assegnata converge per ogni $x \in \mathbb{R}$
La sua somma é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{kx}}{k!} = e^{(e^x)}$$

Osservazione 5.1. *Riflettete sull'opportunitá di usare le parentesi nella scrittura del doppio esponenziale somma della serie....*

6. Esercizio

Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{kx}}{\sqrt{k}}$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *determinare l'insieme di convergenza assoluta,*
- *dire dove la serie non converge.*

6.1. Soluzione.

Come nell'esercizio precedente abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{kx}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2^x)^k}{\sqrt{k}}$$

Il criterio del rapporto applicato alla serie dei moduli conduce alla condizione di convergenza assoluta

$$2^x < 1 \quad \rightarrow \quad x < 0$$

Per $x > 0$ i termini della serie non sono infinitesimi e quindi per tali x la serie non converge.
Per $x = 0$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$$

serie che soddisfa il criterio di Leibnitz (pag. 317 delle Dispense) e pertanto converge.
Insieme di convergenza: $E : \, x \leq 0$
Convergenza assoluta: $F : \, x < 0$.

7. Esercizio

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} (\cos(x))^n.$$

Detta $S(x)$ la somma, calcolare

$$\int_0^{\pi/2} S(x) \sin x \, dx.$$

7.1. Soluzione.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} (\cos(x))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\cos(x)}{4}\right)^n$$

chiamato l'indice di somma

$$n+1 = m$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\cos(x)}{4}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{\cos(x)}{4}\right)^{m-1}$$

É del resto noto che

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m = \frac{1}{1-t} \quad \to \quad \sum_{m=1}^{\infty} m\, t^{m-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \forall t \in (-1,1)$$

La serie dell'esercizio é esattamente la $\sum_{m=1}^{\infty} m\, t^{m-1}$ con

$$t = \frac{\cos(x)}{4}$$

quantitá che appartiene a $[-4,4] \subset (-1,1)$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$: quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} (\cos(x))^n = \frac{1}{(1-\frac{\cos(x)}{4})^2}$$

L'integrale richiesto puó essere calcolato, con vantaggio, senza servirsi dell'espressione di $S(x)$ precedentemente trovata, ma integrando termine a termine

$$\int_0^{\pi/2} S(x) \sin x \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^n \sin(x) \, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} \left. \frac{-(\cos(x))^{n+1}}{n+1} \right|_0^{\pi/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$$

8. Esercizio

Trovare lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ *di* $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ *e calcolare* $f^{(8)}(0)$.

8.1. Soluzione.

Riesce

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^{k-1}$$

ovvero

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

Tenuto presente che, come la formula di Taylor insegna riesce anche

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f^{[2]}(0)x^2 + \frac{1}{3!} f^{[3]}(0)x^3 + ...$$

si ha

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad \frac{1}{2!} f^{[2]}(0) = 3, \quad \frac{1}{3!} f^{[3]}(0) = 4, ...$$

da cui

$$\frac{1}{8!} f^{[8]}(0) = 9 \quad \to \quad f^{[8]}(0) = 9.\, 8! = 9! = 362880$$

9. Esercizio

Integrare per serie l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = 2\,y + 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

9.1. Soluzione.

Cerchiamo la soluzione nella forma di una serie di potenze

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

La condizione di Cauchy

$$y(0) = 1 \quad \to \quad a_0 = 1$$

Per determinare gli altri coefficienti sostituiamo le espressioni

$$y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ..., \quad y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...$$

nell'equazione differenziale

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... = 2\left\{1 + a_1 x + a_2 x^2 + ...\right\} + 4$$

Uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x a primo e a secondo membro si ottiene

$$\begin{cases} a_1 = 2 + 4 \\ 2a_2 = 2a_1 \\ 3a_3 = 2a_2 \\ 4a_4 = 2a_3 \\ ..... \end{cases} \quad \to \quad a_1 = 6, a_2 = 6, a_3 = 4, a_4 = 2, ...$$

I coefficienti successivi si ricavano analogamente

$$k\, a_k = 2\, a_{k-1} \quad \to \quad \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{2}{k}$$

La serie possibile[3] é pertanto

$$y(x) = 1 + 6x + 6x^2 + 4x^3 + 2x^4 + ... \tag{26}$$

La convergenza, assoluta, della serie proposta si riconosce ricorrendo al criterio del rapporto

$$\frac{|a_k x^k|}{|a_{k-1} x^{k-1}|} = |x| \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| = |x| \frac{2}{k} \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 9.1. *Il problema di Cauchy assegnato poteva essere risolto direttamente cercando*

- *le soluzioni dell'omogenea* $y(x) = A\, e^{2x}$
- *una soluzione della completa* $\overline{y}(x) = -2$

[3]Dovremo ancora riconoscere che essa sia convergente in un intorno dell'origine...

- *pervenendo quindi alla soluzione*

$$y(x) = 3\,e^{2x} - 2 = 1 + 6x + 6x^2 + 4x^3 + 2x^4 + ...$$

...proprio la stessa serie che abbiamo dedotto sopra !

Parte 4

Le esercitazioni 2007/2008

CAPITOLO 23

Le soluzioni del foglio 1

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 1

28 settembre 2007

1. Esercizio

Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n^3+1}\right)}$$

Esaminiamo se la serie sia, o meno, assolutamente convergente:

$$|\sin(t)| \leq |t| \quad \to \quad \left|\sin\left(\frac{n}{n^3+1}\right)\right| \leq \left|\frac{n}{n^3+1}\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

$$\left|\frac{n}{n^3+1}\right| = \left|\frac{1}{n^2+1/n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Tenuto conto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente se ne deduce, per confronto, che anche la

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{n}{n^3+1}\right)\right|$$

é convergente e quindi che la serie inizialmente assegnata é convergente.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+q^k\right) \quad \text{con} \quad 0<q<1,}$$

Esaminiamo se la serie sia, o meno, assolutamente convergente:

$$\forall t \geq 0: \quad 0 \,\leq\, \log(1+t) \,\leq\, t, \quad \to \quad 0 \,\leq\, \log(1+q^k) \,\leq\, q^k$$

Tenuto conto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^n,\ 0 < q < 1$ é convergente se ne deduce, per confronto, che anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\ln\left(1+q^k\right)\right|$$

é convergente e quindi che la serie inizialmente assegnata é convergente.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\arctan(n^2)}{n^2+\arctan(n)}}$$

Tenuto conto che

$$\forall t \geq 0 \quad 0 \leq \arctan(t) \leq t$$

si ha

$$\frac{n+\arctan(n^2)}{n^2+\arctan(n)} \geq \frac{n}{n^2+\arctan(n)} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

Si riconosce quindi che la serie termini positivi assegnata ha addendi maggiori di quelli della serie armonica divergente $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{k}$, quindi la serie assegnata é divergente.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+\cos(k\pi)}{k^2}}$$

$$\frac{k+\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(k\pi)}{k^2} = \frac{1}{k}$$

La $\sum \dfrac{\cos(k\pi)}{k^2} = \sum \dfrac{(-1)^k}{k^2}$ é convergente: se la serie assegnata fosse convergente allora risulterebbe convergente anche la $\sum \dfrac{1}{k}$ che invece non lo é.
Quindi la serie assegnata non é convergente.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{k^3}}$$

$$\frac{k+2}{k^3} = \frac{1}{k^2} + 2\frac{1}{k^3}$$

Le serie di addendi indicati a secondo membro sono entrambe convergenti, quindi é convergente la serie assegnata.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{1/k}-1\right)^2}$$

Tenuto conto che

$$|e^{1/k} - 1| = |e^{1/k} - e^0| = \frac{1}{k}e^\tau \quad \tau \in (0,1)$$

e quindi

$$|e^{1/k} - 1| \leq e\,\frac{1}{k}$$

si ha

$$\left|\left(e^{1/k} - 1\right)^2\right| \leq e^2\frac{1}{k^2}$$

da cui, per confronto la convergenza assoluta della serie assegnata.

2. Esercizio

Determinare i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui le seguenti serie convergono:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^n,$$

e scriverne il valore della somma.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le tre serie assegnate sono tre serie geometriche costruite sulle tre *ragioni*

$$\frac{x}{1+x^2}, \quad \frac{2x}{1+x^2} \quad \frac{3x}{1+x^2}$$

Esse risultano convergenti in corrispondenza agli x per i quali tali ragioni sono in modulo minori di 1:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1,\, 1\}$$

$$\left|\frac{3x}{1+x^2}\right| < 1 \quad \forall x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \vee (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \vee (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$$

Le rispettive somme, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ sono

$$S_1(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2-x}, \quad S_2(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2-2x}, \quad S_3(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2-3x}$$

Osservazione 2.1. *Si puó riflettere sulle differenze che si incontrano, ad esempio nella seconda serie, tra punti singolari per quanto riguarda la convergenza della serie,* -1, $+1$, *e punti singolari della funzione somma*

$$S_2(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2-2x} = \frac{1+x^2}{(1-x)^2}$$

il solo punto 1.

3. Esercizio

Studiare, al variare di $\alpha > 0$, *la convergenza delle seguenti serie:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(k)\right)^{\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{\alpha}.$$

$\boxed{\text{Soluzione della prima:}}$

Il limite notevole

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\pi/2 - \arctan(t)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 1$$

permette di riconoscere che $\exists\, t_0 > 0$ tale che

$$\forall t > t_0 \quad |\pi/2 - \arctan(t)| \leq 2\,\frac{1}{t}$$

Ne segue

$$\forall k > t_0 \quad \left|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(k)\right)^{\alpha}\right| \leq 2^{\alpha}\,\frac{1}{k^{\alpha}}$$

Riconosciuto che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

é convergente per $\alpha > 1$ se ne deduce che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(k)\right)^{\alpha}$$

é assolutamente convergente, e quindi convergente, per $\alpha > 1$.

$\boxed{\text{Soluzione della seconda:}}$

$$|\sin(t)| \leq |t|, \quad |1-\cos(t)| \leq \frac{1}{2}t^2 \quad \to$$

$$\rightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)^\alpha \leq \frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{k^{3\alpha}}$$

Tenuto conto che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3\alpha}}$$

é convergente per $3\alpha > 1$ ne segue che la serie assegnata é assolutamente convergente, e quindi convergente, per

$$\alpha > \frac{1}{3}$$

4. Esercizio

Siano a_n e b_n due successioni a termini positivi.
(i) Dimostrare che, se b_n è convergente, vale l'implicazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \text{implica} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < +\infty.$$

(ii) *Trovare due successioni a_n e b_n, non negative, tali che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = +\infty.$$

$\boxed{\text{Soluzione della prima:}}$

Se $\{b_n\}$ é convergente allora é anche limita, $|b_n| < M$: ne segue quindi che

$$0 \leq a_n\, b_n \,\leq\, M\, a_n$$

e quindi, per confronto, dalla convergenza della $\sum a_n$ si deduce quella della $\sum a_n b_n$

$\boxed{\text{Soluzione della seconda:}}$

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = n$$

la serie $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ é convergente, la serie $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ non é convergente.

5. Esercizio

Usare il criterio di Cauchy, unito al criterio del confronto per decidere per quali α e β le serie seguente convergono

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n+2))^\beta} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n\ln(n)}{n^\alpha \ln(n+2))^\beta}$$

$\boxed{\text{Soluzione della prima:}}$

Tenuto conto del limite fondamentale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+2)}{n^\gamma} = 0, \quad \forall \gamma > 0$$

si riconosce che, per ogni $\gamma > 0$ esiste n_γ tale che

$$n > n_\gamma \quad \to \quad \ln(2) \le \ln(n+2) \le n^\gamma,$$

ovvero anche

$$n > n_\gamma \quad \to \quad \frac{1}{\ln(2)^\beta} \ge \frac{1}{\ln(n+2)^\beta} \ge \frac{1}{n^{\gamma\beta}}$$

come pure

$$n > n_\gamma \quad \to \quad \frac{1}{n^\alpha\ \ln(2)^\beta} \ge \frac{1}{n^\alpha\ \ln(n+2)^\beta} \ge \frac{1}{n^{\alpha+\gamma\beta}}$$

Ne segue, per confronto, che la serie assegnata

- é convergente per $\alpha > 1$ qualunque sia β
- non é convergente per $\alpha < 1$ qualunque sia β.

Il caso $\alpha = 1$ si puó risolvere con il *criterio di Cauchy*[1] che riconosce che la serie $\sum a_k$, a termini positivi e decrescenti a zero é convergente se e solo se lo é la serie

$$\sum 2^k\, a_{2^k}$$

Quindi, per la prima serie basta studiare la

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k(\ln(2^k+2))^\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2^k+2))^\beta}$$

Tenuto conto che

$$\ln(2^k+2) > \ln(2^k) = k\ln(2) \quad \to \quad \frac{1}{(\ln(2^k+2))^\beta} < \frac{1}{\ln(2)^\beta\, k^\beta}$$

[1] Vedi Dispense, pag.11, Teorema 2.11

Si riconosce che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2^k+2))^\beta}$$

é assolutamente convergente per $\beta > 1$

$\boxed{\text{Soluzione della seconda:}}$

$$\frac{n^2 + n\ln(n)}{n^\alpha \ln(n+2))^\beta} = \frac{1 + \ln(n)/n}{n^{\alpha-2}\ln(n+2))^\beta}$$

Tenuto presente che

$$0 \leq \ln(n)/n \leq 1$$

si ha

$$\frac{1}{n^{\alpha-2}\ln(n+2))^\beta} \leq \frac{n^2 + n\ln(n)}{n^\alpha \ln(n+2))^\beta} \leq 2\frac{1}{n^{\alpha-2}\ln(n+2))^\beta}$$

Quindi i valori α, β per i quali la seconda serie assegnata converge si deducono da quelli della prima,

- é convergente per $\alpha > 3$ qualunque sia β
- non é convergente per $\alpha < 3$ qualunque sia β,
- é convergente per $\alpha = 3$ se $\beta > 1$

6. Esercizio

Studiare la convergenza delle seguenti serie per $a, b \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k + k^a}{b^k + k^b}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k + b^k}{k^a + k^b}.$$

$\boxed{\text{Soluzione della prima:}}$

- Se $b = 1, a \geq 1$

  $$\frac{a^k + k^a}{b^k + k^b} = \frac{a^k + k^a}{1+k} \geq \frac{1}{1+k}$$

  per confronto si riconosce che la serie non é convergente.

- Se $b > 1, a = 1$

$$\frac{a^k + k^a}{b^k + k^b} = \frac{1+k}{b^k + k^b} \leq \frac{1+k}{b^k} = (1+k)\,\left(\frac{1}{b}\right)^k$$

L'ultima serie maggiorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+k)\,\left(\frac{1}{b}\right)^k$$

é convergente (lo si riconosce col criterio del rapporto).
Quindi, per $b > 1, a = 1$, é convergente anche la serie assegnata.

- Se $a > 1, b > 1$

$$\frac{a^k + k^a}{b^k + k^b} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{1 + \dfrac{k^a}{a^k}}{1 + \dfrac{k^b}{b^k}}\right)$$

Tenuto presente che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 + \dfrac{k^a}{a^k}}{1 + \dfrac{k^b}{b^k}} = 1$$

si riconosce che, da un conveniente k_0 in poi riesce

$$\frac{1}{2}\,\left(\frac{a}{b}\right)^k \leq \frac{a^k + k^a}{b^k + k^b} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

e quindi la serie assegnata converge se e solo se

$$a < b$$

$\boxed{\text{Soluzione della seconda:}}$

- Se $a = b = 1$ riesce

$$\frac{a^k + b^k}{k^a + k^b} = \frac{1}{k}$$

serie divergente.

- Se $a > 1, b = 1$ riesce

$$\frac{a^k + b^k}{k^a + k^b} = \frac{a^k}{k^a + k} + \frac{1}{k^a + k} \geq \frac{a^k}{2k^a} + \frac{1}{k^a + k}$$

Tenuto presente che, per $a > 1$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k^a}$$

é divergente (vedi criterio del rapporto) si riconosce che, per $a > 1, b = 1$, la serie assegnata é divergente.

- Il caso $a = 1, b > 1$ é naturalmente analogo al precedente, e quindi anche per $a = 1, b > 1$ la serie assegnata é divergente.
- Se $a > 1$, $b > 1$ i termini stessi della serie non sono infinitesimi: detto

$$1 < m = \min(a, b), \quad M = \max(a, b)$$

riesce infatti

$$\frac{a^k + b^k}{k^a + k^b} \geq \frac{m^k}{k^M}$$

termini questi ultimi divergenti a $+\infty$.
Quindi per $a > 1$, $b > 1$ la serie assegnata é divergente.

Se ne conclude che la serie assegnata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k + b^k}{k^a + k^b}$$

é divergente per ogni scelta di $a \geq 1$, $b \geq 1$.

7. Esercizio

Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k\, k!}{k^k}.$$

Soluzione della prima:

$$\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{k^2}$$

Tenuto conto che la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ é convergente se ne deduce, per confronto, che é convergente anche la serie assegnata.

Soluzione della seconda:

Servendosi del Criterio del rapporto

$$\frac{\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{2^k}{k!}} = \frac{2}{k+1} \quad \to \quad 0$$

si riconosce che la serie assegnata é convergente: é del resto dimostrabile che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 1$$

$\boxed{\text{Soluzione della terza:}}$

Servendosi del Criterio del rapporto

$$\frac{\dfrac{2^{k+1}\,(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\dfrac{2^k\,k!}{k^k}} = \frac{2(k+1)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \quad \to \quad +\infty$$

si riconosce pertanto che la serie é divergente.

8. Esercizio

Studiare, al variare di $x \geq 0$, la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k}\,x^k\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^2}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^k\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}\,x^k\,.$$

$\boxed{\text{Soluzione della prima:}}$

Servendosi del Criterio del rapporto relativamente alla serie dei valori assoluti si ha

$$\frac{\dfrac{3^{k+1}}{k+1}\,|x|^{k+1}}{\dfrac{3^k}{k}\,|x|^k} = 3|x|\frac{k}{k+1} \quad \to \quad 3|x|$$

e quindi si riconosce che la serie dei valori assoluti converge se

$$3|x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

In tale intervallo la serie assegnata é convergente.

Per $3|x| > 1$ i termini della serie assegnata non sono una successione infinitesima: pertanto per $3|x| > 1$ la serie assegnata non é convergente (questo non significa che sia divergente).

Il caso $3|x| = 1$:

- $$x = -1/3 \quad \to \quad \frac{3^k}{k}\,x^k = \frac{(-1)^k}{k}$$
  serie a segni alterni, convergente per il Criterio di Leibnitz.
- $$x = 1/3 \quad \to \quad \frac{3^k}{k}\,x^k = \frac{1}{k}$$
  serie armonica, divergente.

$\boxed{\text{Soluzione della seconda:}}$

Servendosi del Criterio del rapporto relativamente alla serie dei valori assoluti si ha

$$\frac{\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)^2}\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|^{k+1}}{\dfrac{2^k}{k^2}\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|^k} = 2\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2} \quad \to \quad 2\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$$

Pertanto

- Se $2\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right| < 1$ la serie converge assolutamente, quindi converge,
- Se $2\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right| > 1$ i termini della serie non sono infinitesimi quindi la serie non é convergente (questo non significa che sia divergente),
- Se $2\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right| = 1$ la serie si riduce alla serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{k^2}, \quad \alpha = 2$ che é convergente.

$\boxed{\text{Soluzione della terza:}}$

Servendosi del Criterio del rapporto relativamente alla serie dei valori assoluti si ha

$$\frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\,|x|^{k+1}}{\dfrac{k^k}{k!}\,|x|^k} = \frac{|x|}{k+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}(k+1) \quad \to \quad |x|\,e$$

da cui si riconosce che la serie converge assolutamente, quindi converge, per ogni

$$|x| < \frac{1}{e}$$

e non converge per tutti gli

$$|x| > \frac{1}{e}$$

Non abbiamo strumenti adeguati per decidere sulla convergenza, o meno nei due punti $\pm\frac{1}{e}$.

OSSERVAZIONE 8.1. **GnuPlot per le serie**
L'esempio seguente mostra come servirsi di GnuPlot per studiare le prime 10 somme parziali della serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-0.9)^k$.

```
gnuplot> a(x) = (-0.9)**floor(x)
gnuplot> s(x) = (x<0 ? 0 : s(x-1) + a(x))
gnuplot> set xrange [0:10]
gnuplot> set yrange [-4:4]
gnuplot> plot 0, a(x), s(x) with boxes
```

Si noti l'espressione ricorsiva, accettata da GnuPlot, con cui definire le somme parziali `s(x) = (x<0 ? 0 : s(x-1) + a(x))`

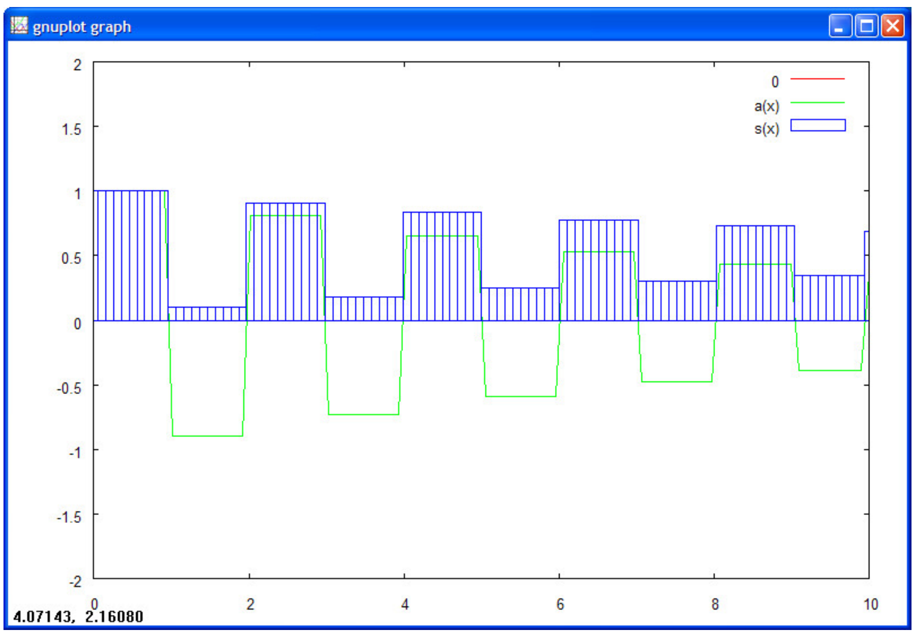


FIGURA 1. $\sum_{k=0}^{n}(-0.9)^k$, $n = 0, ..., 10$

Osservazione 8.2. **QBasic per le serie**

Calcolare le somme parziali $\sum_{k=1}^{n}(-0.9)^k$ *con QBasic.*

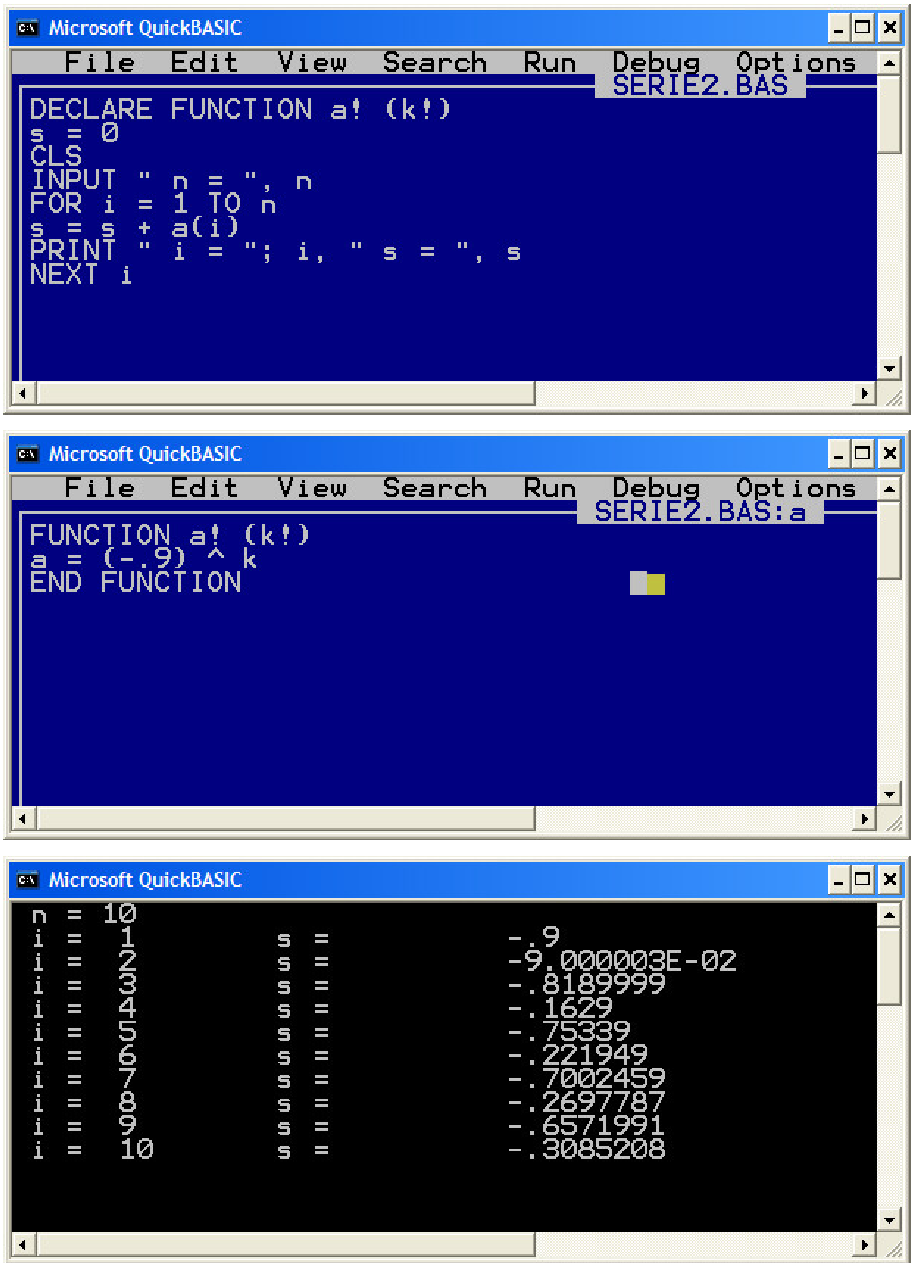


Figura 2. $\sum_{k=1}^{n}(-0.9)^k$,

CAPITOLO 24

Le soluzioni del foglio 2

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 2

12 ottobre 2007

1. Esercizio

Dato $\alpha > 0$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha - 1} \right)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$0 \leq \sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha - 1} = \frac{2}{\sqrt{n^\alpha + 1} + \sqrt{n^\alpha - 1}} \leq \frac{2}{n^{\alpha/2}}$$

Pertanto se $\alpha > 2$ la serie assegnata é dominata dalla

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

convergente, quindi é essa stessa convergente per confronto.

Il caso $\alpha = 2$:

Consideriamo l'espressione (esatta)

$$\frac{2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

Tenuto conto che

$$0 \leq \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} \leq 2\sqrt{n^2 + 1} \leq 2\sqrt{2n^2} = 2\sqrt{2}n$$

si riconosce che

$$\frac{2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \geq \frac{2}{2\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n}$$

e quindi, per confronto, si riconosce che la serie assegnata, per $\alpha = 2$ é divergente.

Osservazione 1.1. *Ricordiamo la importante approssimazione*

$$\sqrt{1+x} \;\approx\; 1+\frac{x}{2}$$

tanto piú affidabile quanto piú $x \;\approx\; 0$ *e serviamocene per i termini della serie:*

- *uso naif*

  $$\sqrt{n^\alpha+1} \approx 1+\frac{n^\alpha}{2}$$

  poco serio: l'approssimazione sarebbe buona se $n^\alpha \;\approx\; 0$ *cosa tutt'altro che vera:* $n \to \infty$....
- *uso piú saggio*

  $$\sqrt{n^\alpha+1} = n^{\alpha/2}\sqrt{1+n^{-\alpha}} \;\approx\; n^{\alpha/2}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2}\right)$$
  $$\sqrt{n^\alpha-1} = n^{\alpha/2}\sqrt{1-n^{-\alpha}} \;\approx\; n^{\alpha/2}\left(1-\frac{n^{-\alpha}}{2}\right)$$

  da cui

  $$\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1} \;\approx\; n^{-\alpha/2}$$
- *era quindi ragionevole attendersi la condizione*

  $$\frac{\alpha}{2}>1 \quad\to\quad \alpha>2$$

  e la non convergenza se $\alpha=2$.

2. Esercizio

Dimostrare che

- *per ogni* $p>1$, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$ *implica* $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$,
- *se* $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2<+\infty$, *allora* $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nb_n|<+\infty$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $$|x|\le 1,\; p>1 \quad\to\quad |x|^p\le|x|$$

  Tenuto conto che, essendo $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < +\infty$ da un certo n_0 in poi riesce $|a_n|\le 1$ ne segue che

  $$|a_n|^p\le|a_n| \quad\to\quad \sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|^p\le\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$$

- $$2|a_n\, b_n| \le a_n^2 + b_n^2 \quad \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2\right)$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Attenzione: il viceversa, o il caso $p < 1$, non sono veri:*

- $\sum \frac{1}{n}$ *non é convergente mentre* $\sum \frac{1}{n^2}$ *lo é.*
- *se* $\{a_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0...\}$ *e* $\{b_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ *la successione* $\{a_n b_n\} = \{0, 0, 0, ...\}$ *produce naturalmente una serie* $\sum a_n b_n$ *convergente mentre le due serie* $\sum a_n^2$ *e* $\sum b_n^2$ *non lo sono affatto...!*

3. Esercizio

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *una serie assolutamente convergente.*
Dimostrare che anche le seguenti serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1 + a_k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2}{1 + a_k^2},$$

sono assolutamente convergenti (per la prima, si suppone in più $a_k \neq -1$ *per ogni* k*).*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Essendo $\sum |a_k|$ convergente riesce, da un certo k_0 in poi $|a_k| < 1/2$, quindi riesce anche, da tale k_0 in poi

$$\left|\frac{a_k}{1 + a_k}\right| \le \frac{|a_k|}{1 - 1/2} = 2|a_k|$$

e quindi

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left|\frac{a_k}{1 + a_k}\right| \le 2 \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$$

e quindi la assoluta convergenza della prima delle due serie assegnate. La convergenza (assoluta) della seconda deriva, con lo stesso ragionamento della prima tenendo conto che se $\sum |a_k| < \infty$ allora, di conseguenza[1] anche $\sum |a_k|^2 < \infty$

[1] Vedi Esercizio n.2, precedente, il caso $p = 2$

4. Esercizio

Dire se le funzioni

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \qquad \frac{e^x-1}{x^2}, \qquad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[0,1]$ *e* $(0,+\infty)$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

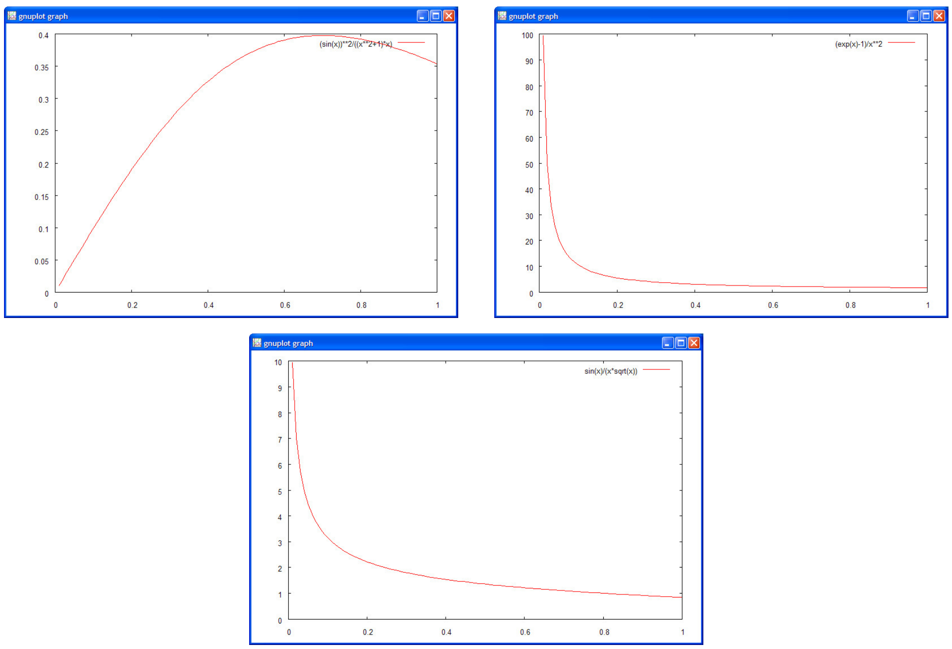


FIGURA 1. Grafici su $[0,1]$ delle tre funzioni assegnate nell'ordine.

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}$$

- é continua, cioé ammette limite per $x \to 0^+$
- quindi esiste l'integrale improprio su $(0,1]$.
- é dominata da
$$\left|\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$
per $x \in (0,+\infty)$
- quindi esiste l'integrale improprio su $(0,+\infty]$.

$$\frac{e^x - 1}{x^2}$$

- non ammette limite, cioé diverge, per $x \to 0^+$
- non esiste l'integrale improprio su $(0, 1]$ perché
$$\frac{e^x - 1}{x^2} > \frac{1}{x}$$
- poiché giá sappiamo che non esiste l'integrale improprio su $(0, 1]$ evidentemente non esiste neanche quello su $(0, +\infty)$.

$$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

- é dominata per $x \in (0, 1]$ da
$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$
- tenuto conto che $1/\sqrt{x}$ é integrabile in $(0, 1]$ ne segue che esiste l'integrale improprio della funzione assegnata su $(0, 1]$.
- é dominata da
$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$
- tenuto conto che $1/|x|^{3/2}$ é integrabile in $(1, +\infty]$ ne segue che esiste l'integrale improprio della funzione assegnata su $(0, +\infty]$.

5. Esercizio

Stabilire quale dei seguenti integrali impropri converge

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int_0^1 \ln x\, dx, \qquad \int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

e calcolare il valore di quelli esistenti.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $$\left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| = \frac{|x|}{|1+x|^{1/2}} \frac{1}{|1-x|^{1/2}} \leq \frac{1}{|1-x|^{1/2}}$$

  Tenuto presente che $1/|1-x|^{1/2}$ é integrabile in $[0, 1)$ tale sará anche la funzione assegnata.

Riesce, vedi Figura 2,

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} = 1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}$$

Da cui

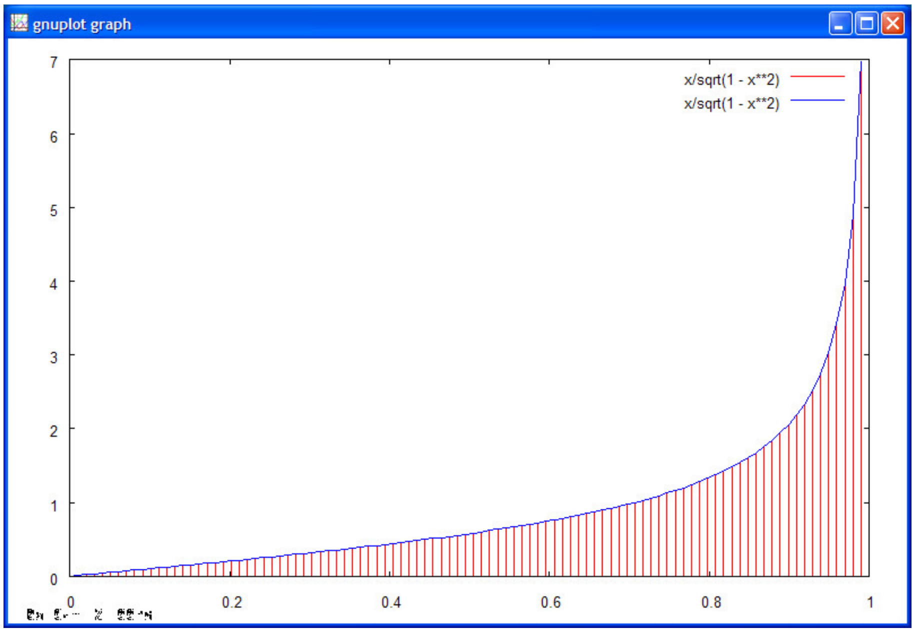


FIGURA 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}\right\} = 1$$

- $$\left|\frac{1}{\sin(x)}\right|$$

  Tenuto conto che

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad\to\quad \frac{1}{2}x \le \sin(x) \le 2x \quad\to\quad \frac{2}{x} \ge \frac{1}{\sin(x)} \ge \frac{1}{2x}$$

  e tenuto conto che la minorante $1/2x$ ha integrale divergente su $(0,1]$ ne segue che anche la funzione assegnata non sará integrabile in $(0,1]$.

- $$\ln(x)$$

Tenuto conto che

$$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

segue che

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists x_\alpha \quad \to \quad x < x_\alpha \quad \to \quad |\ln(x)| \leq \frac{1}{|x|^\alpha}$$

quindi $\ln(x)$ é integrabile, vedi Figura 3, assolutamente su $(0, 1]$ per confronto.

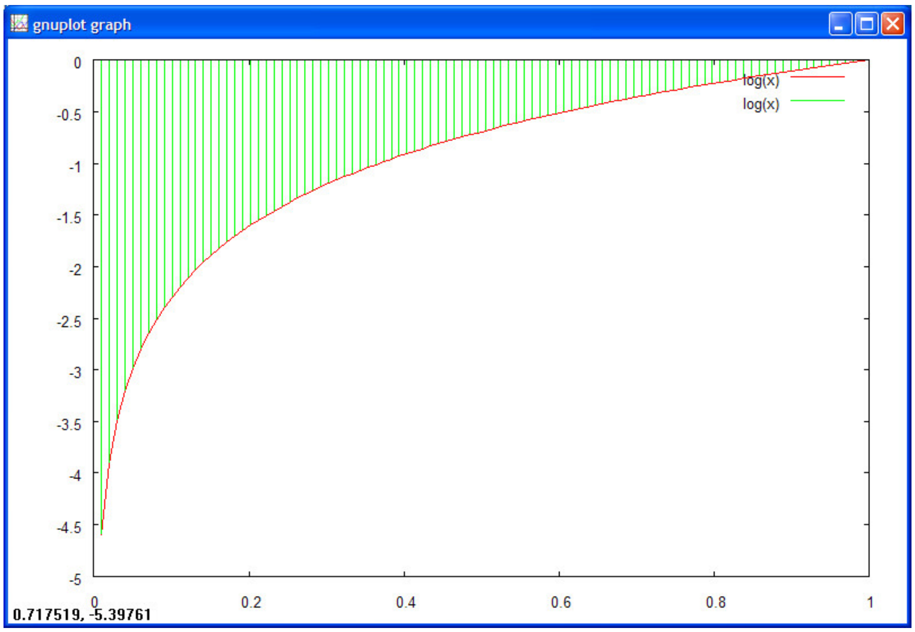


FIGURA 3. $\int_0^1 \ln(x)\,dx = 1$

$$\int_\varepsilon^1 \ln(x)dx = x(\ln(x) - x)|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon(\ln(\varepsilon) + \varepsilon$$

da cui, passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha

$$\int_0^1 \ln(x)dx = -1$$

- $$\frac{\ln(x)}{x}$$

Tenuto conto che

$$\forall x \geq e \quad \to \quad \frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$$

e tenuto conto che $1/x$ non é integrabile in $[2, \infty)$ si riconosce, per confronto, che neanche la funzione assegnata é integrabile in $[2, \infty)$.

6. Esercizio

Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con integrale improprio assolutamente convergente. Dimostrare che, se f è limitata, allora anche f^2 è integrabile in senso improprio.

SOLUZIONE:

$$|f(x)| \leq M \quad \to \quad f^2(x) \leq M|f(x)|$$

da cui essendo $f^2(x)$ dominata da una funzione integrabile é essa stessa integrabile,

$$\int_0^\infty f^2(x)\, dx \leq M \int_0^\infty |f(x)|\, dx$$

7. Esercizio

Siano $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che f^2 e g^2 sono integrabili in senso improprio. Dimostrare che fg ha integrale improprio assolutamente convergente.

SOLUZIONE:

$$2|f(x)\, g(x)| \leq f^2(x) + g^2(x) \quad \to$$

$$\int_0^\infty |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f^2(x)\, dx + \int_0^\infty g^2(x)\, dx\right)$$

8. Esercizio

Dire per quali valori di $\alpha > 0$ esistono finiti gli integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1 + \ln^2 x)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^\alpha}\, dx.$$

SOLUZIONE PRIMO INTEGRALE:

Tenuto conto che

$$\forall \gamma > 0\ \exists x_\gamma \quad x > x_\gamma \quad \to \quad \ln(x) < x^\gamma$$

si ha, per $x > x_\gamma$,

$$x^\alpha(1+\ln^2(x)) \le x^\alpha(1+x^{2\gamma}) \le 2x^{\alpha+2\gamma}$$

da cui, passando ai reciproci

$$\frac{1}{x^\alpha(1+\ln^2(x))} \ge \frac{1}{2x^{\alpha+2\gamma}}$$

Se $\alpha < 1$ allora é possibile scegliere γ tale che

$$\alpha + 2\gamma < 1$$

e quindi

$$\frac{1}{2x^{\alpha+2\gamma}}$$

non é integrabile in $[1,+\infty)$: e di conseguenza, per confronto, non é integrabile neanche la funzione assegnata.
Tenuto conto inoltre che

$$\frac{1}{x^\alpha(1+\ln^2(x))} \le \frac{1}{x^\alpha}$$

ne segue che se $\alpha > 1$ la funzione assegnata é, per confronto, integrabile in $[1,+\infty)$.
Il caso $\alpha = 1$ da luogo ad un intdegrale improprio convergente come si riconosce dal calcolo esplicito

$$\int_1^L \frac{1}{x\,(1+\ln^2(x))}\,dx = \arctan\left(\ln(x)\right)\Big|_1^L = \arctan(\ln(L)) \quad \to \quad \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{Soluzione secondo integrale:}}$

Per quanto concerne gli $x \to +\infty$ si ha $\ln(1+1/x^2) \le 1/x^2$ da cui

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^{\alpha+2}}$$

e quindi l'integrabilitá in $[1,+\infty)$ se $\alpha+2>1 \Leftrightarrow \alpha > -1$
Per quanto concerne gli $x \to 0^+$ si ha invece

$$\forall \gamma > 0 \quad \lim_{x\to 0} x^\gamma \ln(1+1/x^2) = 0 \quad \to \quad \ln(1+1/x^2) \le \frac{1}{x^\gamma}$$

Ne segue che

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^{\alpha+\gamma}}$$

maggiorazione che implica l'integrabilitá se $\alpha+\gamma<1 \Leftrightarrow \alpha<1$
Riassumendo l'integrale improprio é convergente per

$$-1 < \alpha < 1$$

9. Esercizio

Sapendo che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Suggerimento: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, risolvere nell'ordine assegnato.

$\boxed{\text{Soluzione primo integrale:}}$

Non é ovvio che l'integrale richiesto, quello relativo a $\sin x \cos x$, esista perché la funzione integranda non é dominata dalle tradizionali $1/x^\alpha$ con $\alpha > 1$.
Eseguiamo il conto direttamente:

$$\int_0^L \frac{\sin x \cos x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\sin(2x)}{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Ne segue che

$$\lim_{L\to+\infty} \int_0^L \frac{\sin x \cos x}{x}\, dx = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{Soluzione secondo integrale:}}$

É ovvio che l'integrale improprio richiesto converge assolutamente:

- per $x \to 0^+$ la funzione si prolunga per continuitá,
- per $x \to \infty$ é dominata dalla $1/x^2$ che ha integrale improprio assolutamente convergente.

Eseguiamo i conti esplicitamente: in qualunque intervallo $(a, b) \subset (0, +\infty)$ si ha

$$\int_a^b \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \int_a^b \sin^2(x) \left(-\frac{1}{x}\right)' dx =$$
$$= -\sin^2(x)\,\frac{1}{x}\Big|_a^b + 2\int_a^b \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}\, dx$$

Passando al limite per $a \to 0^+$, $\quad b \to +\infty$ tenuto conto che

$$|\sin(x)| \le \sin^2(x)\,\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}$$

si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\, \cos(x)}{x} dx$$

da cui il risultato tenuto conto che l'integrale improprio a secondo membro é stato giá calcolato.

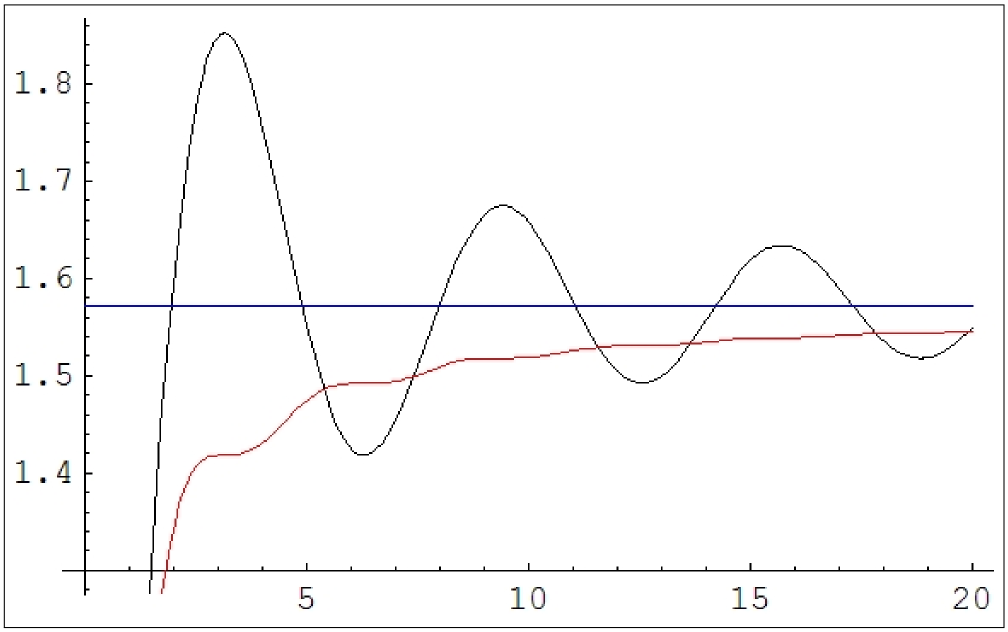


FIGURA 4. $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt, \quad \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$

In Figura 4 sono riportati i grafici dei due integrali

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt, \quad \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$

come funzioni dell'estremo superiore di integrazione: in nero il primo, in colore il secondo, la retta orizzontale rappresenta il valore $\pi/2$.
Si vede bene come il secondo integrale approssimi il valore limite in modo monotono e molto piú rapido del primo.
Il primo integrale non é assolutamente convergente, il secondo (quello con i quadrati) si.

OSSERVAZIONE 9.1. *Ci sono molti casi di funzioni $f(x)$ tali che su uno stesso intervallo I riesca*

$$\int_I f(x)dx = \int_I f^2(x)dx$$

oltre naturalmente i casi (banali) di $f(x) \equiv 0 \quad o \; f(x) \equiv 1 \quad ?$

10. Esercizio

Dimostrare che

- $$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx=0.$$
- *se* $f : [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *é integrabile in senso improprio riesce*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,dx=0.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

É chiaro che rispondendo alla seconda domanda si risponde sostanzialmente anche alla prima.

$$\left|\frac{\arctan x}{x^3}\right|\le\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{|x|^3}$$

ha integrale improprio assolutamente convergente in $[1,+\infty)$, quindi

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\int_1^n\frac{\arctan x}{x^3}\,dx=S$$

Del resto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx-\lim_{n\to+\infty}\int_1^n\frac{\arctan x}{x^3}\,dx=0$$

Il fatto che i precedenti conti siano riferiti alla $\dfrac{\arctan x}{x^3}$ o ad altra funzione dotata di integrale improprio convergente in $[0,+\infty)$ non cambia nulla.

Osservazione 10.1. *Il fatto che*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx=0.$$

é del tutto ovvio tenuto conto che

$$|\arctan(x)|\le\frac{\pi}{2},\quad\forall x\in[n,n+1]\quad\to\quad\frac{1}{x^3}\le\frac{1}{n^3}$$

da cui

$$\left|\int_n^{n+1}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx\right|\le\frac{\pi}{2n^3}\int_n^{n+1}dx=\frac{\pi}{2n^3}\quad\to\quad 0$$

11. Esercizio

Dimostrare che la funzione $x^\beta e^{-x}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1, +\infty)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolare l'integrale per $\beta = 0, 1, 2$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Ricordata la definizione della funzione Gamma, vedi Dispense pag. 37,o http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1}\, dy$$

La funzione $\Gamma(x)$ é inclusa in GnuPlot col nome *gamma*
Si riconosce che l'integrale proposto é strettamente legato alla funzione Γ: anzi per ogni $t \geq 0$ l'integrale

$$\int_t^{+\infty} e^{-y}\, y^{x-1}\, dy$$

ha, in letteratura, il nome $\Gamma(x, t)$ detta anche *funzione Gamma incompleta*[2].
Con tal nome si ha

$$\int_1^{+\infty} x^\beta\, e^{-x}\, dx = \Gamma(x+1, 1)$$

Perché $x^\beta e^{-x}$ sia integrabile in $(1, +\infty)$ é sufficiente che si smorzi come

$$\frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

cosa che effettivamente accade,. per merito del fattore e^{-x} qualunque sia β.
Gli integrali richiesti si calcolano agevolmente per parti:

$$\int_1^L x^n\, e^{-x}\, dx = -x^n\, e^{-x}\Big|_1^L + n\int_1^L x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

da cui, passando al limite su L si ottiene

$$\int_1^{+\infty} x^n\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{e} + n\int_1^{+\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

da cui segue, ricorsivamente,

[2]Attenzione GnuPlot include anche una *igamma* che non é tuttavia la funzione gamma incompleta

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

$$\int_1^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{2}{e}$$

$$\int_1^{+\infty} x^2\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + 2\int_1^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx = \frac{5}{e}$$

12. Esercizio

Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^\beta x}\,dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il calcolo esplicito degli integrali

$$\int_2^L \frac{1}{x\log^\beta(x)}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\log^{1-\beta} L}{1-\beta} - \dfrac{\log^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \textit{se} \quad \beta \neq 1 \\[2ex] \log(\log(L)) - \log(\log(2)) & \textit{se} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

permette di riconoscere, vedi Figura 5, che l'integrale improprio richiesto esiste solo se $\beta > 1$.

13. Esercizio

Dire se la funzione $\log(x^2+y^2)$ *è integrabile in senso improprio nell'insieme* $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 < 1\}$.
Se integrabile, calcolare esplicitamente tale integrale improprio.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'esistenza (o meno) dell'integrale improprio richiesto corrisponde all'esistenza (o meno) del seguente limite

$$\lim_{r\to 0^+} \iint_{C(r,1)} \log(x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad C(r,1):\; r^2 \leq x^2+y^2 \leq 1$$

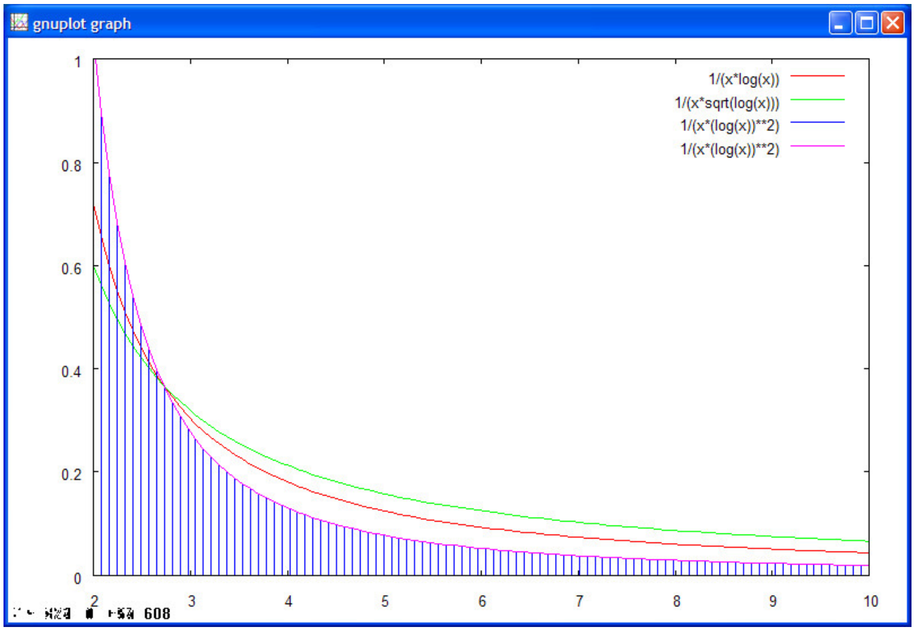


FIGURA 5. $\int_2^L \frac{1}{x \log^\beta(x)}\, dx, \quad \beta = 1/2, 1, 2$

Servendosi delle coordinate polari l'integrale doppio sulla corona $C(r, 1)$ diventa

$$\int_0^{2\pi} d\,\theta \int_r^1 \log(\rho^2)\,\rho\, d\,\rho = 4\pi \int_r^1 \log(\rho)\rho d\rho$$

Tenuto presente che la funzione integranda $\rho\,\log(\rho)$ è limitata in $(0, 1]$ l'integrale improprio esiste certamente.
Esso rappresenta il volume con segno del pozzo circolare, vedi Figura 6, profondissimo ma sempre piú stretto, le cui pareti sono il grafico della funzione di due variabili $\log(x^2 + y^2)$, negativa per $x^2 + y^2 <$.
Il conto esplicito, integrando per parti,

$$\lim_{r\to 0} \int_r^1 \rho\,\log(\rho)\,d\rho = -\frac{1}{4}$$

da cui

$$\iint \log(x^2 + y^2)\,dx\,dy = -\pi$$

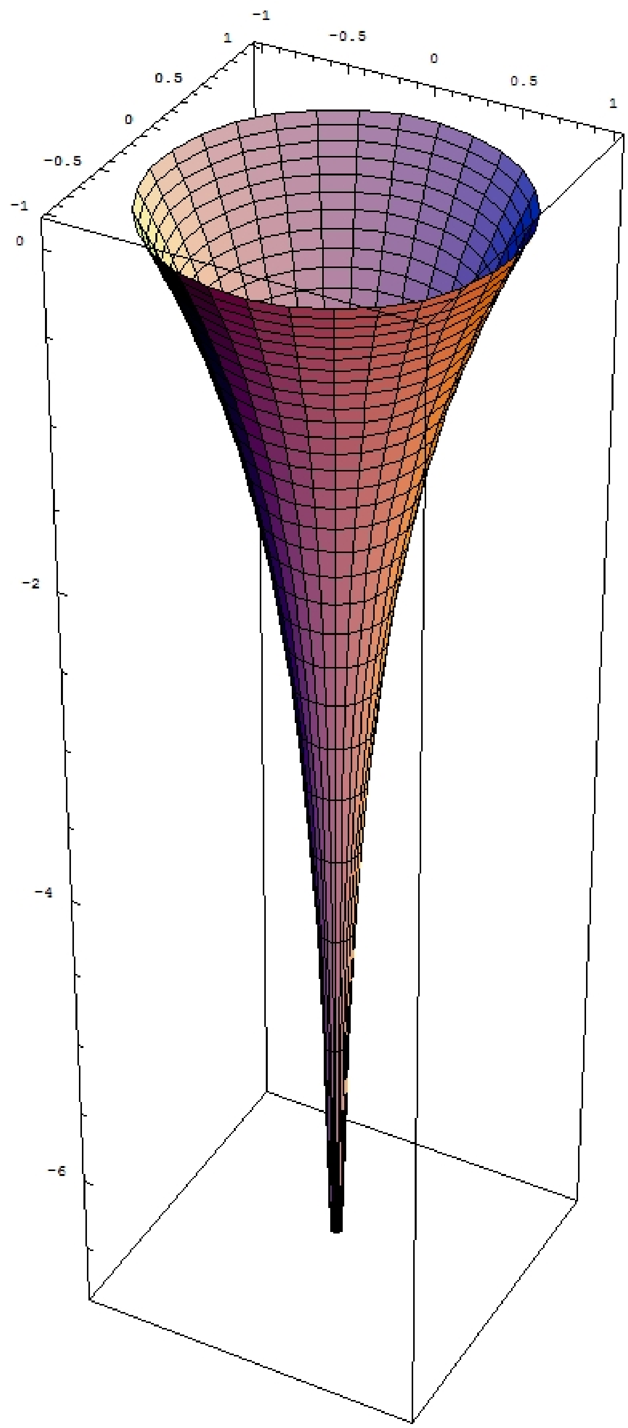


FIGURA 6. Il volume del pozzo di grafico $\log(x^2 + y^2)$

14. Esercizio

Dire per quali β esiste l'integrale doppio improprio

$$\int\int_C \frac{(x-y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}, \quad B = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

e, per i β possibili, calcolare l'integrale.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Servendosi delle coordinate polari si arriva all'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{\rho^3(\cos(\theta)-\sin(\theta))^3}{\rho^{2\beta}} \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)-\sin(\theta))^3 \, d\theta \int_r^1 \rho^{4-2\beta} \, d\rho$$

É evidente che l'integrale improprio, il limite per $r \to 0$, esiste se e solo se

$$4 - 2\beta > -1 \quad \to \quad \beta < \frac{5}{2}$$

15. Esercizio

Sia $f(x,y) = e^{-x^2-4y^2}$ definita su $\mathbb{R}^2$.

- *calcolare l'integrale*

$$\iint_{E_M} f(x,y)dxdy$$

  essendo E_M la regione delimitata dall'ellisse $x^2+4y^2 \leq M^2$
- *riconoscere che $f(x,y)$ soddisfa la condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale esteso a tutto $\mathbb{R}^2$*
- *determinare il valore di*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Posto

$$x = \rho\,\cos(\theta), \quad y = \frac{1}{2}\rho\sin(\theta)$$

piccola modifica delle ordinarie coordinate polari a jacobiano

$$J = \frac{1}{2}\rho$$

si ottiene

$$\iint_{x^2+4y^2\le M^2} e^{-x^2-4y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^M e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-M^2}\right)$$

L'esistenza dell'integrale improprio esteso a $\mathbb{R}^2$ equivale all'esistenza del limite del valore trovato per $M\to\infty$, limite che vale ovviamente $\pi/2$.

16. Esercizio

Sia

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}$$

definita su $\mathbb{R}^3$*. Sia* $C(r,R)\equiv\{(x,y,z)\,:\,r\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le R\}$*: calcolare per ogni* α *e* $r<1<R$ *gli integrali*

$$\iiint_{C(r,1)} f(x,y,z)dxdydz, \qquad \iiint_{C(1,R)} f(x,y,z)dxdydz.$$

Discutere l'integrabilità impropria in $C(0,1)$ *e in* $C(1,+\infty)$ *al variare di* α*.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Lo strumento naturale per calcolare gli integrali sulle sfere di $\mathbb{R}^3$ di centro l'origine e raggio r sono le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x=\rho\,\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y=\rho\,\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z=\rho\,\cos(\phi)\end{cases} \qquad (\rho,\psi,\theta)\in[o,r]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

con jacobiano $|J|=\rho^2\,\sin(\psi)$.
Riesce pertanto

$$\iiint_{C(r,1)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin(\psi)\,d\psi \int_r^1 \rho^{2-2\alpha}\,d\rho =$$

$$= 4\pi\int_r^1 \rho^{2-2\alpha}\,d\rho = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}(1-r^{3-2\alpha}) & \text{se}\quad 2-2\alpha\neq-1 \\[2ex] -4\pi\log(r) & \text{se}\quad 2-2\alpha=-1\end{cases}$$

Analogamente

$$\iiint_{C(1,R)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}(R^{3-2\alpha}-1) & \text{se}\quad 2-2\alpha\neq-1 \\[2ex] 4\pi\log(R) & \text{se}\quad 2-2\alpha=-1\end{cases}$$

L'integrabilitá, impropria, in $C(0,1)$ corrisponde all'esistenza del limite, per $r \to 0^+$ degli integrali su $C(r,1)$ e quindi l'esistenza del limite

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{4\pi}{3-2\alpha}(1-r^{3-2\alpha}) = \frac{4\pi}{3-2\alpha}$$

esistenza garantita se e solo se $3-2\alpha > 0 \quad \to \quad \alpha < 3/2$.
Analogamente l'integrabilitá, impropria, in $C(1,+\infty)$ corrisponde all'esistenza del limite, per $R \to +\infty$ degli integrali su $C(1,R)$ e quindi l'esistenza del limite

$$\lim_{R\to +\infty} \frac{4\pi}{3-2\alpha}(R^{3-2\alpha}-1) = -\frac{4\pi}{3-2\alpha}$$

esistenza garantita se e solo se $3-2\alpha < 0 \quad \to \quad \alpha > 3/2$.

CAPITOLO 25

Le soluzioni del foglio 3

ANALISI VETTORIALE
2007-2008
Soluzioni Foglio 3
19 ottobre 2007

1. Esercizio

Determinate il limite puntuale $f(x)$ delle seguenti successioni di funzioni[1]*:*

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x), \qquad f_n(x) = \chi_{[0,n]} - \chi_{[-n,0)},, \qquad f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}(x).$$

Controllate in quali casi l'affermazione

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

è vera, falsa o priva di senso.

SOLUZIONE:

$$\begin{array}{lll} \chi_{[n,n+1]}(x) & \to & 0 \\ \chi_{[0,n]} - \chi_{[-n,0)} & \to & H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \\ n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}(x) & \to & 0 \end{array}$$

OSSERVAZIONE 1.1. *La funzione $H(x)$ indicata precedentemente é il capostipite delle funzioni discontinue in un punto (e regolarissime, addirittura costanti, altrove). A funzioni di tale tipo viene spesso dato il nome di funzioni di Heaviside*[2]*, dal nome di un illustre fisico di fine 800 che ne fece ampio uso.*

[1] Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, il simbolo χ_E denota la funzione

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

detta spesso *funzione caratteristica di E.*

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Heaviside_step_function

2. Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della successione $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *rappresentata in figura 1 e calcolare*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

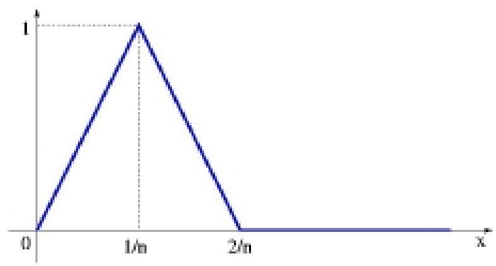


FIGURA 1. Esercizio 2

SOLUZIONE:

$$\forall x \in [0, +\infty) \quad f_n(x) \quad \to \quad 0, \qquad \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \frac{1}{n} \quad \to \quad 0$$

3. Esercizio

Dimostrare che le seguenti successioni di funzioni non convergono uniformemente in $\mathbb{R}$*:*

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

SOLUZIONE:

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} \quad \to \quad 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-\frac{x^2}{n}} - 0 \right| \geq e^{-\frac{(\sqrt{n})^2}{n}} = e^{-1} > 0$$

Gli estremi superiori non costituiscono quindi una successione infinitesima $\quad \to \quad$ quindi la convergenza non é uniforme.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \to \quad 0$$

Convergenza non uniforme,

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2} \quad \forall n, \quad x_n = \pm\frac{1}{n}, \quad d_n \nrightarrow 0$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2} \quad \to \quad \begin{cases} 1 & se \quad x = 0 \\ 0 & se \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Non continuitá del limite $\quad\to\quad$ convergenza non uniforme.

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad \to \quad 0$$

Convergenza non uniforme

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1, \quad x_n = n\frac{\pi}{2}, \quad d_n \nrightarrow 0$$

4. Esercizio

Sia f_n la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{n}\right) \qquad x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}^*.$$

- *dimostrare che converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e determinare il limite f,*
- *disegnare qualitativamente il grafico di f_n e di f,*
- *dimostrare che la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$.*

SOLUZIONE:

- $$f_n(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{n}\right) = e^x\, e^{-x^2/n} \quad \to \quad e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^x \left|1 - e^{-x^2/n}\right| \geq e^{\sqrt{n}} \left|1 - e^{-\sqrt{n}^2/n}\right| =$$
  $$= e^{\sqrt{n}} \left|1 - e^{-1}\right| \quad \to \quad +\infty$$

Pertanto i grafici delle $f_n(x)$ non appartengono definitivamente ad alcun *tubo* centrato sul grafico della $f(x)$

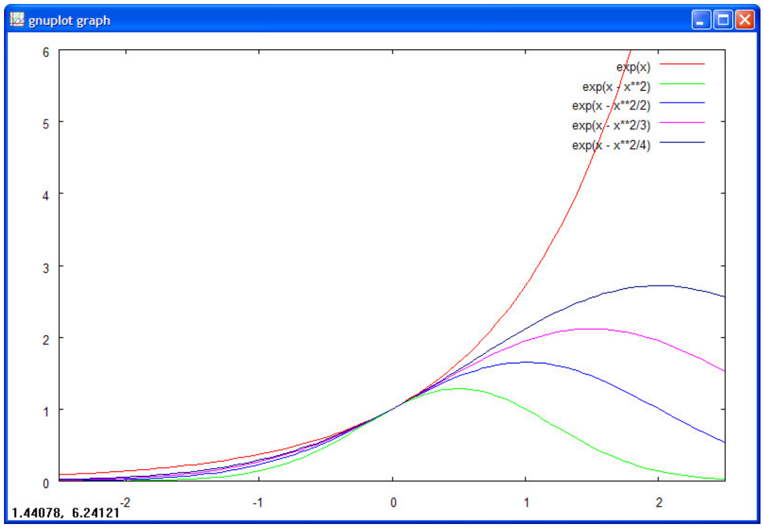


FIGURA 2. $f_n(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{n}\right) \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad e^x$

5. Esercizio

Sia f_n la successione definita da

$$f_n(x) = \frac{1 + |x|^n}{1 + |x|^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

dimostrare che

- *converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e determinare il limite f*
- *la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$*
- *la convergenza è uniforme in*

$$I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad e \quad in \quad J = \{x\ :\ |x| \geq 2\}$$

Esiste un insieme che contiene (strettamente) $I \cup J$ in cui la convergenza è uniforme?

SOLUZIONE:

- $$f_n(x) \quad \to \quad \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$
- Limite non continuo $\quad \to \quad$ convergenza non uniforme.
- $$x \in I : \quad \left|1 - \frac{1 + |x|^n}{1 + |x|^{2n}}\right| = |x|^n \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^{2n}} \leq |x|^n \leq \frac{1}{2^n} \quad \to \quad 0$$

- $$x \in J: \quad \left|\frac{1+|x|^n}{1+|x|^{2n}}\right| \leq \frac{2|x|^n}{|x|^{2n}} \leq \frac{2}{2^n} \quad \to \quad 0$$

La risposta é sì: ad esempio scelto

$$I_\alpha = [-\alpha, \alpha], \quad 0 < \alpha < 1$$

si ha la stessa maggiorazione osservata sopra

$$x \in I_\alpha: \quad \left|1 - \frac{1+|x|^n}{1+|x|^{2n}}\right| = |x|^n \frac{1-|x|^n}{1+|x|^{2n}} \leq |x|^n \leq \alpha^n \quad \to \quad 0$$

6. Esercizio

Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x^4}{1+n^4x^4} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione:

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x^4}{1+n^4x^4} \quad \to \quad \begin{cases} 0 & x = 0 \quad \forall\alpha \\ x \neq 0 & \to \quad \begin{cases} 0 & \alpha < 4 \\ 1 & \alpha = 4 \\ \infty & \alpha > 4 \end{cases} \end{cases}$$

Tenuto presente che se $\alpha \geq 4$ il limite $f(x)$ non é continuo se ne deduce che se $\alpha \geq 4$ la convergenza non é uniforme in $\mathbb{R}$.

7. Esercizio

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in (1,2] \end{cases}$$

- *dire se è possibile trovare una successione f_n di funzioni continue su $\mathbb{R}$ che converge uniformemente ad f,*
- *dire se è possibile trovare una successione g_n di funzioni di classe $C^1([0,2])$ che converge uniformemente a g.*

Soluzione:

- No, le successioni di funzioni continue uniformemente convergenti convergono a funzioni continue, ed $f(x)$ non é continua.

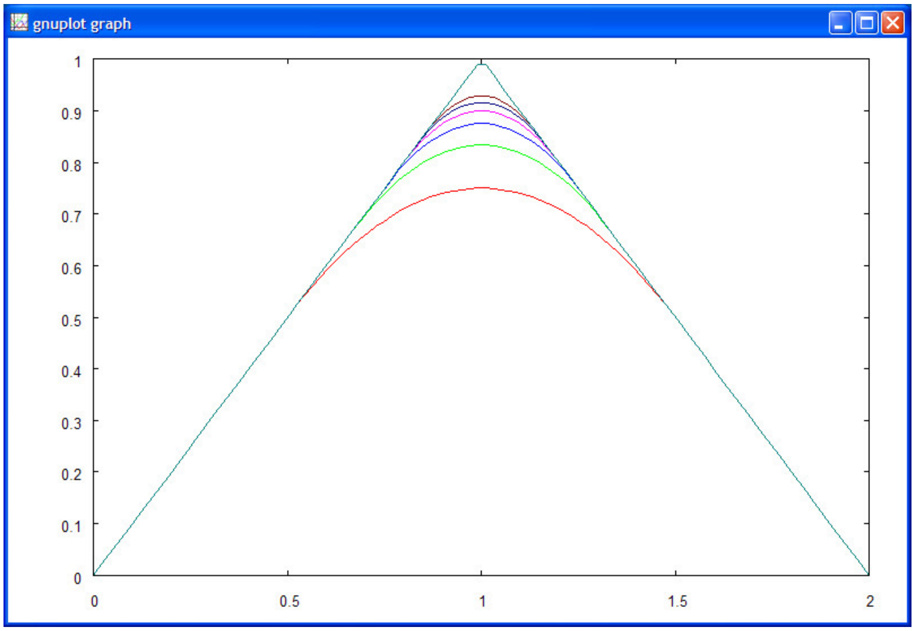


FIGURA 3. La successione approssimante $g(x)$

- Si: proviamo a sostituire il grafico di $g(x)$ in prossimitá di $x = 1$ con parabole approssimanti

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & |x-1| \geq \dfrac{1}{n} \\[2ex] -a(x-1)^2 + b & |x-1| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

  scegliendo naturalmente a e b in modo che le g_n siano continue e derivabili, cioé

$$\begin{cases} g_n'(1-\frac{1}{n}) = \dfrac{2a}{n} = 1 \\ g_n(1-\frac{1}{n}) = -a\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + b = \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} a = \dfrac{n}{2} \\[2ex] b = 1 - \dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

8. Esercizio

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\pi}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}, \qquad x \in [0, +\infty)$$

- *calcolare, se esiste, il limite puntuale* $f(x)$, $x \in [0, +\infty)$
- *é vero che* $f_n(x)$ *converge ad* f *u niformemente in* $[0, +\infty)$ *?*
- *calcolare*
$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx, \quad I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$
É vero che $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ *?*

SOLUZIONE:

$$0 \le f_n(x) = \frac{\pi}{n^2}\,e^{-\frac{x}{n}} \le \frac{\pi}{n^2} \quad \to \quad 0$$

$$d_n = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - 0| \le \frac{\pi}{n^2} \quad \to \quad 0$$

La convergenza é uniforme.

$$\frac{\pi}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\,e^{-\frac{x}{n}}\,dx = \frac{\pi}{n} \quad \to \quad 0$$

Riesce quindi $\lim_{n\to\infty} I_n = I$.

9. Esercizio

$$\{f_n(x) = \sin^n(x)\} \quad x \in [0, \pi]$$

- *Disegnare i grafici delle prime quattro funzioni,*
- *Determinare il limite puntuale della successione,*
- *esaminare se riesce*
$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx$$

SOLUZIONE:

Limite puntuale:

$$|\sin(x)| \le 1, \quad x \in [0, \pi] \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \sin^n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x \ne \pi/2 \\ 1 & x = \pi/2 \end{cases}$$

Riesce quindi
$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

La successione degli integrali $\int_0^{\pi} \sin^n(x)\,dx$ é monotona decrescente e, ovviamente, limitata inferiormente trattandosi di numeri positivi: quindi é convergente.

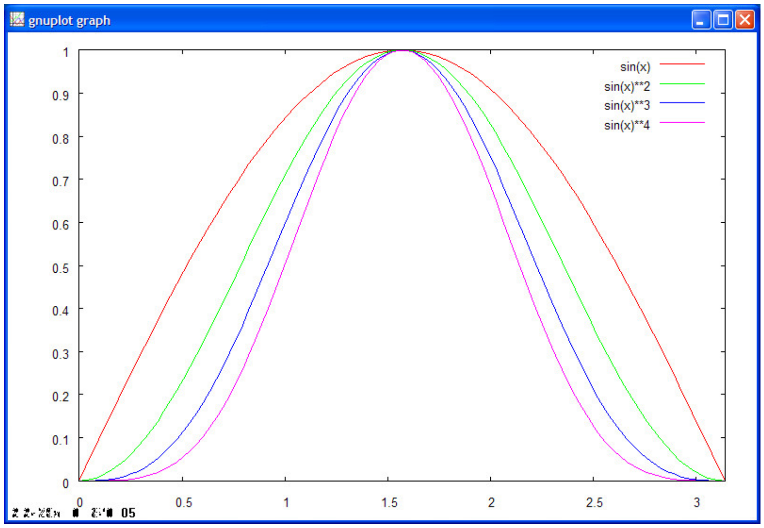


FIGURA 4. $\{f_n(x) = \sin^n(x)\} \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad x \in [0, \pi]$

Tenuto conto che

$$\int_0^{\pi} \sin^n(x)\,dx = \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin^n(x)\,dx + \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sin^n(x)\,dx + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi} \sin^n(x)\,dx$$

e che, per $0 < \alpha < \pi/2$, si ha

$$\int_0^{\pi/2-\alpha} \sin^n(x)\,dx \leq \sin^n(\pi/2-\alpha)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sin^n(x)\,dx \leq 2\alpha$$

$$\int_{\pi/2+\alpha}^{\pi} \sin^n(x)\,dx \leq \sin^n(\pi/2+\alpha)\,\frac{\pi}{2}$$

Ne segue

$$\int_0^{\pi} \sin^n(x)\,dx \leq \sin^n(\pi/2-\alpha)\,\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \sin^n(\pi/2+\alpha)\,\frac{\pi}{2}$$

da cui segue, tenuto conto che

$$0 < \sin(\pi/2-\alpha) < 1, \quad 0 < \sin(\pi/2+\alpha) < 1$$

che

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \sin^n(x)\,dx \leq 2\alpha$$

da cui per l'arbitrarietá di α

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin^n(x)\, dx = 0$$

10. Esercizio

$$\left\{ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right\} \qquad x \in \mathbb{R}$$

- *Determinare il limite puntuale della successione,*
- *Esaminare in quali sottinsiemi $E \subset \mathbb{R}$ c'é convergenza uniforme.*

SOLUZIONE:

La formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ e resto di Lagrange produce

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}\, x^{n+1} \quad \to \quad |e^x - f_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}$$

con $\xi \in (0, x)$: tenuto presente che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^\xi}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

riesce provato che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x, \qquad \forall x \in [0, +\infty)$.
Se $x \in [-M, M]$ riesce

$$|e^x - f_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

da cui

$$\sup_{x\in[0,M]} |e^x - f_n(x)| = d_n \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

successione, quest'ultima infinitesima.
Quindi la successione $\{d_n\}$ degli estremi superiori é infinitesima, quindi la successione $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente in $[-M, M], \quad \forall M$: in altri termini la successione $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente in ogni insieme E limitato.

OSSERVAZIONE 10.1. *La successione $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente in ogni insieme E limitato: ma non é uniformemente convergente in $[0, +\infty)$. Infatti.....*

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to \quad \sup_{x \in [0,\infty)} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = +\infty$$

tutt'altro che costituire una successione $\{d_n\}$ infinitesima !

CAPITOLO 26

Le soluzioni del foglio 4

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 4

24 ottobre 2007

1. Esercizio

Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$\{z\,:\,|z|<1\},\qquad \{z\,:\,|z+1|<1\},$$

$$\{z\,:\,|\bar{z}+1|<1\},\qquad \{z\,:\,|z^3|<1\},$$

$$\{z\,:\,|\Re z|+|\Im z|<1\},\qquad \{\rho e^{i\theta}\,:\,\theta\in(0,\pi/4),\ \rho\in(1,2)\}.$$

$$\{\rho e^{i\theta}\,:\,\theta\in[0,2\pi),\ \rho=1\},\qquad \{\rho e^{i\theta}\,:\,\theta\in[0,4\pi),\ \rho=\theta\}.$$

SOLUZIONE:

- $\{z\,:\,|z|<1\}$ il cerchio di centro l'origine, raggio 1, aperto.
- $\{z\,:\,|z+1|<1\}$ il cerchio di centro $z_0=-1$, raggio 1, aperto.
- $\{z\,:\,|\bar{z}+1|<1\}$ tenuto presente che $|\bar{z}+1|=|z+1|$ é ancora il cerchio di centro $z_0=-1$, raggio 1, aperto.
- $\{z\,:\,|z^3|<1\}$ tenuto conto che $|z^3|=|z|^3$ ne segue che $\{z\,:\,|z^3|<1\}=\{z\,:\,|z|^3<1\}=\{z\,:\,|z|<1\}$ si tratta quindi ancora del cerchio di centro l'origine, raggio 1, aperto.
- $\{z\,:\,|\Re z|+|\Im z|<1\}$ é il quadrato $|x|+|y|<1$ di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, aperto,
- $\{\rho e^{i\theta}\,:\,\theta\in(0,\pi/4),\ \rho\in(1,2)\}$ si tratta di un settore (un ottavo) della corona circolare di centro l'origine e raggi $r=1$ ed $R=2$, il primo ottavo, aperto,
- $\{\rho e^{i\theta}\,:\,\theta\in[0,2\pi),\ \rho=1\}$ si tratta della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

- $\{\rho e^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, 4\pi), \ \rho = \theta\}$ si tratta di un arco di spirale, vedi Figura 1, dall'origine al punto $M = (4\pi, 0)$ escluso.

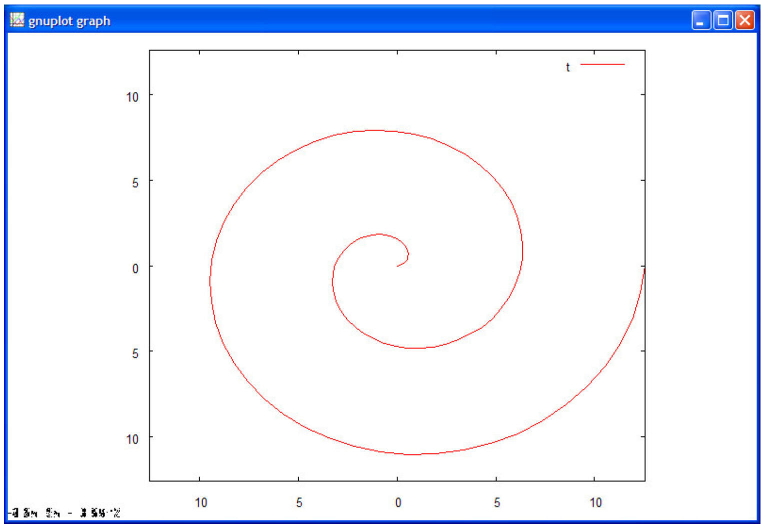


Figura 1. $\{\rho e^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, 4\pi), \ \rho = \theta\}$

2. Esercizio

Sia $T = \{w \in \mathbb{C} \ : \ w = z^2, \, z \in Q\}$*: individuare* T *quando* Q *è, rispettivamente,*

- *il primo quadrante,*
- *il semipiano superiore,*
- *l'unione dei primi tre quadranti.*

Soluzione:

Tenuto conto che

$$z = \rho \, e^{i\,\theta} \quad \to \quad z^2 = \rho^2 \, e^{2\,i\,\theta}$$

ne segue che

- z nel primo quadrante vuol dire

  $$\rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

  e quindi

  $$z^2 = \rho^2 \, e^{2\,i\,\theta} \quad \rho^2 \in [0, +\infty), \quad 2\,\theta \in [0, \pi]$$

  L'immagine del primo quadrante tramite la $w = z^2$ é il semipiano superiore, $\Im(w) \geq 0$.

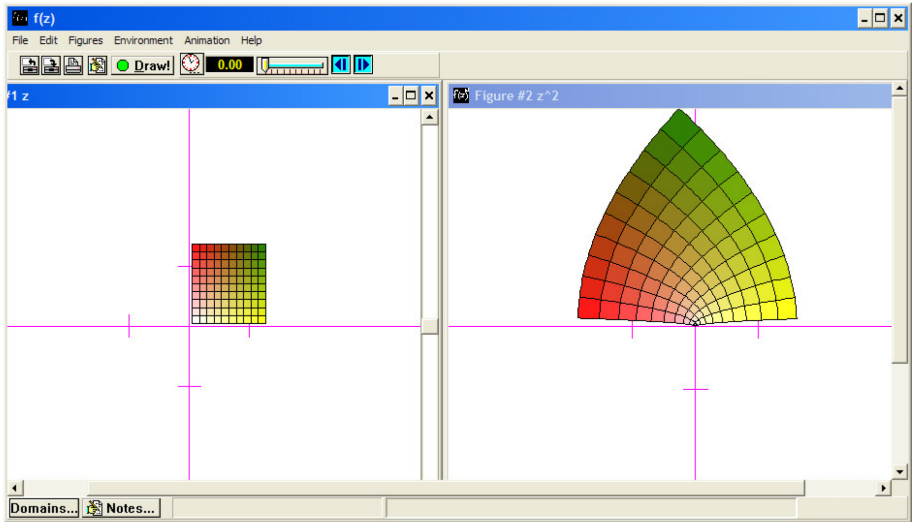


FIGURA 2. $w = z^2$

In Figura 2 si vede a sinistra un rettangolo del piano z e a destra la sua immagine nel piano w secondo la trasformazione $w = z^2$: i colori permettono, per analogia, di seguire i trasformati di ciascun quadratino.

- z nel semipiano superiore, $\Im(z) \geq 0$ vuol dire
$$\rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, \pi]$$
e quindi
$$z^2 = \rho^2\, e^{2\,i\,\theta} \quad \rho^2 \in [0, +\infty), \quad 2\,\theta \in [0, 2\pi]$$
L'immagine del semipiano superiore tramite la $w = z^2$ é tutto il piano w.
- L'unione dei primi tre quadranti contiene in particolare il semipiano superiore: quindi l'immagine dei primi tre quadranti contiene l'immagine del semipiano superiore, quindi contiene per quanto osservato nel punto precedente il piano w e, quindi, non puó che coincidere con il piano w.

3. Esercizio

Dimostrare che, se $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = w$, *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = |w|$.

SOLUZIONE:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}(x_n + iy_n) = w = u + iv \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} x_n = u \\ \lim_{n\to+\infty} y_n = v \end{cases}$$

Per continuitá della radice quadrata segue pertanto che

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = |w|.$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Attenzione l'affermazione inversa é falsa: puó aversi che*

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = |w|$$

senza che $z_n \quad \to \quad w$.
Basta pensare, ad esempio a

$$z_n = w\, e^{i\,\theta_n}$$

scegliendo arbitrariamente la successione dei θ_n*:*

$$|z_n| = |w| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n \nrightarrow w$$

4. Esercizio

Controllare che il laplaciano delle seguenti funzioni è zero.

$$x^2 - y^2, \quad xy, \quad e^x \cos(y), \quad \mathrm{Re}(z^n), \quad \mathrm{Im}(z^n)$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Per definizione il laplaciano di una funzione $f(x, y)$ é

$$\triangle\, f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

Pertanto

- $\triangle\,(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0$
- $\triangle\, xy = 0 + 0 = 0$
- $\triangle e^x \cos(y) = e^x \cos(y) - e^x \cos(y) = 0$

Sia

$$z^n = \Re(z^n) + i\Im(z^n))$$

per linearitá si ha

$$\triangle\, z^n = \triangle\, \Re(z^n) + i\triangle\, \Im(z^n)$$

Tenuto conto che

$$\triangle\, z^n = \triangle\,(x + iy)^n = n(n-1)(x + iy)^{n-2} - n(n-1)(x + iy)^{n-2} = 0$$

si ha di conseguenza

$$\triangle\,\Re(z^n) + i\triangle\,\Im(z^n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \triangle\,\Re(z^n) = 0 \\ \triangle\,\Im(z^n) = 0 \end{cases}$$

5. Esercizio

Sia $a \in \mathbb{C}$ fissato, dato $z_0 \in \mathbb{C}$, sia z_n la successione definita da

$$z_{n+1} = a\, z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrare che, se

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = w \neq 0,$$

allora $z_n = z_0$ per ogni n, cioè z_n è una successione costante.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

I termini della successione sono

$$z_0,\ a\, z_0,\ a^2\, z_0,\ a^3\, z_0, ..., a^n\, z_0, ...$$

cioé i termini della successione geometrica

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ ...$$

moltiplicati per z_0.
Se $z_0 = 0$ allora $z_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Se $z_0 \neq 0$ allora la successione $\{a^k\, z_0\}$ é convergente se e solo se é convergente la $\{a^k\}$
Tenuto conto che la successione geometrica ha tre soli possibili comportamenti:

- é infinitesima se $|a| < 1$
- é costante se $a = 1$
- non é convergente negli altri casi.

si riconosce che

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \neq 0$$

puó aversi solo se $a = 1$, caso in cui la successione é di conseguenza costante $z_n = z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Esercizio

Determinare il raggio di convergenza delle serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3-1}{k^2+1}\, z^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3-i}{k^2+1}\, z^k\,, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k+k^2}{3^k+k^3}\, z^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{k^2}\,, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\,k\,\pi}\, z^k\,.$$

Sapete dire quanto vale la somma dell'ultima serie?

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3-1}{k^2+1}\, z^k$$
  Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene
  $$\frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^2+1}\cdot\frac{k^2+1}{k^3-1}\cdot|z| \quad \to \quad |z|<1$$
  Da cui la convergenza della serie per $|z|<1$.
- $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3-i}{k^2+1}\, z^k$$
  lo stesso conto precedente, naturalmente coi moduli porta a
  $$\frac{|(k+1)^3-i|}{(k+1)^2+1}\cdot\frac{k^2+1}{|k^3-i|}\cdot|z| \quad \to \quad |z|<1$$
- $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k+k^2}{3^k+k^3}\, z^k$$
  Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene
  $$\frac{2^{k+1}+(k+1)^2}{3^{k+1}+(k+1)^3}\cdot\frac{3^k+k^3}{2^k+k^2}\cdot|z| \quad \to \quad \frac{2}{3}|z| \quad \to \quad |z|<\frac{3}{2}$$
- $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{k^2}$$
  Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene
  $$\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot\frac{|z|^{2(k+1)}}{|z|^{2k}} \quad \to \quad |z|^2<1 \quad \to \quad |z|<1$$

- $$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\,k\,\pi}\, z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{i\,\pi}\, z\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z)^k = \frac{1}{1+z}$$

7. Esercizio

Sia a_k una successione in $\mathbb{R}$ tale che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente. Dimostrare che la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ha raggio di convergenza $R \geq 1$.

Soluzione:

Se $\sum a_k$ é convergente i termini a_k sono una successione infinitesima, quindi una successione limitata, cioé esiste $M \geq 0$ tale che

$$|a_k| \leq M$$

La convergenza della $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\forall |z| < 1$, si ricava dalla sua assoluta convergenza

$$|a_k||z|^k \leq M|z|^k \quad \to \quad \sum |a_k||z|^k \leq M \sum |z|^k < \infty \;\forall |z| < 1$$

Tenuto presente che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge per $|z| < 1$ se ne deduce per il raggio di convergenza $R \geq 1$.

Osservazione 7.1. *Il raggio puó naturalmente essere anche maggiore di 1: si pensi ad esempio alla serie*

$$\sum a_k = \sum \frac{1}{2^k} \quad \to \quad \sum a_k z^k = \sum \left(\frac{z}{2}\right)^k$$

serie che ha raggio di convergenza $R = 2$.

8. Esercizio

Sia a_k *una successione in* $\mathbb{C}$ *tale che* $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell \in \mathbb{R}$*:*

- *dimostrare che*
$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|ka_k|} = \ell.$$
- *dimostrare che, le serie*
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k z^{k-1}$$
hanno lo stesso raggio di convergenza.

Soluzione:

$$\sqrt[k]{k\,|a_k|} = \sqrt[k]{k}\,\sqrt[k]{|a_k|} = e^{\log(k)/k}\,\sqrt[k]{|a_k|}$$
Tenuto conto che
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log(k)}{k} = 0 \quad \to \quad \sqrt[k]{k} \quad \to \quad 1$$
segue che
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\,|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$
La prima delle serie é l'integrale della seconda ed é noto che all'interno del cerchio di convergenza si puó integrare termine a termine:
quindi se la seconda converge all'interno del cerchio di raggio R_2 anche la prima vi converge, cioé $R_1 \geq R_2$
D'altra parte la seconda é la serie derivata della prima ed é noto che si puó derivare termine a termine all'interno del cerchio di raggio R_1 nel quale la prima converge, in altri termini $R_2 \geq R_1$.
Le due diseguaglianze implicano
$$R_1 = R_2$$

9. Esercizio

Si consideri la serie di potenze
$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

- *determinarne il raggio di convergenza* R*,*

- *per* $x \in (-R, R)$*, posto*
$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$
si determini un'espressione esplicita per f*,*
- *dedurre dal punto precedente un'espressione per* g*.*

SOLUZIONE:

Dal criterio del rapporto applicato alla serie dei moduli
$$\frac{(k+2)|x|^{k+1}}{(k+1)|x|^k} = \frac{k+2}{k+1}|x| \quad \to \quad |x|$$
Il raggio di convergenza é pertanto $R = 1$

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (k+1)\,t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

É noto che
$$\forall x \in (-1,1): \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \to \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}$$
Ne segue
$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

10. Esercizio

Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- *determinare l'espressione di* $f^{(n)}$*, derivata* $n-$*esima di* f*,*
- *fissato* $x_0 < 1$*, scrivere la serie di Taylor di* f *in* x_0*,*
- *determinare il raggio di convergenza della serie*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(z - x_0)^k.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = (1-x)^{-1} \quad \to \quad f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad \to \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3}, \ldots \quad \to$$
$$f^{[n]}(x) = n!(1-x)^{-n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k = \frac{1}{1-x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^k$$

si ha convergenza se

$$\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1 \quad \to \quad |x-x_0| < |1-x_0| = R$$

11. Esercizio

Sia $f(z) = e^z$ per $z \in \mathbb{C}$. Disegnare $f(Q)$ nei seguenti casi:

$$Q = \mathbb{R} \times [0,\pi), \qquad Q = \mathbb{R} \times [3\pi, 4\pi),$$
$$Q = [0,1] \times [0, 2\pi), \qquad Q = [-1,0] \times [2\pi, 4\pi].$$

SOLUZIONE:

$$w = f(z) = e^z \quad \to \quad w = e^x \, . \, e^{iy}$$

- $Q = \mathbb{R} \times [0,\pi) \quad \to \quad -\infty < x < \infty \quad \to \quad 0 < e^x < \infty$ $y \in [0,\pi) \quad \to \quad e^{iy} \in \mathcal{C}_+$ essendo $\mathcal{C}_+$ la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1 appartenente al semipiano $\Im(w) > 0$ Ne deriva che l'immagine di Q é il semipiano $\Im(w) \geq 0$ privato del semiasse reale negativo.
- $Q = \mathbb{R} \times [3\pi, 4\pi)$ l'immagine é il semipiano $\Im(w) \leq 0$ privato del semiasse reale positivo.
- $Q = [0,1] \times [0,2\pi)$ l'immagine é la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 ed e
- $Q = [-1,0] \times [2\pi, 4\pi]$ l'immagine é la corona circolare di centro l'origine e raggi $1/e$ ed 1

12. Esercizio

Sia $f(x) = \ln(1+x), \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

- *determinare una formula per le derivate di f, e scrivere la serie di Taylor di f di punto iniziale $x_0 = 0$,*
- *calcolare $\sup\limits_{|x|<1/2} |f^{(k)}(x)|$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,*
- *dedurne che la funzione f è analitica in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

SOLUZIONE:

- $$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \ldots$$
$$f^{[k]}(x) = (-1)^{k-1}\,(k-1)!\,(1+x)^{-k}$$
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k\,(1+x_0)^k}(x-x_0)^k$$
- $$\sup_{x\in[-1/2,1/2]} \left|(-1)^{k-1}\,(k-1)!\,(1+x)^{-k}\right| = 2^k\,(k-1)!$$
- il resto, espresso nella forma di Lagrange é quindi
$$|R_n(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)!}\left|\frac{x-x_0}{1+x_0}\right|^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-x_0}{1+x_0}\right|^{n+1}$$

da cui
$$|R_n(x)| \quad \to \quad 0 \quad \forall x: \ |x-x_0| < |1+x_0|$$

13. Esercizio

- *Trovare una funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che*
$$g(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad e \qquad g(x) = 0 \qquad \forall\, x\,:\,|x| \geq 1.$$
- *Trovare $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ con le stesse proprietà di (i) e che inoltre verifichi*
$$g(x) = 1 \qquad \forall\, x\,:\,|x| \leq \frac{1}{2}.$$

Suggerimento. *Procedere con "copia ed incolla" utilizzando la funzione $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$...*

SOLUZIONE:

- $g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Indichiamo con
$$j(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-16\,x^2)} & |x| < 1/4 \\ 0 & |x| \geq 1/4 \end{cases}$$
Si tratta di una funzione appartenente a $C^\infty(\mathbb{R})$[1]
Consideriamo la funzione
$$g(x) = \int_{-3/4}^{3/4} j(x-y)\,dy$$

[1]Questa é la questione piú seria, nel quale fare uso della e^{-1/x^2} di cui al suggerimento.

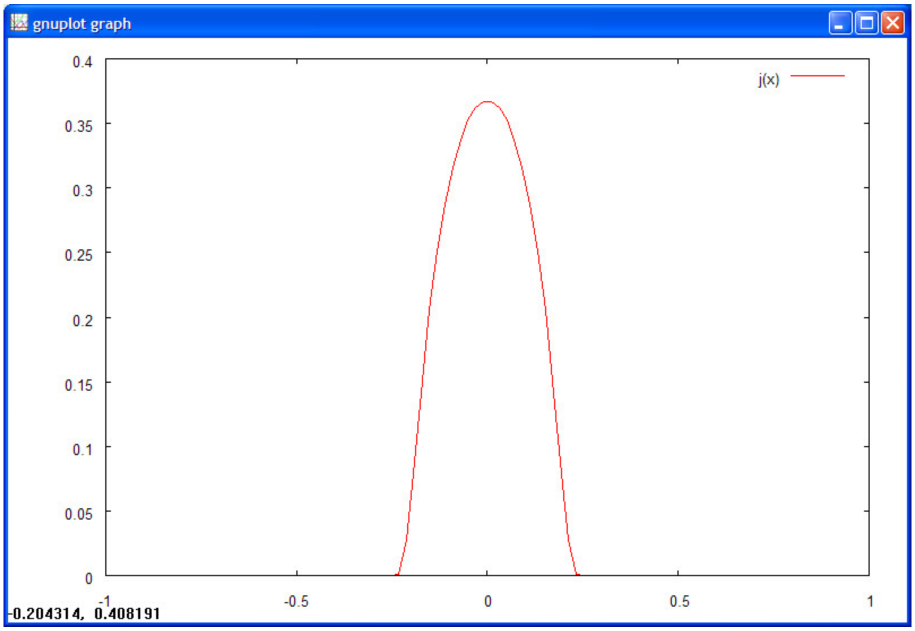


FIGURA 3. Il grafico di $j(x)$

É evidente che:

- $|x| > 1,\ y \in [-3/4, 3/4] \quad \to \quad |x-y| \geq 1/4 \quad \to \quad j(x-y) = 0 \quad \to \quad g(x) = 0$
- $|x| \leq 1/2 \quad \to \quad |y-x| < 1/4 \quad \to \quad y \in [-3/4, 3/4] \quad \to$

$$\int_{-3/4}^{3/4} j(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} j(y) dy = c > 0$$

É evidente quindi che la funzione, vedi Figura 4,

$$G(x) = \frac{1}{c} \int_{-3/4}^{3/4} j(x-y)\, dy = \begin{cases} 1 & se \quad |x| < 1/2 \\ 0 & se \quad |x| > 1 \end{cases}$$

- appartiene a $C^\infty(\mathbb{R})$
- vale 1 per $|x| \leq 1/2$
- vale 0 per $|x| \geq 1$

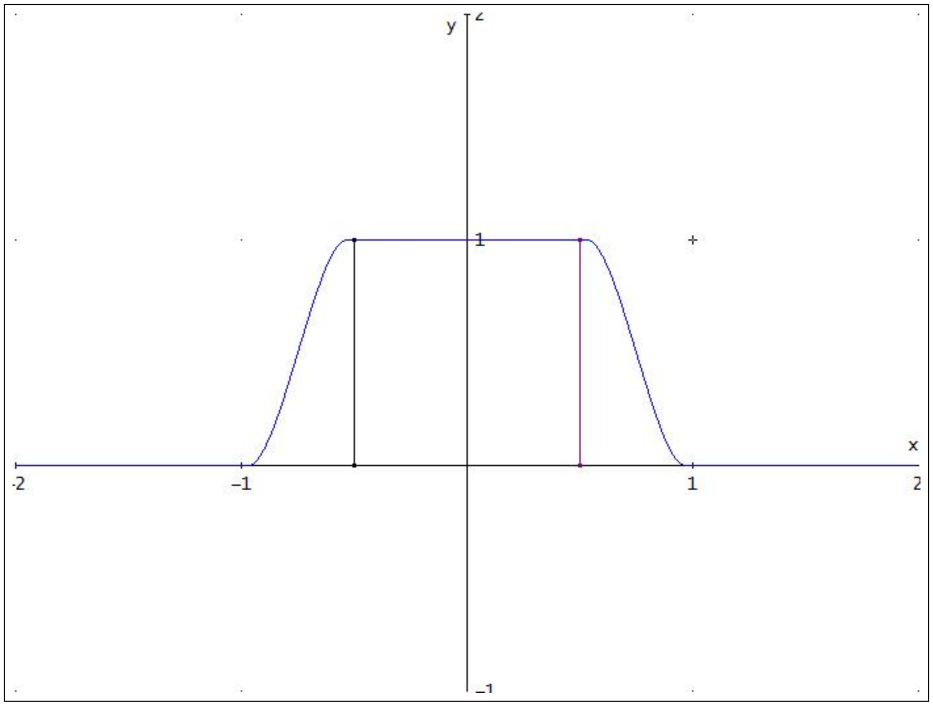


FIGURA 4. Il grafico di $G(x)$

CAPITOLO 27

Le soluzioni del foglio 5

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 5

9 novembre 2007

1. Esercizio

Sia F il campo vettoriale costante $F = (2, 3)$ definito in $\mathbb{R}^2$. Calcolare il flusso di tale campo vettoriale attraverso la curva γ le cui equazioni parametriche sono date dalla funzione ϕ

$$\phi(t) = \{R\cos(t), R\sin(t)\} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e nel caso in cui γ sia un esagono regolare qualunque.

SOLUZIONE:

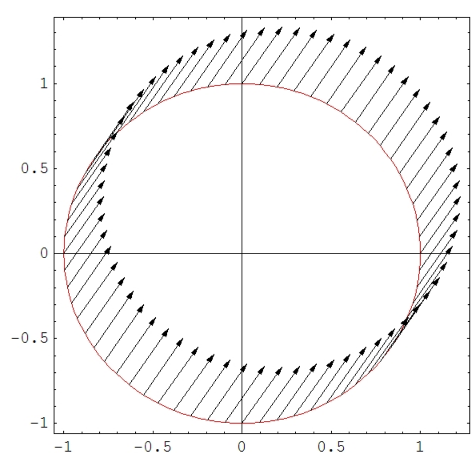


FIGURA 1. $F = (2, 3)$ lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$

La Figura 1 lascia riconoscere facilmente che il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio R,

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds,$$

é nullo.
In termini di corrente di un fluido questo significa che

...tanto ne entra, quanto ne esce...

Analogo risultato si riconosce sostituendo alla circonferenza di centro l'origine un qualsiasi esagono regolare del piano.
Il risultato é in accordo col teorema della divergenza

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_{\mathbf{C}} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = 0$$

essendo

$$div(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) 2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) 3 = 0$$

2. Esercizio

Sia γ la frontiera del rettangolo $Q = (0,2) \times (4,8)$. Dire in quali punti è definita la normale esterne e calcolarla.
Calcolare poi il flusso del campo $\overrightarrow{F}(x,y) = \{x,\ y^2 + x\}$ attraverso γ.

SOLUZIONE:

La frontiera γ del rettangolo Q é costituita da quattro segmenti, i quattro lati

- $\ell_1 :\ x = 2,\ 4 < y < 8,\ \overrightarrow{\nu} = \{1, 0\}$
- $\ell_2 :\ 0 < x < 2,\ y = 8,\ \overrightarrow{\nu} = \{0, 1\}$
- $\ell_3 :\ x = 0,\ 4 < y < 8,\ \overrightarrow{\nu} = \{-1, 0\}$
- $\ell_2 :\ 0 < x < 2,\ y = 4,\ \overrightarrow{\nu} = \{0, -1\}$

Non é definita la normale nei 4 vertici, punti angolosi.

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds =$$

$$\int_{\ell_1} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds + \int_{\ell_2} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds + \int_{\ell_3} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds + \int_{\ell_4} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds =$$

$$\int_4^8 2dt + \int_0^2 (t + 8^2)dt - \int_4^8 0\, dt - \int_0^2 (t + 4^2)\, dt = 104$$

Del resto servendosi del Teorema della Divergenza si ha

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y)\,.\,\overrightarrow{\nu}(x,y)\,ds = \iint_Q div(F)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_4^8 (x+2y)dy = 104$$

3. Esercizio

Sia

$$F(x,y) = r^{\alpha-1}\{x,y\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

un campo centrale[1] *definito in* $\mathbb{R}^2$ *eventualmente privato dell'origine.*

- *Calcolare il flusso attraverso una circonferenza di raggio R centrata nell'origine usando la definizione di flusso (integrale curvilineo).*
- *Dire per quali α il flusso è indipendente da R.*
- *Calcolare inoltre* $\iint_{B(0,R)} \mathrm{div}(\overrightarrow{F})dxdy$.
- *Dire per quali α è finito, per quali è infinito (come integrale improprio) e per quali è indipendente da R.*
- *Concludere dicendo per quali α vale il teorema della divergenza, e spiegare perchè non vale quando questo è il caso.*

SOLUZIONE:

(1) Si noti che sulle circonferenze $\mathcal{C}_R$ di centro l'origine e raggio R riesce

$$\overrightarrow{F} = R^\alpha\,\overrightarrow{\nu}$$

essendo $\overrightarrow{\nu}$ il versore esterno.

$$\Phi = \int_{\mathcal{C}_R} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{\nu}\,ds = \int_{\mathcal{C}_R} R^\alpha\,ds = 2\pi\,R^{\alpha+1}$$

(2) L'indipendenza si ha solo se $\alpha+1=0 \quad \to \quad \alpha=-1$: diminuzione del modulo del campo e allungamento di $\mathcal{C}_R$ al crescere di R si compensano...!

(3) Indicate con $\mathcal{B}_{r,R}$ le regioni $0<r^2<x^2+y^2<R^2$, in esse il campo F é di classe C^1 e quindi si puó applicare il Teorema della Divergenza e ottenere quindi che:

$$\iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \mathrm{div}(\overrightarrow{F})\,dx\,dy = \int_{\mathcal{C}_R} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{\nu}\,ds - \int_{\mathcal{C}_r} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{\nu}\,ds$$

[1] Un campo di vettori tutti paralleli a $\{x,y\}$, $\overrightarrow{OP}$

e quindi

$$\iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dx dy = 2\pi \left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right)$$

Si ha quindi, se e solo se $\alpha > -1$,

$$\lim_{r\to 0} \iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dx dy = \lim_{r\to 0} 2\pi \left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right) = 2\pi\, R^{\alpha+1}$$

(4) Per $\alpha = -1$ il valore, lo zero, é indipendente da r, R, mentre per $\alpha < -1$ l'integrale improprio di $\operatorname{div}(\overrightarrow{F})$ in $B(0, R)$ é divergente.

(5) Se $\alpha < 1$ il teorema della divergenza non puó essere applicato in $B(0, R)$ perché il campo non é di classe C^1 (per via della singolaritá nell'origine) condizione sufficiente per il teorema.

Tuttavia l'uguaglianza

$$\lim_{r\to 0} \iint_{\mathcal{B}_{r,R}} \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dx dy = \int_{\partial B(0,R)} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds$$

nella quale il primo membro corrisponde all'integrale improprio di $\operatorname{div}(\overrightarrow{F})$ su $B(0, R)$ si mantiene per $\alpha > -1$

Si noti che

$$div(F) = 2\alpha(x^2 + y^2)^{\alpha-1} = 2\alpha\, r^{2\alpha-2}$$

é dotata di integrale improprio convergente in $B(0, R)$ solo se $2\alpha - 2 > -2 \quad \to \quad \alpha > 0$

4. Esercizio

Siano u e v due funzioni di classe $C^2(\Omega)$ e continue su $\overline{\Omega}$. Mostrare che se v è armonica in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$, allora

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy = 0$$

SOLUZIONE:

Applichiamo il teorema della divergenza al campo

$$\overrightarrow{F} = u\ \nabla v \quad \to \quad \iint_{\Omega} div(u\ \nabla v)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} u\ \nabla v \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = 0$$

avendo usato l'ipotesi

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Riesce del resto

$$div(u\ \nabla v) = \nabla u \,.\, \nabla v + u \triangle v = \nabla u \,.\, \nabla v$$

avendo tenuto conto che

$$\triangle v = 0$$

Si ottiene quindi la tesi

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = 0$$

5. Esercizio

Assegnate funzioni regolari ρ e g, supponiamo che esistano w e v soluzioni regolari di

$$\begin{cases} \Delta u = 4\pi\rho & in\ B \\ u_{|\partial B} = g \end{cases}$$

Mostrare che $v \equiv w$.

SOLUZIONE:

Indichiamo con

$$d = v - w$$

d é una funzione armonica

$$\triangle d = \triangle u - \triangle w = 4\pi\rho - 4\pi\rho = 0$$

e nulla sulla frontiera ∂B

$$d|_{\partial B} = u|_{\partial B} - w|_{\partial B} = g - g = 0$$

allora usando il risultato dell'esercizio precedente con

$$u = v = d$$

si ottiene

$$\iint_B \nabla d \,.\, \nabla d \, dx \, dy = \iint_B |\nabla d|^2 \, dx \, dy = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla d = 0$$

Ma allora

$$d = \text{ costante}$$

in ogni componente connessa di B, ed essendo $d = 0$ sulla frontiera é, di conseguenza, zero in B.

OSSERVAZIONE 5.1. *Il risultato provato é null'altro che il* teorema di unicitá *per il problema*

$$\begin{cases} \triangle u = f & (x, y) \in \Omega \\ u = g & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

nell'incognita $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ date f e g.

6. Esercizio

Consideriamo una corona circolare di raggi interno r ed esterno R con $0 < r < R$ e centrata in $P_0 = (x_0, y_0)$.
Calcolare il flusso del campo

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\{x,y\}$$

attraverso la frontiera della corona al variare del punto P_0.
Discutere tre casi, a seconda che l'origine $O = (0,0)$

- **a):** *sia esterna alla circonferenza di raggio maggiore R.*
- **b):** *interna a quella di raggio minore r*
- **c):** *interna alla corona di raggi r ed R.*

SOLUZIONE:

Tenuto conto che il campo assegnato

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\{x,y\}$$

presenta una singolaritá nell'origine dovremo limitarci a considerare corone che non includano l'origine né all'interno né sulla frontiera.

- **a):** sia esterna alla circonferenza di raggio maggiore R:
  é lecito servirsi del teorema della divergenza per calcolare il flusso
  $$\int_{\partial B} \overrightarrow{F}(x,y)\,.\,\overrightarrow{\nu}(x,y)\,ds = \iint_B div(\overrightarrow{F})\,dxdy$$
  Tenuto conto che
  $$div(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = 0$$
  si riconosce che il flusso traverso tale corona é nullo.
- **b):** interna a quella di raggio minore r
  Ancora si applica il teorema della divergenza e si riconosce che il flusso é nullo.
- **c):** interna alla corona di raggi r ed R.
  La singolaritá del campo F, l'origine, cade all'interno della corona: il teorema della divergenza non é piú lecito....

  Consideriamo l'aperto Ω_ρ ottenuto privando la corona B di un cerchietto C_ρ di raggio ρ e centro l'origine, tutto interno a B: su Ω_ρ si puó applicare il Teorema della Divergenza e quindi dedurre che
  $$\int_{\partial\Omega_\rho} \overrightarrow{F}(x,y)\,.\,\overrightarrow{\nu}(x,y)\,ds = 0$$

ovvero che

$$\int_{\partial B} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = \int_{\partial \mathbb{C}_\rho} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds$$

Tenuto conto che, per calcolo diretto,

$$\int_{\partial \mathbb{C}_\rho} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = 2\pi$$

si deduce che

$$\int_{\partial B} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = 2\pi$$

OSSERVAZIONE 6.1. *Il campo F assegnato é un campo radiale centrale: con la abituale notazione $r = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha infatti*

$$F = \psi(r)\,\{\cos(\theta),\, \sin(\theta)\}, \quad \psi(r) = \frac{1}{r}$$

La sua divergenza é

$$div(F) = \psi'(r) + \frac{\psi(r)}{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\int_{\partial \mathbb{C}_\rho} \overrightarrow{F}(x,y) \,.\, \overrightarrow{\nu}(x,y)\, ds = \int_0^{2\pi} \psi(r)\, r\, d\theta = 2\pi$$

CAPITOLO 28

Le soluzioni del foglio 6

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 6

16 novembre 2007

1. Esercizio

(La scala a chiocciola). Sia Σ la superficie definita dalle seguenti equazioni parametriche

$$\varphi : Q \to \mathbb{R}^3, \quad Q = [0,1] \times [0,1]$$

$$\varphi(u,v) = \{(u+\delta)\cos(2\pi v),\ (u+\delta)\sin(2\pi v),\ v\}, \quad \delta > 0.$$

- *Provare che la superficie è non singolare.*
- *Calcolare la sua area.*
- *Calcolare la lunghezza della curva*

$$\varphi(u(t), v(t)), \quad (u(t), v(t)) = (t,t)$$

- *Abbozzare un disegno della superficie.*

SOLUZIONE:

La superficie è non singolare

Significa riconoscere le proprietá di regolaritá della rappresentazione

(1) $\varphi(u,v) \in C^1(\overset{\circ}{Q}) \cap C^0(\overline{Q})$

(2) $\varphi(u,v)$ iniettiva $Q \quad \to \quad \mathbb{R}^3$: verificare cioé che

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \quad \to \quad \varphi(u_1, v_1) \neq \varphi(u_2, v_2)$$

Tenuto conto che la distanza dei punti $\varphi(u,v)$ dall'asse z é $u+\delta$ ne segue che se fosse $\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2)$ si avrebbe

$$u_1 + \delta \quad = \quad u_2 + \delta$$

si riconosce quindi che se $u_1 \neq u_2$ allora sicuramente

$$\varphi(u_1, v_1) \neq \varphi(u_2, v_2)$$

Se del resto $u_1 = u_2$ allora certamente $v_1 \neq v_2$: i due punti $\varphi(u_1, v_1)$ e $\varphi(u_2, v_2)$ si trovano a due quote $z = v_1$ e $z = v_2$ diverse e quindi ancora

$$\varphi(u_1, v_1) \neq \varphi(u_2, v_2)$$

(3) $D\varphi$ di rango 2

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}\varphi_1 & \dfrac{\partial}{\partial u}\varphi_2 & \dfrac{\partial}{\partial u}\varphi_3 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\varphi_1 & \dfrac{\partial}{\partial v}\varphi_2 & \dfrac{\partial}{\partial v}\varphi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi v) & \sin(2\pi v) & 0 \\ -2\pi(u+\delta)\sin(2\pi v) & 2\pi(u+\delta)\cos(2\pi v) & 1 \end{pmatrix}$$

Dire che tale matrice ha rango 2 vuol dire che almeno uno dei tre minori di ordine 2 esistenti ha determinante $\neq 0$: tenuto conto che il minore formato con le prime due colonne ha determinante

$$2\pi(u+\delta) \geq 2\pi\delta > 0$$

la condizione rango$(D\varphi) = 2$ é verificata.

Area della superficie

Tenuto conto che

$$\begin{cases} X_u & = \{\cos(2\pi v) & \sin(2\pi v) & 0\} \\ X_v & = \{-2\pi(u+\delta)\sin(2\pi v) & 2\pi(u+\delta)\cos(2\pi v) & 1\} \\ X_u \wedge X_v & = \{\sin(2\pi v) & -\cos(2\pi v) & 2\pi(u+\delta)\} \end{cases}$$

si ha

$$Area \quad = \iint_Q |X_u \wedge X_v| \, du\, dv = \iint_Q \sqrt{1 + 4\pi^2(u+\delta)^2}\, du\, dv$$

Lunghezza ℓ della curva

$$\phi(t) = \varphi(t,t) = \{(t+\delta)\cos(2\pi t), \ \ (t+\delta)\sin(2\pi t), \ \ t\}$$

$$\phi'(t) = \{\cos(2\pi t) - 2\pi(t+\delta)\sin(2\pi t), \ \ \sin(2\pi t) + 2\pi(t+\delta)\cos(2\pi t), \ \ 1\}$$

$$|\phi'(t)| = \sqrt{2 + 4\pi^2(t+\delta)^2}$$

Ne deriva che

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{2 + 4\pi^2(t+\delta)^2}\, dt$$

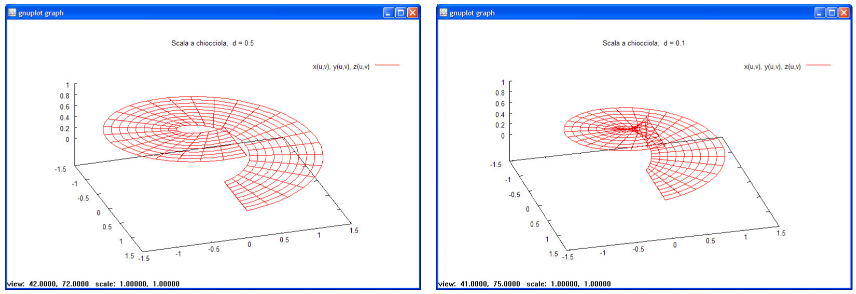


FIGURA 1. $d = 0.5, \quad d = 0.1$

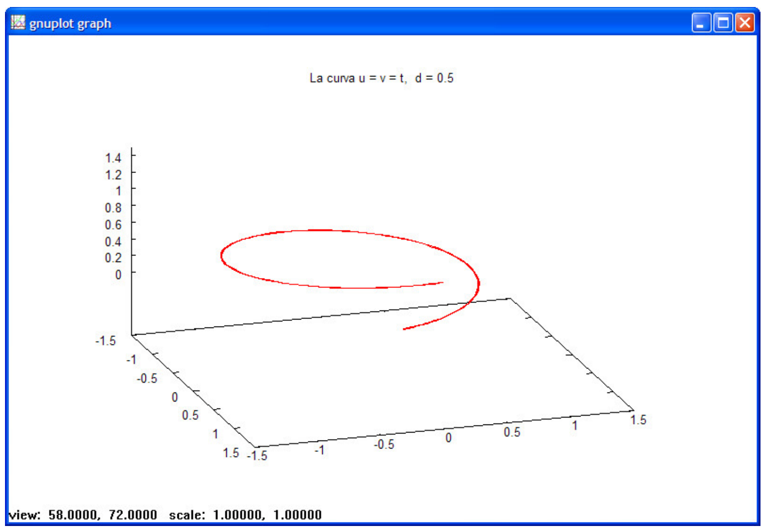


FIGURA 2. La curva $u = v = t$

2. Esercizio

Sia γ il segmento di estremi

$$P = (0,0,0), \quad Q = (1,0,0)$$

e Σ la semisfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- *determinare una rappresentazione parametrica regolare*
  - *$\phi(t)$ di γ*
  - *$X(u,v), \quad (u,v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, di Σ,*
- *scrivere le equazioni parametriche della curva $\Gamma = X(\gamma)$, immagine di γ su Σ, nella forma $\lambda(t) = X(\phi(t))$,*
- *calcolare un vettore tangente a Γ nelle due forme*

$$v = \lambda'(t), \qquad v = DX \,.\, \phi'(t)$$

- *calcolare la lunghezza di Γ.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Equazioni parametriche del segmento (curva contenuta nel piano (u,v):

$$\gamma : \quad \varphi(t) = \{t,\ 0\}, \quad t \in [0,1]$$

Equazioni parametriche della semisfera (superficie di $\mathbb{R}^3$):

$$\Sigma : \quad X(u,v) = \{u,\ v,\ \sqrt{1 - u^2 - v^2}\}, \quad (u,v) \in D$$

Equazioni parametriche della curva (curva di $\mathbb{R}^3$):

$$\Gamma : \quad \lambda(t) = X(\varphi(t)) = \{t,\ 0,\ \sqrt{1 - t^2}\}, \quad t \in [0,1]$$

Vettore tangente (prima forma):

$$\overrightarrow{\tau} = \left\{1,\ 0,\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right\}$$

Vettore tangente (seconda forma):

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi'(t) = \{1, 0, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\}$$

Eseguendo il prodotto, DX calcolata sui punti di γ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{1,\ 0,\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right\}$$

come nella prima forma.

Lunghezza di Γ

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

3. Esercizio

(*La superficie di Enneper*).
Sia Σ *la superficie data dalle seguenti equazioni parametriche* $\Psi : D \to \mathbb{R}^3$ *dove* $D = u^2 + v^2 < 1$

$$\Psi(u, v) = \left\{ u - \frac{1}{3}(u^3 - 3uv^2), -v + \frac{1}{3}(v^3 - 3vu^2), u^2 - v^2 \right\}$$

- *Controllare che, posto* $z = u + iv$ *si ha*
$$\Psi(z) = \left(Re\left(z - \frac{z^3}{3}\right), Re\left(iz + i\frac{z^3}{3}\right), Re\left(z^2\right)\right).$$
- *Verificare che* $\Psi_u \cdot \Psi_v = 0$
- *Verificare che* $|\Psi_u| = |\Psi_v|$.
- *Calcolare* $|\Psi_u \wedge \Psi_v|$.
- *Verificare che* $\Delta\Psi^j = 0, j = 1, 2, 3.$
- *Calcolare l'area della superficie.*

SOLUZIONE:

La superficie si puó ammirare (e ruotare) nel sito:
http://mathworld.wolfram.com/EnnepersMinimalSurface.html

$$\mathrm{Re}\left(u + iv - \frac{(u+iv)^3}{3}\right) = u - \frac{u^3 - 3uv^2}{3} = \Psi_1(u, v)$$
$$\mathrm{Re}\left(i(u + iv) + i\frac{(u+iv)^3}{3}\right) = -v + \frac{-3uv^2 + v^3}{3} = \Psi_2(u, v)$$
$$\mathrm{Re}\left((u + iv)^2\right) = u^2 - v^2 = \Psi_3(u, v)$$

$$\begin{cases} X_u = & \{1 + v^2 - u^2, & -2\,u\,v, & 2\,u\} \\ X_v = & \{2\,u\,v, & -1 + v^2 - u^2, & -2\,v\} \end{cases} \quad \to \quad X_u \,.\, X_v = 0$$

$$|X_u|^2 = 4u^2 + 4u^2v^2 + 1 + 6(v^2 - u^2) + 9(v^2 - u^2)^2 = |X_v|^2$$

$$X_u \wedge X_v = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 + v^2 - u^2 & -2\,u\,v & 2\,u \\ 2\,u\,v & -1 + v^2 - u^2 & -2\,v \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{2\,u + 2\,u^3 + 2\,u\,v^2, 2\,v + 2\,u^2\,v + 2\,v^3, -1 + u^4 + 2\,u^2\,v^2 + v^4\right\}$$

$$|X_u \wedge X_v|^2 = (1 + u^2 + v^2)^4$$

L'area é pertanto

$$Area = \iint |X_u \wedge X_v|\,du\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+\rho^2)^2\,\rho d\rho =$$

$$= \pi \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}\pi$$

4. Esercizio

(*La seconda superficie di Scherk*). *Sia Σ la superficie data dalle seguenti equazioni parametriche*

$$\Psi : Q \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(u,v) = \left\{u, v, \log\left(\frac{\cos(v)}{\cos(u)}\right)\right\}.$$

dove $Q = [\pi/4, \pi/4] \times [\pi/4, \pi/4]$.

- *Trovare i punti in cui $\Psi_u \cdot \Psi_v = 0$.*
- *Trovare i punti in cui $|\Psi_u| = |\Psi_v|$.*
- *Calcolare $|\Psi_u \wedge \Psi_v|$.*
- *Calcolare l'area della superficie.*

Soluzione:

La superfice di Scherk si puó ammirare (e ruotare) nel sito:
http://mathworld.wolfram.com/ScherksMinimalSurfaces.html

Lev equazioni parametriche assegnate equivalgono alla definizione implicita

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | e^z\, \cos(x) = \cos(y)$$

$$\Psi_u = \{1, 0, \tan(u)\}, \quad \Psi_v = \{0, 1, -\tan(v)\}$$

$$\Psi_u\,.\,\Psi_v = -\tan(u)\,\tan(v) = 0 \quad \to \quad \{u = 0\} \vee \{v = 0\}$$

$$|\Psi_u|^2 = 1 + \tan^2(u), \quad |\Psi_v|^2 = 1 + \tan^2(v)$$

$$|\Psi_u| = |\Psi_v| \quad \to \quad \tan^2(u) = \tan^2(v) \quad \to \quad u = \pm v$$

$$\Psi_u \wedge \Psi_v = \{\tan(u),\ \tan(v),\ 1\}$$

$$Area = \iint_Q \sqrt{1+\tan^2(u)+\tan^2(v)}\,du\,dv$$

5. Esercizio

Sia $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ *l'operatore di Laplace in* $\mathbb{R}^3$

- *si provi che*
$$G(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$
è armonica in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
- *si scriva* Δ *in coordinate cilindriche* $\{\rho,\theta,z\}$ *e si verifichi che*
$$G(x,y,z) = \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}$$
è armonica.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\, x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

Ne segue che

$$\triangle\, G(x,y,z) = -3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3(x^2+y^2+z^2)\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = 0$$

Per quanto riguarda il laplaciano in coordinate cilindriche basta ricordare che

$$\frac{\partial^2}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta}$$

da cui

$$\triangle\, G = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho^2+z^2)^{-1/2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2+z^2)^{-1/2} + \frac{\partial^2}{\partial\, z^2}(\rho^2+z^2)^{-1/2} =$$

$$-3(\rho^2+z^2)^{-3/2} + 3(\rho^2+z^2)\,(\rho^2+z^2)^{-5/2} = 0$$

6. Esercizio

Determinare i polinomi

$$P = P(x, y, z)$$

di grado due che soddisfano l'equazione di Laplace

$$\Delta P = 0 \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

SOLUZIONE:

Tutti i polinomi di primo grado

$$a\,x + b\,y + c\,z + d$$

soddisfano l'equazione di Laplace qualunque siano i coefficienti a, b, c, d: infatti le derivate seconde dei polinomi di primo grado sono tutte nulle.

Tutti i polinomi di secondo grado

$$a\,xy + b\,xz + c\,yz$$

soddisfano l'equazione di Laplace qualunque siano i coefficienti a, b, c: infatti le derivate seconde pure ∂_{xx}, ∂_{yy}, ∂_{zz} sono tutte nulle.

I polinomi

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2$$

soddisfano l'equazione di Laplace se e solo se

$$a + b + c = 0$$

Quindi i polinomi di secondo grado che soddisfano l'equazione di Laplace sono i seguenti

$$ax^2 + by^2 - (a + b)z^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz + \delta x + \eta y + \lambda z + \mu$$

qualunque siano i valori attribuiti ai 9 coefficienti usati.

7. Esercizio

Si cerchino soluzioni dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ *nelle forme*

- $u(x, y) = a(x)b(y)$ *in dimensione due*
- $v(x, y, z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ *in dimensione tre.*

SOLUZIONE:

- $$\triangle\,(a(x)b(y)) = a''(x)\,b(y) + a(x)\,b''(y) \quad \to \quad \frac{a''(x)}{a(x)} + \frac{b''(y)}{b(y)} = 0$$

  da cui segue

  $$\begin{cases} a''(x) - \lambda\, a(x) = 0 \\ b''(y) + \lambda\, b(y) = 0 \end{cases} \qquad \forall\lambda,\in\mathbb{R}$$

- $$\triangle\,(\alpha(x)\beta(y)\gamma(z)) = \alpha''\beta\gamma+\alpha\beta''\gamma+\alpha\beta\gamma'' \quad \to \quad \frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)}+\frac{\beta''(y)}{\beta(y)}+\frac{\gamma''(z)}{\gamma(z)} = 0$$

  da cui segue

  $$\begin{cases} \alpha''(x) + \lambda\,\alpha(x) = 0 \\ \beta''(y) + \mu\,\beta(y) = 0 \\ \gamma''(z) - (\lambda+\mu)\gamma(z) = 0 \end{cases} \qquad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$$

8. Esercizio

Sia γ la curva chiusa di equazioni parametriche

$$t \to \phi(t) \equiv \left\{\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t),\quad \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right\} \qquad t\in[-\pi,\ \pi]$$

- *si calcoli il vettore tangente quando $t\in(-\pi,\pi)$.*
- *si calcoli il vettore $\dot\phi(-\pi)$ e $\dot\phi(\pi)$.*
- *si dica se esiste il vettore tangente a γ nel punto*

$$P = \phi(-\pi) = \phi(\pi) = \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\phi'(t) = \{-\sin(t) - \sin(2t),\ \cos(t) + \cos(2t)\}$$

$$|\phi'(t)| = \sqrt{2(1+\cos(t)}$$

$$\phi'(\pm\,\pi) = \{0,\ 0\}$$

Il versore tangente é

$$\overrightarrow{\nu}(t) = \left\{\frac{-\sin(t) - \sin(2t)}{\sqrt{2(1+\cos(t)}},\ \frac{\cos(t) + \cos(2t)}{\sqrt{2(1+\cos(t)}}\right\}$$

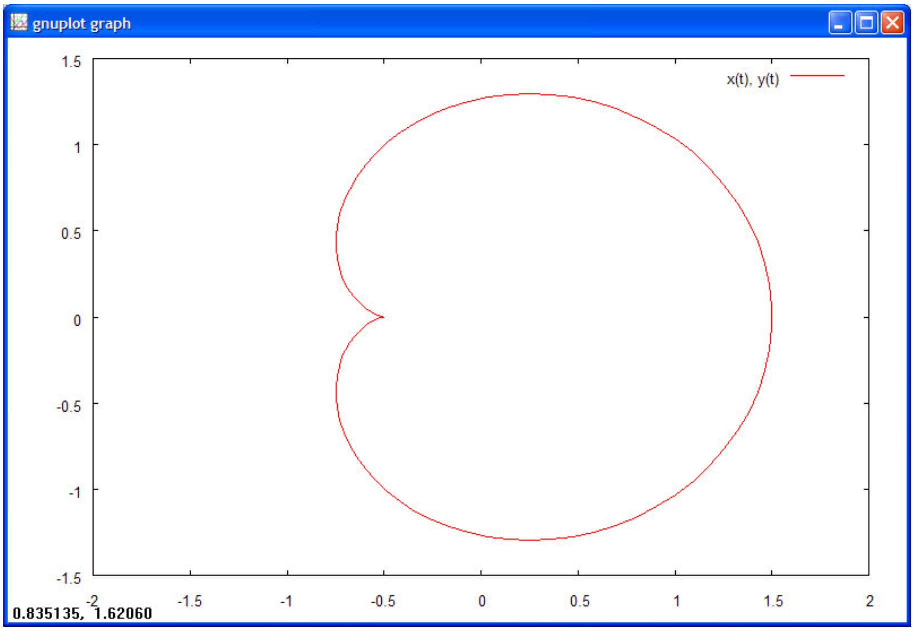


FIGURA 3. La curva γ

$$\lim_{t\to\pi^-}\overrightarrow{\nu}(t)=\{1,\,0\},\qquad \lim_{t\to-\pi^+}\overrightarrow{\nu}(t)=\{-1,\,0\}$$

Nel punto $t=\pm\pi$ non c'é il versore tangente !

9. Esercizio

Si consideri la superficie Σ di equazioni parametriche

$$(u,v)\to X(u,v)\equiv\left\{\left(2-v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u),\ \left(2-v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u),\ v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right\}$$

con $u\in[0,2\pi], v\in[-1,1]$ *ovvero* $(u,v)\in D=[0,2\pi]\times[-1,1]$.

- *Si calcoli* $X_u\wedge X_v$ *quando* $(u,v)\in \text{Interno}(D)=(0,2\pi)\times(-1,1)$.
- *Si calcoli il versore* $X_u\wedge X_v$ *nei punti* $(0,0)$ *e* $(2\pi,0)$ *la cui immagine è* $X(0,0)=X(2\pi,0)=(0,2,0)$.
- *Si deduca che la superfice non è orientabile.*

SOLUZIONE:

La superficie assegnata é un nastro di Möbius.
Il nastro di Möbius é il prototipo delle superfici non orientabili:

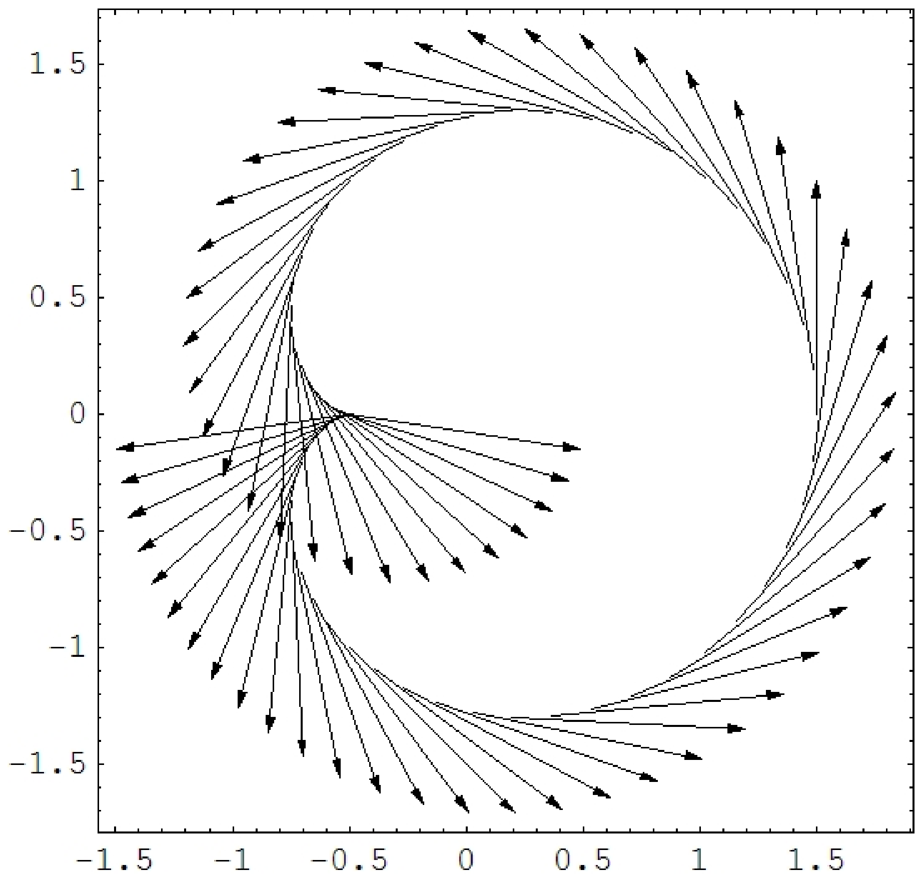


FIGURA 4. I versori tangenti a γ

- é ampiamente trattato sul secondo volume del Courant John, pag.582,
- é presente nei disegni di Escher,
- é presente nel *logo* di copertina delle dispense di Analisi Vettoriale.

Una rapresentazione parametrica é
(27)

$$X(u,v) = \begin{cases} \left(1 + v\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \\ \\ \left(1 + v\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u), \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [-0.5, 0.5] \\ \\ v\,\cos\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases}$$

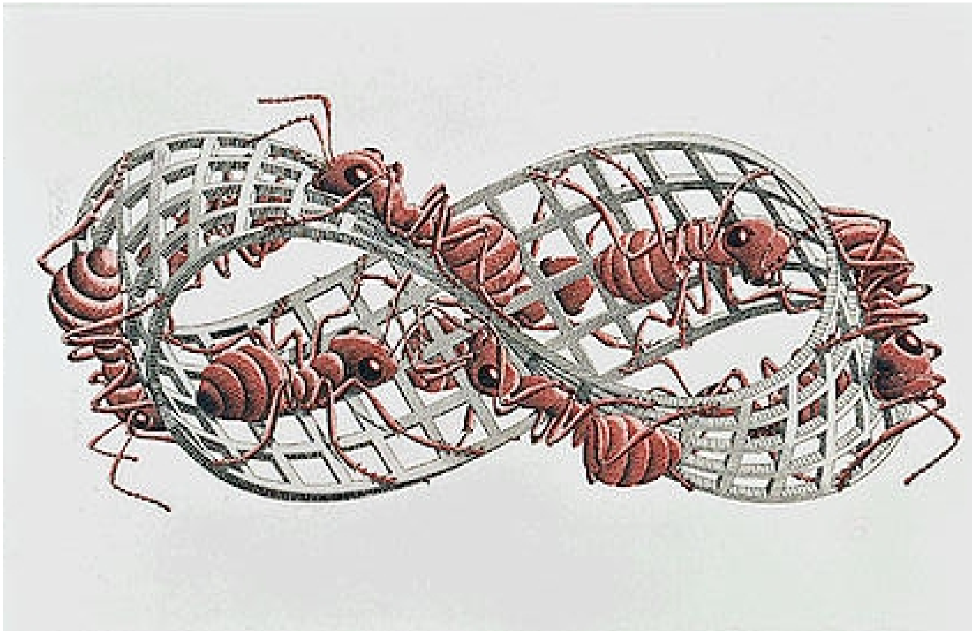


FIGURA 5. Il nastro di Möbius secondo Escher.

La realizzazione geometrica di tale superficie corrisponde a incollare l'inizio e la fine di un *nastro*

- se non é stata fatta alcuna torsione la superficie che si ottiene é un ordinario cilindro,
- se é sta fatta una (o piú) torsioni la superficie non é piú un cilindro e prende il nome appunto di *nastro di Möbius*.

Le equazioni parametriche (5) rappresentano appunto un *nastro di Möbius*, con una torsione.

Consideriamo i due vettori $X_u,\ X_v$, tangenti alla superficie:

$$X_u = \begin{cases} \dfrac{v}{2}\cos(\dfrac{u}{2})\cos(u) - \left(1 + v\sin(\dfrac{u}{2})\right)\sin(u), \\ \cos(u)\left(1 + v\sin(\dfrac{u}{2})\right) + \dfrac{v}{2}\left(\cos(\dfrac{u}{2})\sin(u)\right), \\ -\dfrac{1}{2}v\sin(\dfrac{u}{2}) \end{cases}$$

$$X_v = \begin{cases} \cos(u)\sin(\frac{u}{2}), \\ \sin(\frac{u}{2})\sin(u), \\ \cos(\frac{u}{2}) \end{cases}$$

Il vettore

$$\overrightarrow{n}(u,v) = X_u \wedge X_v$$

é normale alla superficie:
Ad esempio sui punti della superficie relativi a $v = 0$ il vettore $\overrightarrow{n}$ é

$$\overrightarrow{n}(u,0) = \left\{\cos(\frac{u}{2})\cos(u),\ \cos(\frac{u}{2})\sin(u),\ -\sin(\frac{u}{2})\right\}$$

ed é versore, cioé ha modulo 1.
Se ne consideriamo il grafico, pensandolo applicato all'origine, si perviene alla curva in Figura 6, curva *non chiusa*

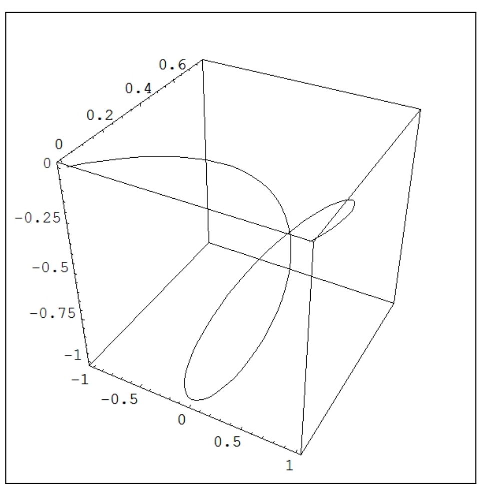


FIGURA 6. Il vettore $n(u,0)$, $u \in [0,2\pi]$

In altri termini

$$X(0,0) = X(2\pi, 0), \qquad \overrightarrow{n}(0,0) \neq \overrightarrow{n}(2\pi, 0)$$

la spiegazione tecnica sta nell'espressione di $\overrightarrow{n}(u, 0)$ di componenti

$$\cos(\frac{u}{2})\cos(u), \quad \cos(\frac{u}{2})\sin(u), \quad -\sin(\frac{u}{2})$$

periodiche di periodo 4π e non 2π come ci si aspettava.
Neanche la parametrizzazione $X(u, v)$ é periodica di periodo 2π, infatti

$$X(u + 2\pi, v) = X(u, -v)$$

che rappresenta appunto la torsione: dopo un giro i punti che corrispondevano a $v > 0$ coincidono con i simmetrici relativi a $-v$: per $v = 0$ tale simmetria non cambia nulla !
Quindi, se esistesse un versore $\overrightarrow{\nu}$ normale alla superficie, continuo, dovrebbe prendere lo stesso valore avvicinandosi al punto

$$X(0,0) = \{1, 0, 0\}$$

muovendosi da un lato o dall'altro della circonferenza

$$x^2 + y^2 = 1, \ z = 0$$

contenuta nella superficie.
Ma questo non accade perché su tale circonferenza $\overrightarrow{\nu}$ coincide con $\overrightarrow{n}(u, 0)$ il quale, avvicinandosi a

$$X(0,0) = \{1, 0, 0\}$$

dall'altro lato tende, invece, al valore opposto $-\overrightarrow{n}(0,0)$

CAPITOLO 29

Le soluzioni del foglio 7

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 7

16 Novembre 2007

1. Esercizio

Sia $\overrightarrow{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale definito sull'aperto* A.

- *Scrivere la matrice Jacobiana di* $\overrightarrow{F}$.
- *Verificare la seguente fondamentale formula dell'analisi vettoriale: data una matrice* 3×3 *reale e antisimmetrica* Q
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
si ha che
$$\forall \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad Q\xi = q \wedge \xi \quad dove\ q = (a, b, c)$$
- *Verificare che, in particolare, se si sceglie* $Q = D\overrightarrow{F}^T - D\overrightarrow{F}$, *si ha*[1]
$$Q\xi = \text{Rot}\,\overrightarrow{F} \wedge \xi$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\overrightarrow{F} = \{a,\, b,\, c\} \quad \to \quad J = \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

$$Q\xi = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

[1] In questo senso il rotore di un campo vettoriale può essere identificato con la parte antisimmetrica di DF ovvero la matrice $DF - DF^T$. Il vantaggio è che questa identificazione permette di definire il Rotore in dimensione qualunque in particolare in dimensione due,tre ma anche più alta di tre.

Sia

$$F(x,y,z) = \{a(x,y,z),\, b(x,y,z),\, c(x,y,z)\}$$

si ha

$$D\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \qquad D\overrightarrow{F}^T = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$$

$$rot(\overrightarrow{F}) = \{c_y - b_z,\ a_z - c_x,\ b_x - a_y\}$$

$$Q = D\overrightarrow{F} - D\overrightarrow{F}^T = \begin{pmatrix} 0 & a_y - b_x & a_z - c_x \\ -(a_y - b_x) & 0 & b_z - c_y \\ -(a_z - c_x) & -(b_z - c_y) & 0 \end{pmatrix}$$

É evidente che detto $\overrightarrow{r} = rot(\overrightarrow{F})$ riesce

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ -r_2 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui l'asserto

$$Q\,\xi = rot(\overrightarrow{F}) \wedge \xi$$

2. Esercizio

Sia Σ una superfice parametrizzata da

$$X : D \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

Assegnato un campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ in $\mathbb{R}^3$ sia $\overrightarrow{G}(u,v)$ il campo vettoriale definito su D come segue:

$$\overrightarrow{G}(u,v) = \left\{ \overrightarrow{F}(X(u,v)) \cdot \overrightarrow{X}_v(u,v), \quad -\overrightarrow{F}(X(u,v)) \cdot \overrightarrow{X}_u(u,v) \right\}$$

- *Calcolare la divergenza di G (assumete pure che X sia C^2).*
- *Controllate che*

  $$\mathrm{div} G = DF(X(u,v))X_u \cdot X_v - DF(X(u,v))X_v \cdot X_u$$

- *Usando l'Esercizio 1, mostrate che*

$$DF(X(u,v))X_u \cdot X_v - DF(X(u,v))X_v \cdot X_u = \mathrm{RotF} \wedge X_u \cdot X_v$$

- *Usando le proprietà del prodotto misto ($a \wedge b \cdot c = b \wedge c \cdot a$) concludete che*

$$\mathrm{div} G = \mathrm{RotF} \cdot X_u \wedge X_v.$$

Questi calcoli permettono di dare una dimostrazione della formula di Stokes quando $X \in C^2$ ma senza assumere che la superficie sia cartesiana.

SOLUZIONE:

Sia

$$\overrightarrow{F} = \{F_1,\, F_2,\, F_3\}, \quad X = \{x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\}, \quad \overrightarrow{G} = \{G_1,\, G_2\}$$

Riesce

$$G_1 = F_1.x_v + F_2.y_v + F_3.z_v, \quad G_2 = -F_1.x_u - F_2.y_u - F_3.z_u\}$$

Ne segue

$$div(G) = \frac{\partial}{\partial u} G_1 + \frac{\partial}{\partial v} G_2$$

$$\frac{\partial}{\partial u} G_1 = (F_{1x} x_u + F_{1y} y_u + F_{1z} z_u)\, x_v + F_1 x_{vu} +$$

$$+ (F_{2x} x_u + F_{2y} y_u + F_{2z} z_u)\, y_v + F_2 y_{vu} + (F_{3x} x_u + F_{3y} y_u + F_{3z} z_u)\, z_v + F_3 z_{vu} =$$

$$= F_1 x_{vu} + F_2 y_{vu} + F_3 z_{vu} + DF(X(u,v)) X_u \cdot X_v$$

$$\frac{\partial}{\partial} G_2 = -(F_{1x} x_v + F_{1y} y_v + F_{1z} z_v)\, x_v - F_1 x_{vu} +$$

$$-(F_{2x} x_v + F_{2y} y_v + F_{2z} z_v)\, y_v - F_2 y_{vu} - (F_{3x} x_v + F_{3y} y_v + F_{3z} z_v)\, z_v - F_3 z_{vu} =$$

$$-F_1 x_{vu} - F_2 y_{vu} - F_3 z_{vu} - DF(X(u,v)) X_v \cdot X_u$$

Osservato che tutti i termini contenenti le derivate seconde $x_{uv},\ y_{uv}$ si semplificano si riconosce con semplici raccoglimenti a fattor comune la relazione indicata nell'esercizio.

3. Esercizio

Data la superficie Σ definita dalla parametrizzazione

$$X(u,v) =$$

$$= (2\cos(u) + v\cos(u)\cos(u/2), 2\sin(u) + v\sin(u)\cos(u/2), v\sin(u/2))\,,$$

con $(u,v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$, si calcoli

- *il versore normale nei punti $P_u = X(u, 0)$,*
- *lo si studi al variare del parametro u,*
- *se ne deduca che la superficie non è orientabile.*

SOLUZIONE:

$$X(u,v)=\begin{cases}(R+v\cos(u/2))\cos(u) & u\in[0,2\pi]\\ (R+v\cos(u/2))\sin(u) & v\in[-1,1]\\ v\sin(u/2) & R>1\end{cases}$$

Sono tutti nastri di Möbius (vedi soluzioni del Foglio precedente).

4. Esercizio

Data la superficie cartesiana

$$\Sigma:\ \ z\ =\ 1-(x^2+y^2),\qquad (x,y)\in B(O,1),$$

- *si calcoli il versore normale nel punto* $P_0=(0,0,1)$*,*
- *si calcoli l'area della superficie,*
- *si calcoli il flusso del rotore del campo* $F=(-y,x,z)$ *attraverso la superficie,*
- *si verifichi il teorema di Stokes in questo caso particolare.*

SOLUZIONE:

I vettori normali nel caso cartesiano $z=f(x,y)$ sono espressi da

$$\overrightarrow{n}=\pm\{f_x,\ f_y,\ -1\}=\pm\{2x,\ 2y,\ 1\}$$

Quindi

$$\overrightarrow{\nu}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\{2x,\ 2y,\ 1\}$$

L'area, sempre nel caso cartesiano é, per definizione

$$Area(\Sigma)=\iint_{B(O1)}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=2\pi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\,\pi}{6}$$

Il calcolo del flusso del rotore di F corrisponde, essendo

$$rot(\overrightarrow{F})=\{0,0,2\},$$

all'integrale doppio

$$\Phi(F)=\iint_{\Sigma}rot(\overrightarrow{F})\,.\,\overrightarrow{\nu}\,d\,\sigma=2\iint_{B(O,1)}dx\,dy=2\pi$$

La verifica del teorema di Stokes corrisponde a calcolare la circuitazione di $\overrightarrow{F}$ lungo il bordo di Σ

$$\mathcal{C}:\ \ x^2+y^2=1,\quad z=0$$

Si noti in particolare che il campo $\overrightarrow{F}$ é tangente al bordo $\mathcal{C}$ di Σ e lo percorre nel verso antiorario.

$$\int_C \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\,)\, d\,\theta = 2\pi$$

5. Esercizio

Dati in $\mathbb{R}^3$ *il dominio*

$$D = \big\{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1\big\}\,,$$

e il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (0, 0, xyz)$

- *Si calcoli il flusso del campo attraverso la superficie* ∂D*.*
- *Si verifichi il teorema della divergenza in questo caso particolare.*

Soluzione:

Il dominio D é il quarto del cilindro

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

contenuto nel primo ottante.
La ∂D é composta di 5 parti:

(1) una parte curva con normale $n = \{x, y, 0\}$
(2) una parte piana contenuta nel piano $y = 0$, con normale $n\{0, -1, 0\}$
(3) una parte piana contenuta nel piano $x = 0$, con normale $n\{-1, 0, 0\}$
(4) una parte, un quarto di cerchio, contenuto nel piano $z = 0$ con normale $n = \{0, 0, -1\}$
(5) una parte, un quarto di cerchio, contenuto nel piano $z = 1$ con normale $n = \{0, 0, 1\}$

Considerato che il campo $\overrightarrow{F}$ é parallelo all'asse z il prodotto scalare $\overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu} \neq 0$ solo sulle due basi, quarti di cerchio: su quella inferiore inoltre riesce $\overrightarrow{F} = 0$, quindi

$$\Phi(F) = \iint_B xy\, dx\, dy, \qquad B : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Phi(F) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^2\, \sin(\theta)\, \cos(\theta)\, \rho\, d\rho = \frac{1}{8}$$

Tenuto conto che

$$div(\overrightarrow{F}) = xy \qquad \int\iint_D div(\overrightarrow{F})\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 dz \iint_B xy\,dx\,dy = \iint_B xy\,dx\,dy = \frac{1}{8}$$

6. Esercizio

Data la superficie cartesiana

$$\Sigma: \quad z = xy, \qquad (x,y) \in B(O,1) \subset \mathbb{R}^2,$$

si denoti con

$$X: \ \{u,\ v,\ uv\}, \quad (u,v) \in B(O,1)$$

la sua rappresentazione parametrica.

- *si provi che tale superficie è regolare ed é orientabile per* $(x,y) \in \overline{B}$,
- *si calcoli l'area di* Σ,
- *si calcoli la circuitazione del campo* $\overrightarrow{H} = (z^2, x^2, y^2)$ *lungo* $\Gamma \equiv X(\partial B)$, *percorsa nel verso antiorario,*
- *Si verifichi il teorema di Stokes in questo caso particolare, orientando il versore normale in* $(0,0,0)$ *in modo che risulti essere* $(1,0,0)$.

SOLUZIONE:

$$X(u,v) = \{u,\ v,\ uv\}, \quad u^2 + v^2 < 1$$

La superficie cartesiana $z = f(x,y)$, $f \in C^1$ é sempre regolare e orientabile.

$$Area(\Sigma) = \iint_B |X_u \wedge X_v|\,du\,dv = \iint_B \sqrt{1+u^2+v^2}\,du\,dv =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$$

Tenuto presente che ∂B, la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 si rappresenta con

$$u(t) = \cos(t), \ \ v(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

si riconosce che

$$\Gamma := \ \{\cos(t), \sin(t),\ \cos(t)\ \sin(t)\}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ne segue quindi che, detto $\overrightarrow{\tau}$ il versore tangente

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{4\cos^4(t) + 2 - 2\cos^2(t)}}\{-\sin(t),\, \cos(t),\, \cos^2(t) - \sin^2(t)\}$$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{H}\,.\,\overrightarrow{\tau}\,ds = \int_0^{2\pi} \left\{-\cos^3(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) + \sin^2(t)(\cos^2(t) - \sin^2(t))\right\}\,dt = -\frac{\pi}{2}$$

Verifica della formula di Stokes:

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{H}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \\ z^2 & y^2 & x^2 \end{pmatrix} = \{2y,\, 2z,\, 2x\}$$

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\{y, x, -1\} \quad \to \quad \overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\{-y,\, -x,\, 1\}$$

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot}(\overrightarrow{H})\,.\,\overrightarrow{\nu}\,d\sigma = \iint_B (-2y^2 - 2z + 2x)dx\,dy =$$
$$= \iint_B (-2y^2)\,dx\,dy = -\frac{\pi}{2}$$

7. Esercizio

Siano dati

$$a, u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F, G \in C^2$$

Si verifichino le seguenti formule (o alternativamente si verifichi almeno che sono "dimensionalmente" corrette

$$\begin{array}{ll} div(a\,\overrightarrow{F}) & = \overrightarrow{\nabla} a\,.\,\overrightarrow{F} + a\,div(\overrightarrow{F}) \\ rot(a\,\overrightarrow{F}) & = \nabla a \,\wedge\, \overrightarrow{F} + a\,rot(\overrightarrow{F}) \\ div(\overrightarrow{F} \,\wedge\, \overrightarrow{G}) & = \overrightarrow{G}\,.\,rot(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F}\,.\,rot(\overrightarrow{G}) \end{array}$$

- *Si calcoli* $rot(u\nabla v)$.
- *Si calcoli* $div(\nabla u \wedge \nabla v)$.
- *Dedurre che, per ogni* $u, v \in C^2$ *si ha* $div(Rot(u\nabla v)) = 0$.
- *Si verifichi in dimensione due e tre che per ogni matrice reale antisimmetrica* Q *si ha*

$$div(Q\,.\,\nabla u) = 0$$

In dimensione due si verifichi che se $divF = 0$, $Rot(QF) = 0$.

SOLUZIONE:

Le verifiche richieste possono essere eseguite senza difficoltá: un modo per riconoscere piú rapidamente le relazioni proposte é collaudarle in relazione a campi vettoriali $\overrightarrow{F}$ o $\overrightarrow{G}$ che abbiano una sola componente diversa da 0.
Superato il collaudo per tali campi il risultato generale discende per linearitá.

8. Esercizio

Siano dati

$$U = \{u, v\}, \quad A = \{a, b, c\}$$

essendo $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $a, b, c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2.
Siano $D \subset R^2$ *e* $B \subset R^3$ *rispettivamente il disco e la palla unitaria,* $u = 0$ *su* ∂D *e* $a = 0$ *su* ∂B.
Calcolare

- $$\int_D \det DU(x, y) dxdy,$$
- $$\int_B \det DA(x, y, z) dxdydz,$$

Verificare prima le formule

$$i) \quad \operatorname{div}(uv_y, -uv_x) = \det DU \quad , \quad ii) \quad \operatorname{div}(a\nabla b \wedge \nabla c) = \det DA.$$

e poi applicare il teorema della divergenza.

SOLUZIONE:

Tenuto conto che

$$\det(DU) = div(\{uv_y,\ -uv_x\} \quad \to \quad \int_D \det DU(x, y) dxdy = \int_{\partial D} \{uv_y,\ -uv_x\} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = 0$$

$$\int_B \det DA(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial B} div(a\nabla b \wedge \nabla c)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \int_{\partial B} (a\nabla b \wedge \nabla c) \,.\, \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 0$$

CAPITOLO 30

Le soluzioni del foglio 8

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 8

7 dicembre 2007

1. Esercizio

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = P(t)y(t) \\ y(0) = c \end{cases}$$

- *Trovare la soluzione in dipendenza del parametro c quando $P(t) = 1 + 3t^2$*
- *Trovare la soluzione quando $P(t) = t^2$ e $c = 0$.*
- *Infine considerare il caso P polinomio arbitrario e c costante arbitraria.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione assegnata é lineare del primo ordine, omogenea:

$$y' = P(t)y(t) \quad \to \quad y(t) = K\, e^{\displaystyle\int_0^t P(\tau)\, d\tau}$$

quindi,

- nel caso

$$P(t) = 1 + 3t^2 \quad \to \quad \int_0^t P(\tau)\, d\tau = t + t^3 \quad \to \quad y(t) = K\, e^{t+t^3}$$

  la condizione iniziale

$$y(0) = c \quad \to \quad K = c \quad \to \quad y(t) = c\, e^{t+t^3}$$

- nel caso $c = 0$ non importa neanche sapere quale sia $P(t)$: la soluzione é

$$y(t) \equiv 0$$

- se P é un polinomio qualsiasi riesce
$$y(t) = c\,e^{Q(t)}, \quad Q(t) = \int_0^t P(\tau)\,d\tau$$

2. Esercizio

Si scriva ciascuna delle seguenti equazioni come un sistema del primo ordine.
$$y'' + 5y' - y = f, \quad y''' + 2y'' + 5y' - y = g, \quad y''' - y = h$$

SOLUZIONE:

- Posto $y' = y_1$ si ha
$$y'' + 5\,y' - y = f \Leftrightarrow \begin{cases} y' = & y_1 \\ y_1' = & -5\,y_1 + y + f \end{cases}$$
- Posto $y' = y_1,\ y'' = y_2$ si ha
$$y''' + 2y'' + 5y' - y = g \Leftrightarrow \begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = -2y_2 - 5y_1 + y + g \end{cases}$$
- Posto $y' = y_1,\ y'' = y_2$ si ha
$$y''' - y = h \Leftrightarrow \begin{cases} y' = & y_1 \\ y_1' = & y_2 \\ y_2' = & y + h \end{cases}$$

3. Esercizio

Scrivere la soluzione generale dell'equazione

(28)
$$y'(x) + \frac{1}{x(1+x)} y(x) = 0.$$

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é lineare, omogenea, del primo ordine:
$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \left(\log\left(\frac{|x|}{|1+x|}\right)\right)'$$
é definito in $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$: cioé é definito in tre intervalli diversi
$$I_1 := (-\infty, -1), \quad I_2 := (-1, 0), \quad I_3 := (0, +\infty)$$

É ragionevole attendersi una diversa espressione delle soluzioni in ciascuno dei tre intervalli.

$$y(x) = c\, e^{-\log\left(\frac{|x|}{|1+x|}\right)} = \begin{cases} c_1 \dfrac{1+x}{x} & x \in I_1 \\ c_2 \dfrac{1+x}{x} & x \in I_2 \\ c_3 \dfrac{1+x}{x} & x \in I_3 \end{cases}$$

I problemi di Cauchy proponibili per l'equazione assegnata sono i seguenti

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0 \\ y(x_1) = y_1 & x \in I_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0 \\ y(x_2) = y_2 & x \in I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0 \\ y(x_3) = y_3 & x \in I_3 \end{cases}$$

Le rispettive soluzioni $y_k(x)$, vedi Figura 1, saranno funzioni definite nei corrispondenti intervalli I_k.

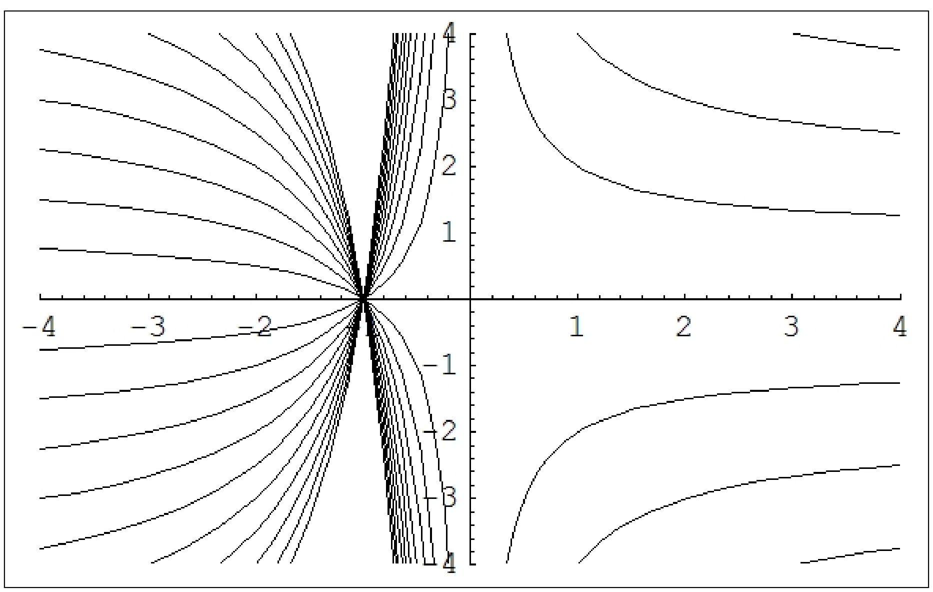


FIGURA 1. Le soluzioni di $y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0$

É evidente che:

- $\forall k$
$$y_k' = -\frac{1}{x(1+x)} y_k(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \to \quad \lim_{x\to -1} y_k'(x) = -1$$
- qualunque siano $x_1 \in I_1, \; y_1$ riesce
$$\lim_{x\to -\infty} y_1(x) = \frac{x_1 y_1}{1+x_1}, \qquad \lim_{x\to -1^-} y_1(x) = 0$$
- qualunque siano $x_2 \in I_2, \; y_2$ riesce
$$\lim_{x\to -1^+} y_2(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} y_2(x) = \begin{cases} +\infty & se \quad y_2 > 0 \\ -\infty & se \quad y_2 < 0 \end{cases}$$
- qualunque siano $x_3 \in I_3, \; y_3$ riesce
$$\lim_{x\to 0^+} y_3(x) = \begin{cases} +\infty & se \quad y_3 > 0 \\ -\infty & se \quad y_3 < 0 \end{cases}, \qquad \lim_{x\to +\infty} y_3(x) = 0$$

In Figura 2 il campo vettoriale
$$T := \left\{ \frac{|x|\,|1+x|}{\sqrt{x^2\,(1+x)^2 + y^2}}, \; -\frac{y\,|x|\,|1+x|}{x\;(1+x)\;\sqrt{x^2\,(1+x)^2+y^2}} \right\}$$
delle tangenti alle soluzioni dell'equazione $y'(x) + \dfrac{1}{x(1+x)} y(x) = 0$

4. Esercizio

Si controlli se sono linearmente indipendenti le seguenti funzioni
$$e^x, \quad e^{-x}, \qquad \cosh(x)$$
$$e^x, \quad x^3 e^x$$
$$e^x, \quad P(x)e^x \qquad \text{con} \quad P(x) \quad \text{polinomio non costante}$$

Soluzione:

La dipendenza lineare tra due o piú funzioni equivale a dire che una di esse si esprime come combinazione lineare delle altre.
Pertanto, tenuto conto che
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\, e^x + \frac{1}{2}\, e^{-x}$$
si riconosce che le tre prime funzioni sono linearmente dipendenti.

$e^x, \quad x^3\, e^x$ sono linearmente indipendenti: infatti $1, \; x^3$ sono linearmente indipendenti e quindi lo sono anche tutte le coppie
$$g(x), \quad g(x)\, x^3$$

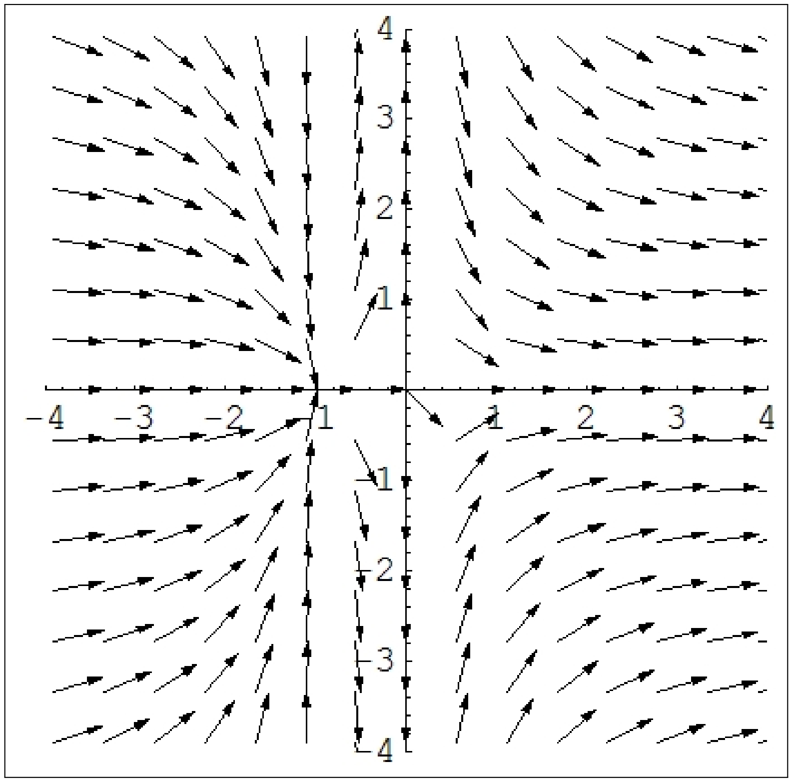


FIGURA 2. Il campo vettoriale delle tangenti

ottenute moltiplicando per un fattore non nullo.
Del resto se esistessero due costanti $c_1,\ c_2$ non entrambe nulle tali che

$$c_1\, e^x + c_2\, e^x\, x^3 \equiv 0 \quad \to \quad e^x \left(c_1 + c_2 x^3\right) \equiv 0 \quad \to \quad c_1 + c_2 x^3 \equiv 0$$

Discorso analogo per la terza coppia: se $P(x)$ é un polinomio non costante allora $1,\ P(x)$ sono linearmente indipendenti, e allora sono linearmente indipendenti anche $e^x,\ e^x\, P(x)$.

OSSERVAZIONE 4.1. *Un controllo automatico puó essere eseguito sulle ultime due coppie calcolando il determinante Wronskiano:*

- $\{e^x,\ x^3 e^x\}$

$$\begin{vmatrix} e^x & x^3 e^x \\ e^x & 3x^2 e^x + x^3 e^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x^3 e^x \\ 0 & 3x^2 e^x \end{vmatrix} = 3x^2 e^{2x} \neq 0$$

- $\{e^x,\ P(x)\, e^x\}$

$$\begin{vmatrix} e^x & P(x)\, e^x \\ e^x & P'(x)\, e^x + P(x)\, e^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & P(x)\, e^x \\ 0 & P'(x)\, e^x \end{vmatrix} = P'(x)\, e^{2x} \neq 0$$

se fossero state linearmente dipendenti i due determinanti sarebbero dovuti essere entrambi nulli !
Si noti che i determinanti ottenuti non sono identicamente nulli: tuttavia si annullano in qualche punto....
Non sono quindi i determinanti Wronskiani delle soluzioni di una stessa equazione lineare del secondo ordine.
In altri termini né $\{e^x,\ x^3e^x\}$ *né* $\{e^x,\ P(x)\,e^x\}$ *sono soluzioni di equazioni lineari del secondo ordine.*

5. Esercizio

Sia σ *una funzione positiva definita su* $\mathbb{R}$. *Si consideri il problema*

$$\begin{cases} \big(\sigma(t)y'(t)\big)' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = c \end{cases}$$

- *Si determini la soluzione quando* $c = 1$
- *Si determini la soluzione per* c *arbitrario.*

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata implica, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\sigma(t)y'(t) = k, \quad y'(t) = \frac{k}{\sigma(t)}, \quad y(t) = y(0) + k\int_0^t \frac{1}{\sigma(\tau)}\,d\tau$$

Soluzioni del problema proposto, $y(0) = 0,\ \ y(1) = c$ sono pertanto

$$y(t) = k_c\int_0^t \frac{1}{\sigma(\tau)}\,d\tau, \quad k_c = \frac{c}{\int_0^1 \frac{1}{\sigma(\tau)}\,d\tau}$$

L'ipotesi $\sigma(t)$ positiva é stata usata piú volte:

- per considerare la reciproca $1/\sigma(t)$
- per poter dividere per $\int_0^1 \dfrac{1}{\sigma(\tau)}\,d\tau$

Trovata una soluzione occorre decidere se ci sia o meno il teorema di unicitá.
Supponiamo che $y_1(t)$ e $y_2(t)$ siano due soluzioni: per linearitá si riconosce che

$$w(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

é soluzione del problema

$$\begin{cases} \big(\sigma(t)w'(t)\big)' = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma(t)w'(t) = k \\ w(0) = 0 \\ w(1) = 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che, teorema di Rolle, $w'(t_0) = 0$ in un opportuno $t_0 \in (0,1)$ si deduce che

$$\sigma(t_0)w'(t_0) = k \quad \to \quad k = 0, \quad \to \quad w'(t) = 0$$

Ma allora $w(t)$ é costante in $[0,1]$ e quindi, essendo nulla in $t = 0$ é nulla in tutto l'intervallio.
In altri termini riesce, necessariamente

$$y_1(t) = y_2(t)$$

6. Esercizio

Date le funzione continue b e c con c mai nulla, si consideri l'equazione

$$y'' + 2b(t)y' - c^2(t)y(t) = 0$$

Sia y una soluzione dell'equazione in $[0,1]$:

- *controllare che se y ha un minimo in $t = t_0 \in (0,1)$, allora $y(t_0) \geq 0$.*
- *supponiamo che $y(0) = 1$ e $y(1) = 2$: dedurne che $y \geq 0$ in $[0,1]$.*

Soluzione:

- se t_0 é un punto di minimo interno riesce $y'(t_0) = 0,\ y''(t_0) \geq 0$: ne segue pertanto, dall'equazione differenziale calcolata in t_0

$$y''(t_0) - c^2(t_0)y(t_0) = 0 \quad \to \quad y(t_0) = \frac{y''(t_0)}{c^2(t_0)} \geq 0$$

- Considieriamo il minimo di $y(t)$ in $[0,1]$
  - se il minimo é raggiunto per $t = 0$ allora

$$\min_{t\in[0,1]} y(t) = 1 \quad \to \quad y(t) \geq 1\ \forall t \in [0,1]$$

  - se il minimo é raggiunto in un punto interno $t_0 \in (0,1)$ riesce, come riconosciuto nella prima domanda,

$$y(t_0) \geq 0 \quad \to \quad y(t) \geq 0\ \forall t \in [0,1]$$

  - il minimo non puó cadere in $t = 1$ per... ovvie ragioni !

7. Esercizio

Scrivere la soluzione generale dell'equazione

$$y'' + 2by' + y(t) = 0$$

- *quando* $b = \pm 1$,
- *in funzione del parametro* $b \in \mathbb{R}$

SOLUZIONE:

L'equazione $y'' + 2by' + y(t) = 0$ é un'equazione differenziale lineare di ordine 2, omogenea a coefficienti costanti: le sue soluzioni costituiscono pertanto uno spazio vettoriale V di dimensione 2.
V é costituito dalle combinazioni lineari di due soluzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente indipendenti dell'equazione, soluzioni collegate alle radici λ dell'equazione algebrica di secondo grado in λ

$$\lambda^2 + 2\,b\,\lambda + 1 = 0 \quad \to \quad \lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

- caso $b = 1$

$$\lambda = -1, \quad \to \quad \begin{cases} y_1(x) = e^{-x} \\ y_2(x) = x\,e^{-x} \end{cases}$$

- caso $b = -1$

$$\lambda = 1, \quad \to \quad \begin{cases} y_1(x) = e^{x} \\ y_2(x) = x\,e^{x} \end{cases}$$

- caso $b \neq \pm 1$

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - 1} \quad \to \quad \begin{cases} y_1(x) = e^{\left(-b - \sqrt{b^2-1}\right)x} \\ \\ y_2(x) = e^{\left(-b + \sqrt{b^2-1}\right)x} \end{cases}$$

8. Esercizio

Data l'equazione differenziale lineare

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 0,$$

- *si verifichi che la funzione* $w(x) = -1/2x$ *è soluzione,*
- *si provi l'esistenza di un'altra soluzione della forma*

$$y(x) = a(x)\,.\,w(x)$$

- *si determini lo spazio vettoriale* V *delle soluzioni dell'equazione.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

L'equazione assegnata,

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = 0, \quad x \neq 0$$

é un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, omogenea a coefficienti non costanti.
L'insieme delle soluzioni di tale equazione costituisce uno spazio vettoriale V di dimensione $n = 2$.
A priori non abbiamo alcun algoritmo esplicito (algebrico, integrale, ecc.) che produca soluzioni di tale equazione.

- La funzione $w(x) = -1/2x$ é soluzione: verifica

$$\begin{cases} \dfrac{w(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}\,x^{-3}, \\ \\ \dfrac{w'(x)}{x} = \dfrac{1}{2}\,x^{-3}, \qquad \to \qquad -x^{-3} + \dfrac{1}{2}\,x^{-3} + \dfrac{1}{2}\,x^{-3} = 0 \\ \\ w''(x) = -x^{-3} \end{cases}$$

- posto $y(x) = a(x)\,.\,w(x)$ si ha

$$\begin{cases} y(x) = a(x)\,.\,w(x) \\ \\ y'(x) = a'(x)\,.\,w(x) + a(x)\,.\,w'(x) \\ \\ y''(x) = a''(x)\,.\,w(x) + 2a'(x)\,.\,w'(x) + a(x)\,.\,w''(x) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione si ha (o si dovrebbe avere)

$$a''\,.\,w + 2a'\,.\,w' + a\,.\,w'' + \frac{a'\,.\,w + a\,.\,w'}{x} - \frac{a\,.\,w}{x^2} = 0$$

Raccogliendo a fattor comune $a(x)$ si ha

$$a(x)\,.\,\left(w'' + \frac{w'}{x} - \frac{w}{x^2}\right) = 0$$

dal momento che l'espressione in w'', w', w in parentesi vale zero perché w é soluzione dell'equazione. Quindi la precedente espressione si riduce a

$$a''\,.\,w + 2a'\,.\,w' + \frac{a'\,.\,w}{x} = 0$$

Posto $a' = b$ l'espressione precedente si riduce a

$$b'\,.\,w + b\left(2\,w' + \frac{w}{x}\right) = 0$$

equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine in b

$$b' = \frac{1}{x}\, b \quad \to \quad b(x) = c\, x \quad \to \quad a(x) = c\, \frac{1}{2}\, x^2 + k$$

da cui

$$y(x) = -\left(c\, \frac{1}{2}\, x^2 + k\right) \frac{1}{2x} = -\frac{c}{2}\, x - \frac{k}{2x}$$

- lo spazio V delle soluzioni dell'equazione omogenea é pertanto combinazione lineare della soluzione $w(x)$ e della nuova $y(x)$ ora trovata.

  Tali combinazioni lineari equivalgono a

$$c_1\, \frac{1}{x} + c_2\, x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

Osservazione 8.1. *La forma speciale dei coefficienti dell'equazione* $x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 0$ *suggeriva comunque di cercare sue soluzioni della forma*

$$y(x) = x^\mu$$

com μ *da determinarsi opportunamente.*
Infatti

$$\begin{cases} (x^\mu)' = \mu\, x^{\mu-1} \\ (x^\mu)'' = \mu(\mu-1)\, x^{\mu-2} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} (x\, x^\mu)' = \mu\, x^\mu \\ (x^2\, x^\mu)'' = \mu(\mu-1)\, x^\mu \end{cases}$$

da cui sostituendo nell'equazione

$$\mu(\mu-1)\, x^\mu + \mu\, x^\mu - x^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\mu-1) + \mu - 1 = 0$$

ovvero

$$\mu^2 - 1 = 0 \quad \to \quad \mu = \pm 1$$

da cui, per altra via, la scoperta che le due funzioni

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^{-1}$$

sono soluzioni dell'equazione.
La loro indipendenza lineare é evidente, e quindi lo spazio V *é generato da*

$$c_1\, \frac{1}{x} + c_2\, x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

come ottenuto giá precedentemente.

L'equazione assegnata si dice equazione di Eulero*: la forma speciale dei coefficienti ha permesso di trovare soluzioni della forma* x^μ*.*
Questo accade anche per equazioni analoghe di grado superiore quali

$$x^3 y''' + a x^2\, y'' + b\, x\, y' + c\, y = 0, \quad \textit{ecc.}$$

Vedere, ad esempio,

http://mathworld.wolfram.com/EulerDifferentialEquation.html

9. Esercizio

L'equazione di Newton per una massa m di carica $q \ll 1$ in un campo elettromagnetico si scrive nel seguente modo

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E} + \frac{q}{c}\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{H},$$

dove $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{H}$ sono, rispettivamente, il campo elettrico e il campo magnetico.
Si scriva il sistema di equazioni differenziali risultante.

SOLUZIONE:

$$\overrightarrow{X} = \{x, y, z\}, \quad \overrightarrow{E} = \{E_x,\, E_y,\, E_z\}, \quad \overrightarrow{H} = \{H_x,\, H_y,\, H_z\}$$
$$\overrightarrow{v} = \{x', y', z'\}, \quad \overrightarrow{a} = \{x'', y'', z''\}$$

$$m\,\{x'', y'', z''\} = q\,\{E_x,\, E_y,\, E_z\} + \frac{q}{c}\left(\{x', y', z'\} \wedge \{H_x,\, H_y,\, H_z\}\right)$$

$$\begin{cases} m\,x'' = q\,E_x + \dfrac{q}{c}\,(y' H_z - z' H_y) \\ \\ m\,y'' = q\,E_y + \dfrac{q}{c}\,(z' H_x - x' H_z) \\ \\ m\,z'' = q\,E_z + \dfrac{q}{c}\,(x' H_y - y' H_x) \end{cases}$$

10. Usiamo Mathematica

In Figura 3 si trovano i comandi per determinare la soluzione $u(x)$ del problema di Cauchy $y'(x) = -x\,y(x), \quad y(0) = 1$ con *Mathematica*.
Attenzione: tutti i caratteri usati sono necessari [1]

[1]**Nota:** *Mathematica* é disponibile su tutti i PC della Sapienza, collegati all'indirizzo 151.100 (laboratori di calcolo dei Dipartimenti di Matematica, Fisica, ecc.)

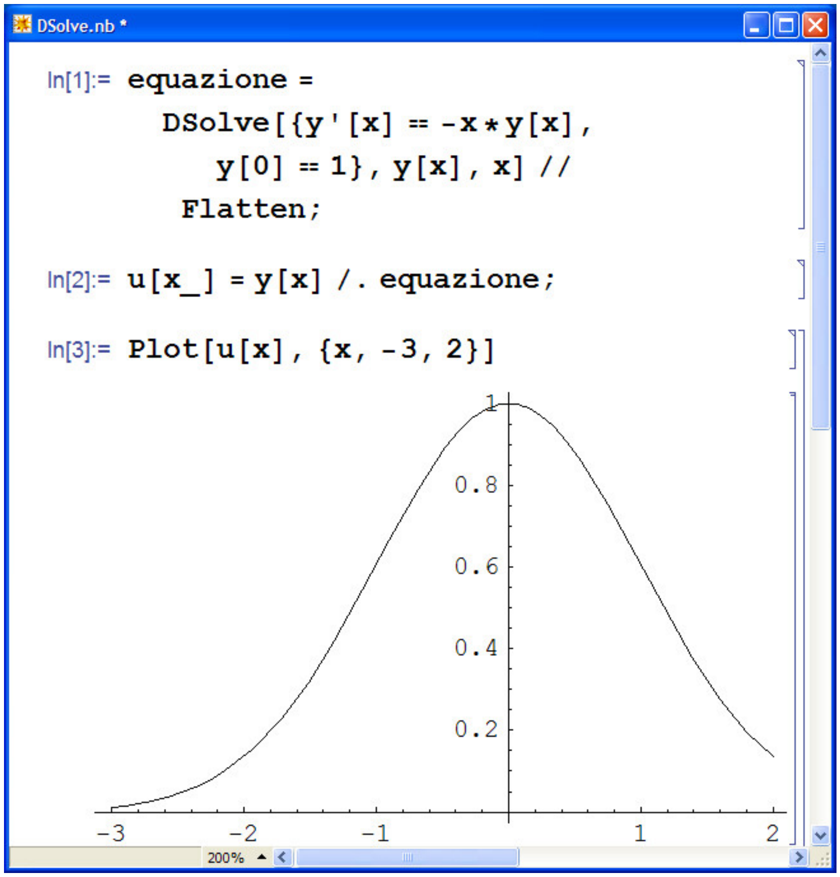


FIGURA 3. Il problema di Cauchy con Mathematica.

CAPITOLO 31

Le soluzioni del foglio 9

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 9

14 dicembre 2007

1. Esercizio

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0 \\ u(0) = a, \qquad u'(0) = 0 \end{cases},$$

si scriva l'espressione esplicita della soluzione al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ e si determini per quali valori di a la soluzione è monotona.

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é lineare del 2^0 ordine, omogenea a coefficienti costanti: due soluzioni linearmente indipendenti si determinano a partire dall'equazione algebrica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$u(t) = c_1 \, e^{-t} + c_2 \, e^{2\,t} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 & = a \\ -c_1 + 2c_2 & = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{a}{3} \left(2e^{-t} + e^{2t}\right)$$

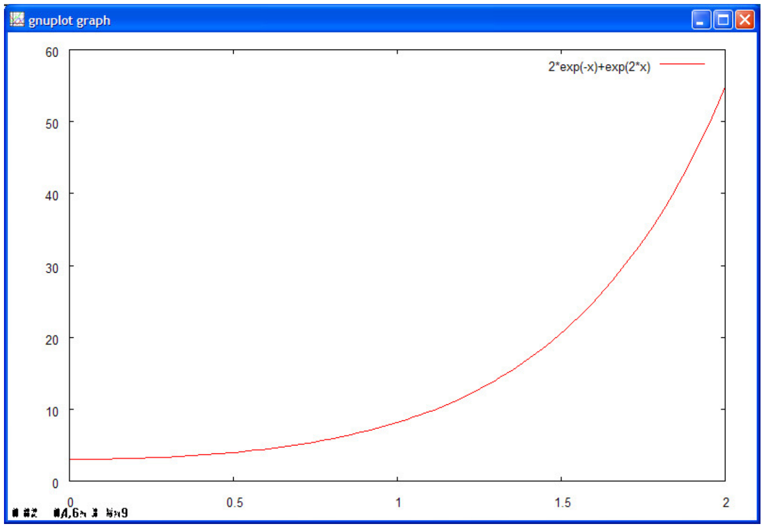


FIGURA 1. $u(t) = (2e^{-t} + e^{2t}) \quad a = 3$

Le soluzioni $u(t)$ sono monotone crescenti se $a > 0,\ t \geq 0$, monotone decrescenti se $a > 0,\ t \leq 0$: viceversa se $a < 0$.
Per $a = 0$ la soluzione é, ovviamente, la costante nulla.
La soluzione $u \equiv 0$ é una soluzione d'equilibrio, non stabile: infatti basta partire da un dato iniziale $a \neq 0$ per allontanarsi definitivamente (e rapidamente) dall'equilibrio.

OSSERVAZIONE 1.1. *Indicata con $u_a(t)$ la soluzione del problema di Cauchy assegnato*

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0 \\ u(0) = a, \qquad u'(0) = 0 \end{cases},$$

riesce evidentemente

$$u_a(t) = a\, u_1(t)$$

essendo $u_1(t)$ la soluzione del problema relativo ad $a = 1$.

2. Esercizio

Data la seguente equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = \sin(t),$$

si discuta l'esistenza di soluzioni infinitesime per t che tende a $+\infty$.

SOLUZIONE:

Soluzioni dell'omogenea $u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = 0$,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} - 2\,i \\ \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} + 2\,i \end{cases}$$

$$v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$$

Soluzione dell'equazione completa:

$$y(t) = A\,\cos(t) + B\,\sin(t) \quad \rightarrow$$

$$(-A + 2B + 5A)\cos(t) + (-B - 2A + 5B)\sin(t) = \sin(t)$$

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 0 \\ -B - 2A + 5B = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{10} \\ \\ B = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{10}\,\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$$

Le soluzioni dell'equazione non omogenea assegnata sono tutte espresse nella forma

$$Y(t) = e^{-t/2}\,\{c_1\,\cos(2t) + c_2\,\sin(2t)\} + \left\{-\frac{1}{10}\,\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)\right\}$$

La prima metá degli addendi che compongono $Y(t)$ é infinitesimi, l'altra metá sono periodici: quindi nessuna delle funzioni $Y(t)$ puó essere infinitesima !

3. Esercizio

Si scriva l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$\begin{array}{l} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = t + \cos(t/2) \\ u''(t) + u'(t) = te^t + \sin(t) \\ u''(t) + u(t) = \sin(t) \end{array} .$$

Soluzione:

$$\boxed{u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = t + \cos(t/2)}$$

Occorre determinare

- tutte le soluzioni $v(t)$ dell'omogenea $u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0$

- una soluzione $y_1(t)$ dell'equazione

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = t$$

- una soluzione $y_2(t)$ dell'equazione

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = \cos(t/2)$$

e poi sommare....
Soluzioni dell'omogenea: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$

$$v(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Soluzione della prima completa: si cerca una soluzione nella forma $y_1(t) = At + B$.
Sostituendo si perviene alla condizione

$$3A + 2At + 2B = t \quad \to \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -3/4 \end{cases}$$

ovvero

$$y_1(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$$

Soluzione della seconda completa: si cerca una soluzione nella forma

$$y_2(t) = A\cos(t/2) + B\sin(t/2)$$

Sostituendo si ottiene

$$\left(-\frac{A}{4} + \frac{3B}{2} + 2A\right)\cos(t/2) + \left(-\frac{B}{4} - \frac{3A}{2} + 2B\right)\sin(t/2) = \cos(t/2)$$

da cui segue, perché l'equazione sia soddisfatta,

$$\begin{cases} -\dfrac{A}{4} + \dfrac{3B}{2} + 2A \quad = 1 \\ \\ -\dfrac{B}{4} - \dfrac{3A}{2} + 2B \quad = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} A = \dfrac{28}{85} \\ \\ B = \dfrac{24}{85} \end{cases}$$

da cui

$$y_2(t) = \frac{28}{85}\cos(t/2) + \frac{24}{85}\sin(t/2)$$

$\boxed{u''(t) + u(t) = \sin(t)}$

Occorre determinare

- Tutte le soluzioni $v(t)$ dell'omogenea $u''(t) + u(t) = 0$

$$v(t) = c_1\,\cos(t) + c_2\,\sin(t)$$

- Una soluzione $y_1(t)$ dell'equazione completa.

$$y_1(t) = t(A\cos(t) + B\sin(t)) \quad \to \quad y_1(t) = -\frac{t}{2}\cos(t)$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto

$$y(t) = c_1\,\cos(t) + c_2\,\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t)$$

Poiché

- la forza applicata ha la stessa frequenza delle soluzioni dell'omogenea,
- non cé attrito,

l'ampiezza delle oscillazioni aumenta al crescere di t

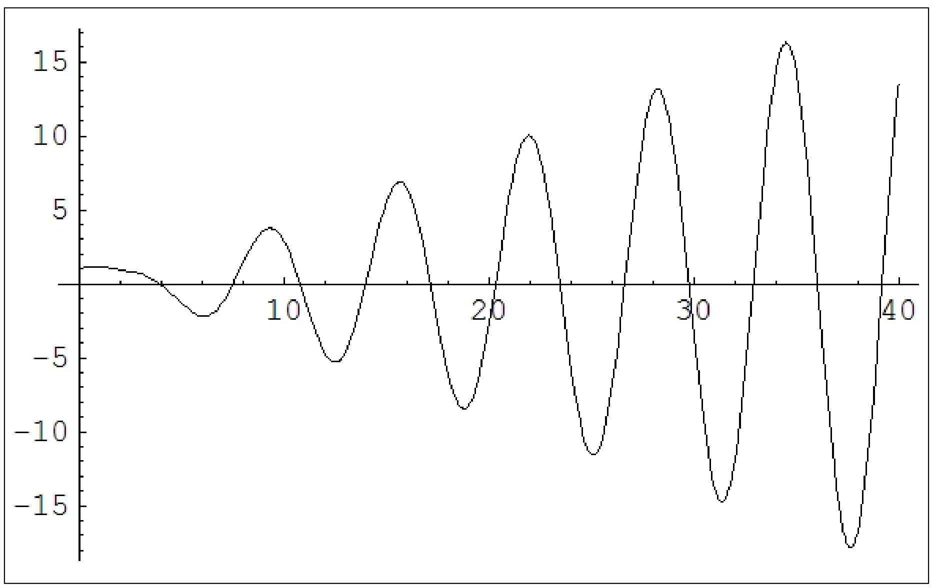


FIGURA 2. $y(t) = c_1\,\cos(t) + c_2\,\sin(t) - \dfrac{t}{2}\cos(t)$, $c_1 = 1, c_2 = 1$

4. Esercizio

Si consideri l'equazione differenziale complessa

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = e^{i\omega t}.$$

- *si calcoli l'integrale generale dell'equazione omogenea associata,*
- *si calcoli una soluzione particolare dell'equazione completa,*
- *si scriva la parte reale della soluzione particolare per* $\omega = 1, 2$ *e se ne calcoli il massimo.*

SOLUZIONE:

L'equazione omogenea é giá stata studiata nel precedente Esercizio: le sue soluzioni sono

$$v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$$

Le soluzioni dell'equazione completa sono, per ω qualsiasi

$$y(t) = \frac{1}{-\omega^2 + 2\,i\,\omega + 5}\, e^{i\,\omega\,t}$$

ovvero, evidenziando parte reale e parte immaginaria,

$$y(t) = \frac{5 - \omega^2 - 2\,i\,\omega}{(5-\omega^2)^2 + 4\,\omega^2}\, \{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\}$$

La parte reale é pertanto:

$$\frac{(5-\omega^2)\cos(\omega t) + 2\,\omega\,\sin(\omega t)}{(5-\omega^2)^2 + 4\,\omega^2}$$

$$\begin{cases} \omega = 1 \quad \to \quad \dfrac{4\cos(t) + 2\,\sin(t)}{20} \\ \\ \omega = 2 \quad \to \quad \dfrac{\cos(2t) + 4\,\sin(2t)}{17} \end{cases}$$

La ricerca del massimo

La funzione di cui cercare il massimo é

$$\varphi(t) = \frac{4\cos(t) + 2\,\sin(t)}{20}$$

nel punto t_{MAX} riesce:

$$\begin{cases} \varphi''(t_{MAX}) + 5\varphi(t_{MAX}) = \cos(t_{MAX}) \\ \varphi''(t_{MAX}) + \varphi(t_{MAX}) = 0 \end{cases}$$

avendo tenuto conto che

- $\varphi(t)$ soddisfa l'equazione differenziale e nei punti t_{MAX} riesce $\varphi'(t_{MAX}) = 0$
- $\varphi(t)$ soddisfa anche l'equazione $u'' + u = 0$

Riesce pertanto:

$$4\varphi(t_{MAX}) = \cos(t_{MAX}) \quad \to \quad \varphi(t_{MAX}) = \frac{1}{4}\cos(t_{MAX})$$

Il valore t_{MAX} si deduce da $\varphi'(t_{MAX}) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{4\cos(t_{MAX}) + 2\,\sin(t_{MAX})}{20} = \dfrac{1}{4}\cos(t_{MAX}) \\ \\ -4\sin(t_{MAX}) + 2\cos(t_{Max}) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} -\cos(t) + 2\sin(t) = 0 \\ -\cos(t) + 2\sin(t) = 0 \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{\sin(t_{MAX})}{\cos(t_{MAX})} = \frac{1}{2} \quad \to \quad t_{MAX} = 0.463648 \pm\, k\,\pi$$

Discorso analogo per $\omega = 2$

5. Esercizio

Data l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 u^3(t) + 1 \\ u(0) = 1 \end{cases},$$

- si stabilisca la validità del teorema di esistenza ed unicità,
- posto $I = [-1, 1]$ e $J = [-2, 2]$, valutare il massimo M e la costante di Lipschitz di $f(t, u) = t^2u^3 + 1$ in $I \times J$.
- stimare dal basso il tempo di esistenza.

SOLUZIONE:

Il teorema di esistenza e unicitá della soluzione del problema di Cauchy vale se

- l'espressione a secondo membro $f(t, u)$ é di classe C^1 per $t \in (t_0 - a,\ t_0 + a)$ essendo t_0 il punto iniziale assegnato, nel nostro caso $t_0 = 0$
- e per $u \in (y_0 - b,\ y_0 + b)$ essendo y_0 il valore iniziale assegnato, nel nostro caso $y_0 = 1$
- l'espressione assegnata $t^2u^3 + 1$ ha i requisiti di regolaritá richiesti,

pertanto il problema di Cauchy assegnato ha il Teorema d'esistenza e unicitá.
Riesce ovviamente

$$|f(t, u)| \le 9, \quad |f_u(t, u)| = 3|t^2\, u^2| \le 12, \quad \forall (t, u) \in I \times J$$

Le condizioni $M\,a \le b, \quad M_1\,a < 1$ implicano

$$9\,a \le 2, \quad 12\,a < 1 \quad \to \quad a < \frac{1}{12}$$

Il problema di Cauchy proposto ha soluzione almeno per

$$t \in \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$$

CAPITOLO 32

Le soluzioni del foglio 10

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 10

21 dicembre 2007

1. Esercizio

Si consideri l'equazione differenziale

$$mY''(t) + rY'(t) + kY(t) = e^{i\omega t}$$

con

$$k > 0, \quad m > 0, \quad s = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega \neq 0$$

- *Si determini l'insieme E del piano (r, s) in cui l'equazione ha una soluzione della forma*
$$Y_G(t) = Ae^{i\omega t}, \quad A \in \mathbb{C}$$
- *Per $(r, s) \in E$ si scriva la parte reale e la parte immaginaria di tale soluzione Y_G.*
- *sia $\omega = s$: dire per quali r si ha ancora una soluzione della forma $Y_G(t) = Ae^{i\omega t}, \quad A \in \mathbb{C}$.*
- *sia $\omega = s, \quad r = 0$: si trovi una soluzione della forma*
$$Y_G(t) = Ate^{i\omega t}, \quad A \in \mathbb{C}$$
- *si risolva il problema di Cauchy*
$$\begin{cases} mY''(t) + kY(t) = e^{i\omega t} \\ Y(0) = i \\ Y'(0) = 1 + 2i \end{cases}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Attenzione : il coefficiente di Y' nel foglio distribuito era $2R$: nello svolgimento é stato preso r che coincide con la scelta adottata nel libro di Courant, Volume I, pag. 642.

(1) La funzione $Y_G(t) = Ae^{i\omega t}$ soddisfa l'equazione se e solo se

$$A\left(-m\omega^2 + r\,i\,\omega + k\right) = 1 \quad \to \quad -m\omega^2 + r\,i\,\omega + k \neq 0$$

disuguaglianza soddisfatta $\forall \omega \in \mathbb{R}$ se e solo se $r \neq 0$.

L'insieme E é pertanto l'intero piano (r, s) privato dell'asse s, $r = 0$

(2)

$$Y_G(t) = \frac{1}{-m\omega^2 + r\,i\,\omega + k}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

(3) Stessa risposta della domanda 2: $r \neq 0$

(4) $r = 0$, $\omega = s$ riduce l'equazione alla forma

$$m\,Y'' + k\,Y = e^{i\,\omega t} \quad \to \quad y'' + s^2\,Y = \frac{1}{m}e^{ist}$$

Sostituendo l'espressione $Y_G(t) = Ate^{i\omega t}$ nell'equazione si perviene alla condizione

$$A = \frac{1}{2ism}$$

(5) Il problema si scrive anche nella forma

$$\begin{cases} Y''(t) + s^2 Y(t) = \frac{1}{m}e^{i\omega t} \\ Y(0) = i \\ Y'(0) = 1 + 2i \end{cases}$$

da cui si trovano

- Soluzioni dell'omogenea

$$v(t) = c_1\cos(st) + c_2\sin(st)$$

- Soluzione particolare della completa

$$\begin{cases} \omega \neq s \quad \to \quad Y_G(t) = \dfrac{1}{m(s^2 - \omega^2)}\,e^{i\,\omega t} \\[2ex] \omega = s \quad \to \quad Y_G(t) = \dfrac{1}{2ism}\,t\,e^{i\,\omega t} \end{cases}$$

Detto, a seconda dell'ω

$$y(t) = c_1\cos(st) + c_2\sin(st) + Y_G(t)$$

l'integrale generale dell'equazione, la soluzione del problema di Cauchy assegnato dipende dalla determinazione delle due costanti $c_1,\ c_2$, soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y(0) = i \\ y'(0) = 1 + 2i \end{cases}$$

2. Esercizio

Dato il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = (y+1)y(y-1) \\ y(0) = \Lambda \end{cases}$$

- *dire quali delle successive affermazioni è vera.*
  - *Se $\Lambda \in \{-1, 0, 1\}$ la soluzione è costante.*
  - *Se $\Lambda \in (0, 1)$ la soluzione è monotona e limitata.*
  - *Se $\Lambda > 1$ la soluzione esplode in tempo $T_1 > 0$ finito.*
  - *Se $\Lambda < -1$ la soluzione esplode in tempo $T_2 > 0$ finito.*
- *determinare la soluzione esplicita.*

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é un'equazione autonoma: $y' = f(y)$, se $f(c) = 0$ allora la funzione costante

$$y(t) \equiv c$$

é soluzione dell'equazione: pertanto la prima affermazione, *Se $\Lambda \in \{-1, 0, 1\}$ la soluzione è costante.* é vera.

Se $\Lambda \in (0, 1)$ la soluzione $y(t)$ non puó incontrare, per il teorema di unicitá né la soluzione $y(t) \equiv 0$ né la soluzione $y(t) \equiv 1$: quindi

$$0 < y(t) < 1$$

Tenuto inoltre conto che

$$y \in (0, 1) \quad \to \quad (y+1)y(y-1) < 0$$

risulta $y'(t) < 0 \quad \to \quad y(t) \searrow$, decrescente.

Se $\Lambda > 1$ la soluzione $y(t)$, per la stessa ragione precedente si mantiene $y(t) > 1$.
Ma allora

$$(y+1)y(y-1) > 0 \quad \to \quad y(t) \nearrow \quad \textit{crescente}$$

quindi

$$y(t) > \Lambda \quad \to \quad (y+1)y(y-1) > (\Lambda - 1)y^2$$

La soluzione $y(t)$ pertanto cresce piú rapidamente della soluzione $Y(t)$ del problema

$$\begin{cases} Y' = (\Lambda - 1)Y^2 \\ Y(0) = \Lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad Y(t) = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda(\Lambda - 1)t}$$

$$y(t) > Y(t) \quad \rightarrow \quad \sup_{t \in J} y(t) \geq \sup_{t \in J} Y(t)$$

da cui l'asserto, *la soluzione esplode in tempo $T_1 > 0$ finito*, tenuto presente che

$$\lim_{t \to 1/\Lambda(\Lambda-1)} Y(t) = \infty$$

Si osservi che l'espressione assegnata $f(y)$ é funzione dispari

$$f(-y) = -f(y)$$

ne segue che

$$y' = f(y) \quad \rightarrow \quad -y' = f(-y)$$

ovvero che se y é soluzione dell'equazione anche $-y$ lo é.

Il caso $\Lambda < -1$ é analogo a quello $\Lambda > 1$ tenuto conto che se $y(t)$ é soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = (y+1)y(y-1) \\ y(0) = \Lambda < -1 \end{cases}$$

allora $-y(t)$ é soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = (y+1)y(y-1) \\ y(0) = -\Lambda > 1 \end{cases}$$

e quindi ....esplode anch'essa in tempo $T_2 > 0$ finito.
Le soluzioni dell'equazione diverse dalle tre soluzioni d'equilibrio

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1$$

si cercano, come per tutte le equazioni autonome, nella forma

$$\int \frac{1}{(y+1)y(y-1)}, dy = \int dt$$

Osservato che

$$\frac{1}{(y+1)y(y-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{y-1}\right) - \frac{1}{y}$$

se ne trae

$$\log\left(\frac{\sqrt{|y+1||y-1|}}{|y|}\right) = t + c \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{|y+1||y-1|}}{|y|} = K\, e^t$$

Ovvero

$$\frac{|y^2-1|}{y^2} = K^2\, e^{2t}$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} \Lambda^2 - 1 < 0 \quad \to \quad \dfrac{1-y^2}{y^2} = K^2\, e^{2t} \quad \to \quad y^2 = \dfrac{1}{1+K^2\, e^{2t}} \\[2ex] \Lambda^2 - 1 > 0 \quad \to \quad \dfrac{y^2-1}{y^2} = K^2\, e^{2t} \quad \to \quad y^2 = \dfrac{1}{1-K^2\, e^{2t}} \end{cases}$$

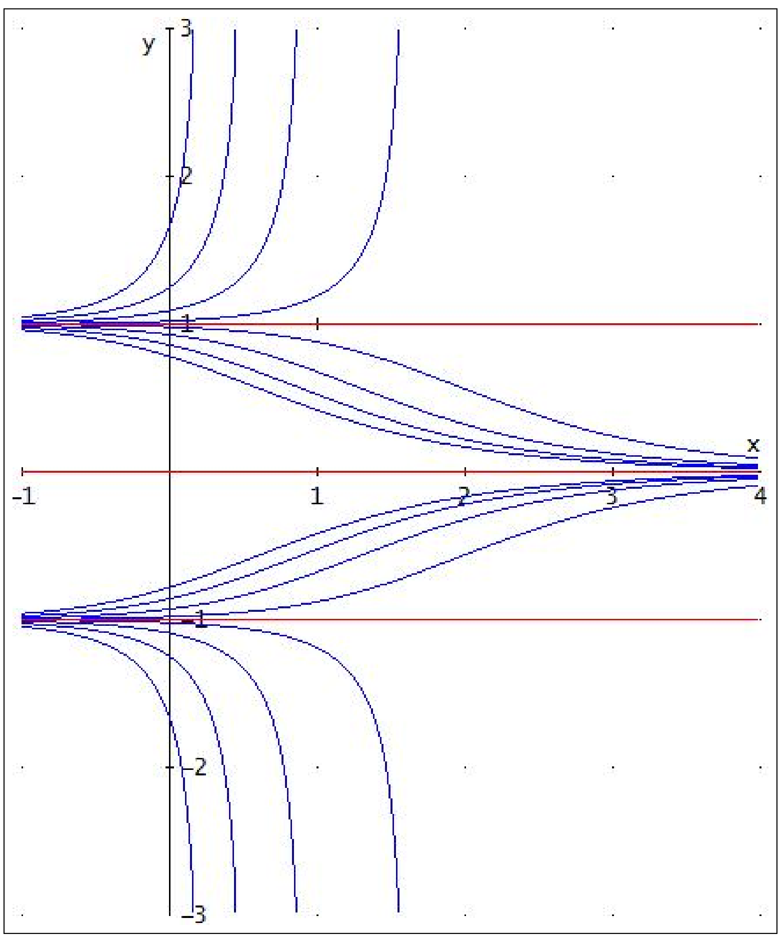


FIGURA 1. $y' = (y+1)y(y-1)$

Da cui, inoltre,

$$\begin{cases} \Lambda > 1 & y = \sqrt{\dfrac{1}{1 - K^2\, e^{2t}}} \\ \\ \Lambda \in (0,1) & y = \sqrt{\dfrac{1}{1 + K^2\, e^{2t}}} \\ \\ \Lambda \in (-1,0) & y = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + K^2\, e^{2t}}} \\ \\ \Lambda < -1 & y = -\sqrt{\dfrac{1}{1 - K^2\, e^{2t}}} \end{cases}$$

3. Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^3 + 4\,y^3 + 3\,x^2 y - 2\,y^2, \qquad P_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

Si verifichino le seguenti affermazioni

- $f(P_0) = 0$, $f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 0$, $f_{xx}(P_0) = -\frac{3}{2}$
- *Assumendo che esista un intorno aperto* I *del punto* $x_0 = -1/2$ *nel quale sia definita*

$$h \in C^1(I), \quad h(-1/2) = 1/4, \qquad f(x, h(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

dedurre che h *ha (necessariamente) un minimo locale in* $x_0 = -1/2$

SOLUZIONE:

$$\begin{cases} f = x^3 + 4\,y^3 + 3\,x^2 y - 2\,y^2 \\ f_x = 3x^2 + 6xy \\ f_y = 12y^2 + 3x^2 + 4y \\ f_{xx} = 6x + 6y \end{cases} \left| \begin{array}{l} f(P_0) = 0 \\ f_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) = \frac{5}{2} \neq 0 \\ f_{xx}(P_0) = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Derivando una prima volta l'identitá $f(x, h(x)) \equiv 0 \ \forall x \in I$ si ricava

$$f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x))\, h'(x) = 0$$

Tenuto presente che

$$x \approx x_0 \quad \to \quad h(x) \approx h(x_0) \quad \to \quad f_y(x, h(x)) \approx f_y(x_o, h(x_0)) \neq 0$$

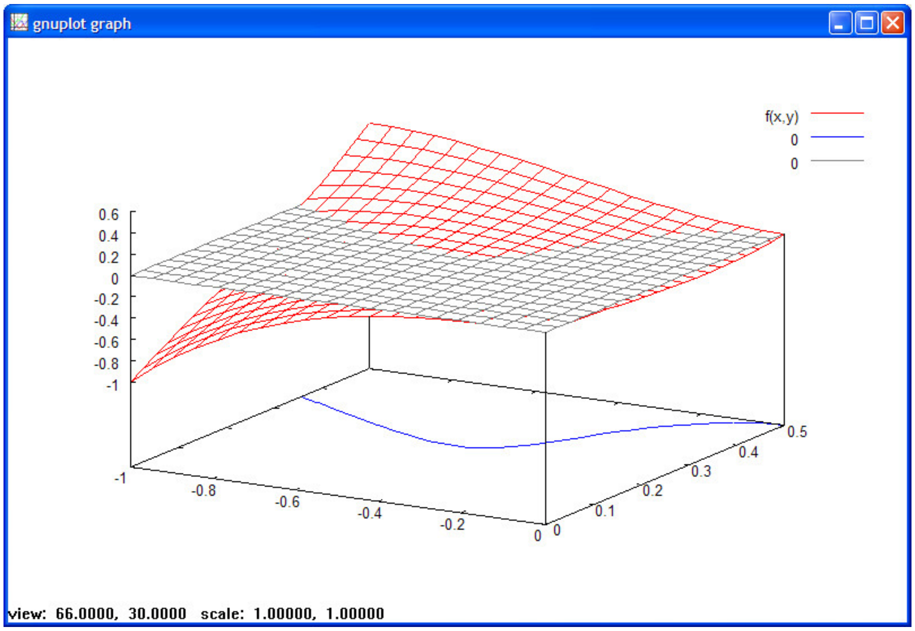


FIGURA 2. $z = f(x, y),\ z = 0$

discende che

$$h'(x) = -\frac{f_x(x, h(x))}{f_y(x, h(x))} \quad \to \quad h'(x_0) = \frac{f_x(x_0, h(x_0))}{f_y(x_0, h(x_0))} = 0$$

$$h''(x) = -\left(\frac{f_x(x, h(x))}{f_y(x, h(x))}\right)' = -\frac{(f_{xx} + f_{xy}h')f_y - f_x(f_{yx} + f_{yy}h')}{f_y^2}$$

da cui

$$h''(x_0) = -\frac{f_{xx}(P_0)f_y(P_0) - f_x(P_0)f_{yx}(P_0)}{f_y^2(P_0)} = \frac{3}{5}$$

Si riconosce pertanto, vedi Figure 3, che

$$h(x_0) = y_0, \quad h'(x_0) = 0, \quad h''(x_0) > 0 \quad \to \quad x_o \ \text{ minimo}$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Disegnare la Figura 2 con GnuPlot*

```
gnuplot> f(x,y) = x**3 + 4*y**3 + 3*x**2*y - 2*y**2
gnuplot> set xrange [-1:0]
gnuplot> set yrange [0:0.5]
gnuplot> set cntrparam levels discrete 0
gnuplot> set isosamples 20,20
gnuplot> set contour base
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot f(x,y),0
```

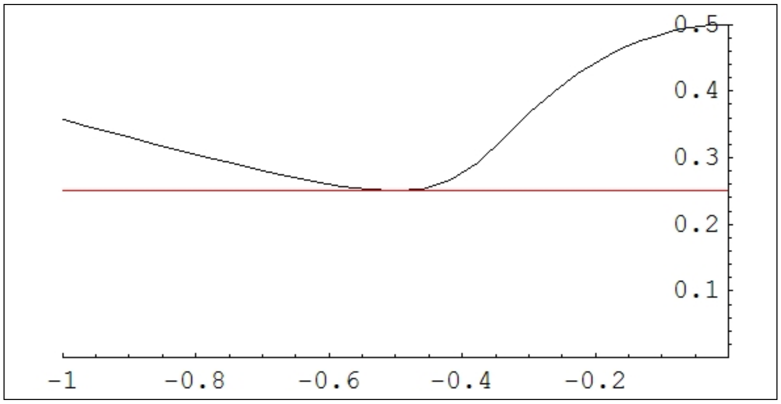


FIGURA 3. $x^3 + 4\,y^3 + 3\,x^2 y - 2\,y^2 = 0$

4. Esercizio

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \cos\left(xy(x)\right) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- *si verifichi che valgono le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità della soluzione,*
- *si osservi che la soluzione è di classe C^∞,*
- *si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 che approssima la soluzione.*

SOLUZIONE:

L'esistenza e unicitá della soluzione per $x \in (-\delta,\, \delta)$ deriva dal fatto che $\cos(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

La soluzione $y(x) \in C^1(-\delta,\, \delta)$, garantita dal teorema di esistenza e unicitá é necessariamente anche di classe

- $C^2(-\delta,\, \delta)$ in quanto
  $$y'(x) = \cos(x\,y(x)) \in C^1(-\delta,\, \delta) \quad \to \quad y(x) \in C^2(-\delta,\, \delta)$$
- essendo per quanto visto sopra
  $$y''(x) = -\sin(x\,y(x))\,.\,y'(x) \in C^1(-\delta,\, \delta) \quad \to \quad y(x) \in C^3(-\delta,\, \delta)$$
- in generale si riconosce che
  $$\left\{ \begin{array}{l} y(x) \in C^n(-\delta, ,\, \delta) \\ y'(x) = \cos(x, .\, y(x)) \end{array} \right. \quad \to \quad y(x) \in C^{n+1}(-\delta, ,\, \delta)$$
  da cui, per induzione,
  $$y(x) \in C^\infty(-\delta, ,\, \delta)$$

I valori delle derivate di $y(x)$ si ricavano derivando l'espressione differenziale $y' = \cos(x\,y)$ che $y(x)$ verifica

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos(x\,y(x)) \\ y''(x) &= -\sin(x\,y(x))\{y(x) + x\,y'(x)\} \\ y'''(x) &= -\cos(x\,y(x))\{y(x) + x\,y'(x)\}^2 - \sin(x\,y(x))\,\{y'(x) + y'(x) + x\,y''(x)\} \end{aligned}$$

Da cui segue, sostituendo $x = 0$ e $y(0) = 1$

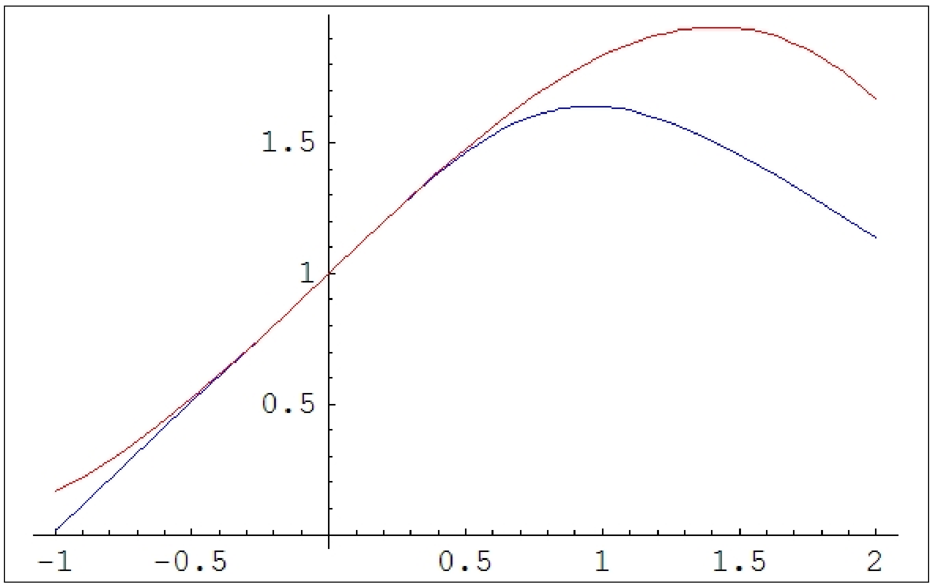


FIGURA 4. $y(x)$, $P(x)$

$$\begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 0 \\ y'''(0) &= -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P(x) = 1 + x - \frac{1}{6}x^3$$

In Figura 4 il grafico, in blu, della soluzione del problema di Cauchy stimata numericamente da *Mathematica*, vedi Figura 5, e il grafico, in rosso, del polinomio di Taylor approssimante.

5. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale autonoma

$$y' = \frac{1}{1+y}$$

- *si verifichino le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità al variare dei dati iniziali* (t_0, y_0),

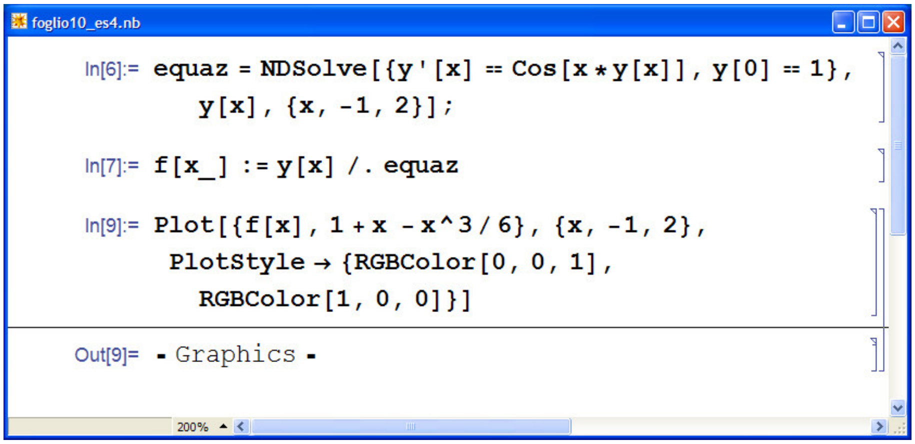


FIGURA 5. L'indagine numerica con Mathematica.

- *si determinino almeno tre sue soluzioni,*
- *si determini la soluzione del problema di Cauchy* $y(0) = 0$
- *si provi che le soluzioni* $y(t)$ *dell'equazione sono tutte funzioni monotone.*

SOLUZIONE:

All'equazione assegnata possono abbinarsi problemi di Cauchy

$$y(t_0) = y_0$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \neq -1$.
In altri termini vale in teorema d'esistenza e unicitá per i problemi

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con y_0 in uno dei due semipiani $y_0 < -1, \quad y_0 > -1$.
L'equazione assegnata é di tipo autonomo $y' = f(y)$: la soluzione del problema $y(t_0) = y_0$ si cerca quindi nella forma

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} dt \quad \rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} (1+y)\, dy = t - t_0$$

Da cui

$$y + \frac{1}{2}y^2 = t - t_0 + y_0 + \frac{1}{2}y_0^2 \quad \rightarrow \quad y^2 + 2y - (2t + c) = 0$$

Da cui segue, con la normale formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$y(t) = -1 \pm \sqrt{1 + 2t + c}$$

La determinazione del segno $\pm$ da scegliere e della costante c avviene al modo seguente:

$$\begin{array}{lll} y_0 < -1 & \rightarrow & y(t) = -1 - \sqrt{1+2t+c} \\ y_0 > -1 & \rightarrow & y(t) = -1 + \sqrt{1+2t+c} \\ y(t_0) = y_0 & \rightarrow & 1 + 2t_0 + c = |y_0 + 1|^2 \end{array}$$

La soluzione con $y(0) = 0$ corrisponde a $1 + c = 1$ quindi

$$y(t) = -1 + \sqrt{1+2t}$$

Le soluzioni $y(t)$ dell'equazione sono necessariamente monotone in quanto

$$y'(t) = \frac{1}{1 + y(t)}$$

e il secondo membro ha segno costante in ciascuno dei due semipiani $y < -1,\ \ y > -1$ in cui l'equazione é definita.
Le soluzioni pertanto di problemi di Cauchy con $y_0 < -1$ saranno a derivata negativa, quindi monotone decrescenti, le soluzioni con $y_0 > -1$ saranno a derivata positiva, quindi monotone crescenti.

6. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = \frac{t\, e^{-t^2}}{1 + |y|}$$

- *si verifichino le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità al variare dei dati iniziali* (t_0, y_0)*,*
- *si determinino almeno tre sue soluzioni,*
- *si determini la soluzione del problema di Cauchy* $y(0) = 0$
- *si provi che le soluzioni* $y(t)$ *dell'equazione sono tutte funzioni limitate per* $t \geq 0$*.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Per quanto riguarda il teorema d'esistenza e unicitá dei problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$ abbinati all'equazione

$$y' = f(t, y) = \frac{t\, e^{-t^2}}{1 + |y|}$$

si puó riconoscere che la funzione $f(t, y)$ é

- continua in $\mathbb{R}^2$,
- di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ come funzione di t,
- di classe $C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$ come funzione di y

- Lipschitziana rispetto ad y in tutto $\mathbb{R}$

Pertanto c'é esistenza e unicitá per ogni scelta $y_0 \neq 0$.

Si puó inoltre riconoscere che c'é esistenza e unicitá anche per $y_0 = 0$, infatti l'algoritmo di costruzione della soluzione mediante la successione delle approssimazioni successive richiede su $f(t, y)$ solo la Lipschitzianitá rispetto ad y.

L'equazione assegnata é a variabili separabili, quindi la soluzione si determina nel modo standard

$$y' = a(t)\, b(y) \quad \to \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{b(y)} = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

da cui, per il caso assegnato

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

$$\int_0^y (1 + |y|)\, dy = \int_0^t t\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2})$$

Tenuto conto che le soluzioni dell'equazione

$$y' = \frac{t\, e^{-t^2}}{1 + |y|} \quad \to \quad \begin{cases} t < 0 & \to \quad y' < 0 \\ t > 0 & \to \quad y' > 0 \end{cases}$$

ne segue che dall'essere $y(0) = 0$ segue $y(t) \geq 0, \; |y(t)| = y(t) \; \forall t$

Quindi si ha

$$y + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2}) \quad \to \quad y(t) = -1 + \sqrt{2 - e^{-t^2}}$$

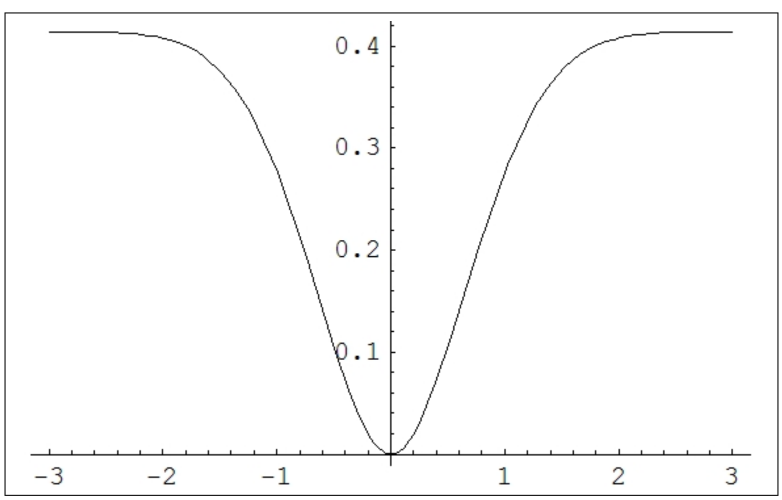


FIGURA 6. $y(t) = -1 + \sqrt{2 - e^{-t^2}}$

Limitatezza:

Le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(t, y), \;\; y(0) = y_0$ verificano di conseguenza la relazione integrale

$$y(t) - y_0 = \int_0^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

da cui nel caso in oggetto

$$y' = \frac{t\, e^{-t^2}}{1 + |y|} \quad \to \quad |y(t) - y(0)| = \left| \int_0^t \frac{t\, e^{-t^2}}{1 + |y|}\, dt \right| \leq \left| \int_0^t t\, e^{-t^2}\, dt \right| \leq \frac{1}{2}$$

da cui la limitatezza

$$|y(t)| \leq |y(0)| + \frac{1}{2}$$

CAPITOLO 33

Le soluzioni del foglio 11

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Foglio 11

11 gennaio 2008

1. Esercizio

Si vuole massimizzare il volume di 10 scatole di doni, uguali, usando 7 m^2 di cartone.
Si desidera che

(1) *l'altezza sia tre volte la profondità.*
(2) *una delle facce della scatola lasci un'apertura di misura metà della faccia completa,*

Dire[1] *qual'è il volume massimo ottenibile e le corrispondenti misure di tale scatola ottimale.*

SOLUZIONE:

Indichiamo con x, y, z le dimensioni della scatola: $z = 3y$

$$\text{Volume}: \quad V = x\,y\,z = 3\,x\,y^2$$

Supponendo che l'apertura sia praticata sulla faccia x, y si ha

$$\text{Superficie} \;: \quad \frac{3}{2}\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z = \frac{15}{2}\,x\,y + 6\,y^2$$

L'apertura puó essere realizzata naturalmente anche su altre facce: il volume ottimale, cioé le dimensioni ottimali cercate, saranno conosciute veramente solo dopo aver esplorate le tre possibili scelte della faccia da bucare.

PROBLEMA

Determinare il massimo di $V = 3\,x\,y^2$ sull'insieme

$$E: \quad \left\{ \frac{15}{2}\,x\,y + 6\,y^2 = \frac{7}{10} \right\} \cap \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\}$$

[1] P.S. Mandare urgentemente la risposta a $\mathfrak{S}$*anta* $\mathfrak{K}$*laus*, Polo Nord

Soluzione elementare:

$$\frac{15}{2}\,x\,y+6\,y^2=\frac{7}{10}\quad\to\quad x=\frac{2}{15y}(\frac{7}{10}-6\,y^2),\quad 0<y<\sqrt{\frac{7}{60}}$$

Ne segue che i volumi possibili sono

$$V=3\,\frac{2}{15y}(\frac{7}{10}-6\,y^2)\,y^2=\frac{2}{5}\,y(\frac{7}{10}-6\,y^2)$$

Il valore massimo (positivo) si ottiene annullando la derivata

$$V'=0\quad\to\quad\frac{7}{10}-18\,y^2=0\quad\to\quad y_{Max}=\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{5}}$$

Da cui

$$x_{Max}=\frac{4\sqrt{7}}{15\,\sqrt{5}},\quad V_{Max}=\frac{7\sqrt{35}}{1125}$$

Si osservi che

$$V_{Max}\approx 0.0368$$

mentre con 0.7 m^2 si puó realizzare un cubo di lato

$$\ell=\sqrt{\frac{0.7}{6}}$$

e quindi di volume

$$V_c=\ell^3\approx 0.0398$$

un po' maggiore.

Soluzione calcologica:
Estremi di $V(x,y)$ *su* $\varphi(x,y)=0$

$$\begin{cases}\nabla V\ \parallel\ \nabla\varphi\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

La condizione di parallelismo dei gradienti conduce a

$$\begin{cases}\det\begin{vmatrix}3y^2 & 6xy\\ \frac{15}{2}y & \frac{15}{2}x+12y\end{vmatrix} & =0\\ \frac{15}{2}\,x\,y+6\,y^2 & =\frac{7}{10}\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}x=\dfrac{4\sqrt{7}}{15\sqrt{5}}\\ y=\dfrac{\sqrt{7}}{6\sqrt{5}}\end{cases}$$

da cui segue

$$V_{Max}:=\frac{7\sqrt{35}}{1125}$$

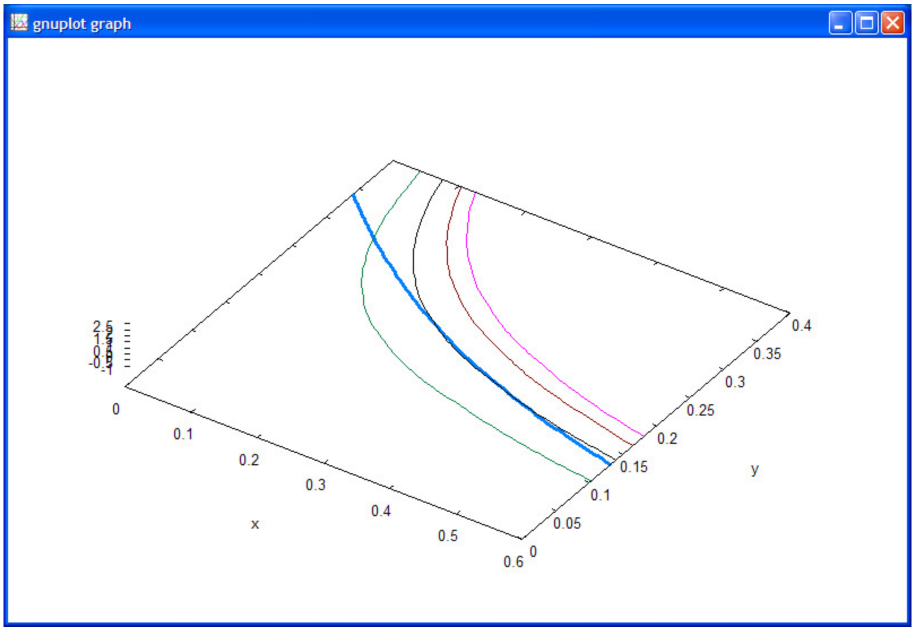


FIGURA 1. La Soluzione calcologica: in blu il vincolo, sottili le linee di livello $v(x, y) = c$

2. Esercizio

Si consideri un panettone cubico e si assuma di avere ventisette invitati. Determinare il numero minimo di tagli che si devono effettuare sul panettone per ottenere 27 "porzioni".

Panettone e fetta tradizionale: due tagli e due fette. Che spreco.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Si osservi che

$$27 = 3^3$$

si osservi inoltre che

due tagli decompongono un solido connesso (un cubo, un prisma, un panettone, ecc.) in almeno tre parti

Pertanto con

$$2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad = \quad 6$$

tagli si decompone un cubo in 27 parti !

3. Esercizio

Una slitta $S = (x, y)$ si muove di moto caotico rimanendo sull'insieme Z determinato dall'equazione $g = 0$ con

$$g(x, y) = x^4 + x^3 + y^4 + 2xy + 1.$$

- *dire se la slitta rimane sempre a distanza finita da casa vostra.*
- *sapere chi è l'amico più vicino, oppure più lontano a cui ha fatto visita la slitta.*

SOLUZIONE:

Supponiamo che casa nostra sia nell'origine del sistema di riferimento: il problema proposto consiste nel determinare il minimo e il massimo della funzione $d(x, y) = x^2 + y^2$ sull'insieme Z

- COMPATTEZZA:
  - l'insieme $Z: \; g(x, y) = 0$ é chiuso perché gli insiemi di livello delle funzioni continue sono chiusi,
  - l'insieme Z é limitato perché

    $$\lim_{(x,y)\to\infty} g(x, y) = \infty$$

    quindi $\exists R > 0 | x^2 + y^2 > R^2 \quad \to \quad g(x, y) > 1$
  - pertanto $Z \subseteq \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$

  Quindi la slitta é sempre rimasta a distanza finita da casa nostra (...e come potrebbe essere stato altrimenti !?!!)
- I PUNTI ESTREMALI di $d(x, y)$ su Z sono soluzioni del sistema

  $$\begin{cases} \det \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 4x^3 + 2x^2 + 2y & 4y^3 + 2x \end{vmatrix} = 0 \\ \\ x^4 + x^3 + y^4 + 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

  non sono di facile calcolo...!

4. Esercizio

Si mostri la validità $\forall n \in \mathbb{N}$ della disuguaglianza:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall b_i \geq 0$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Per $n = 2$ la disuguaglianza discende dalla ben nota

$$2\,a\,b \leq a^2 + b^2, \quad \forall a, b \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}$$

Per $n = 4$ la disuguaglianza segue in modo del tutto analogo

$$\begin{cases} 2ab \leq a^2 + b^2 \\ 2cd \leq c^2 + d^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 4\,a\,b\,c\,d \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

da cui

$$4\,a\,b\,c\,d \leq \frac{1}{2}\left\{a^4 + c^4 + a^4 + d^4 + c^4 + b^4 + b^4 + d^4\right\}$$

$$a\,b\,c\,d \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \quad \rightarrow \quad \sqrt[4]{a\,b\,c\,d} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

In modo analogo si riconosce ancora per ogni $n = 2^m$.

Il caso n generale puó essere ricondotto, dividendo membro a membro per

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

al caso

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$$

Si tratta quindi di determinare il massimo di

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

sull'insieme determinato dal vincolo

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n - n = 0$$

limitatamente alla porzione $x_k \geq 0,\ \forall k \in [1, .., n]$.

Il parallelismo dei gradienti implica quindi

$$\begin{cases} \prod_{i=1,\, i\neq k}^{n} b_i = \prod_{i=1,\, i\neq h}^{n} b_i, \quad \forall h,\ k\ \in [1,..,n] \\ \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n - n = 0 \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} x_h = x_k, \quad \forall h,\ k\ \in [1,..,n] \\ \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n - n = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$$

Tenuto conto che

$$f(1, 1, ..., 1) = 1$$

se ne deduce che

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 1 \quad \forall x_1 + x_2 + \dots + x_n - n = 0$$

e quindi la disuguaglianza generale

$$\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \forall b_i \geq 0$$

5. Esercizio

Tre comuni che si trovano in

$$T = (1, 0), \quad P = (0, 1), \quad U = (3, 2)$$

decidono di costruire un aereoporto.
Per motivi logistici l'aereoporto deve essere situato sulla parabola di equazioni $y = x^2$.
Si calcoli il punto R *sulla parabola che rende minima la somma delle distanze al quadrato* [2]

$$|R - T|^2 + |R - P|^2 + |R - U|^2$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Si tratta di determinare in che punto (x, y) della parabola $y - x^2 = 0$ la funzione

$$d(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + x^2 + (y - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y - 2)^2$$

assume il valore minimo.

- Primo problema: esiste il minimo di $d(x, y)$ su $y = x^2$?

[2] R sta per Ronchi dei Legionari, T per Trieste ...

- $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} d(x,y) = \infty$
- $d(0,0) = 15 \quad \to \quad \exists R > 0 \quad d(x,y) \geq 15 \ \forall \ x^2 + y^2 \geq R^2$
- $\inf\limits_{y=x^2} d(x,y) = \min\limits_{\{y=x^2\}\cap\{x^2+y^2\geq R^2\}} d(x,y)$

- Secondo problema: come trovarlo ?

$$\begin{cases} \nabla\{y - x^2\} \parallel \nabla\, d(x,y) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} -3x + 6xy - 4 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Il punto estremale ha ascissa che soddisfa quindi l'equazione

$$6x^3 - 3x - 4 = 0$$

equazione che ha certamente una radice.

Osservazione 5.1.
Un procedimento semplicissimo
Calcoliamo la funzione $d(x,y)$ di cui si cerca il minimo con $y = x^2$:

$$d(x,x^2) = 3x^4 - 3x^2 - 8x + 15$$

I punti estremali si cercano annullando la derivata....

$$\frac{\partial}{\partial x} d(x,x^2) = 12x^3 - 6x - 8 = 0$$

A meno di un fattore 2 é la stessa equazione trovata sopra....

Osservazione 5.2.
Un procedimento alternativo:

- *Le linee di livello $d(x,y) = c$ sono circonferenze di centro $C = (x_0, y_0)$*

$$3x^2 + 3y^2 - 8x - 6y + 15 = c, \quad C = (4/3, 1)$$

- *esse sono tangenti alla parabola $y = x^2$ in un suo punto R se la retta normale alla parabola in R passa per il centro C,*
- *tenuto conto che $R = (t, t^2)$ e che la retta normale in tale punto é la*

$$(x - t) + 2t\,(y - t^2) = 0$$

ne segue che dovrá verificarsi l'equazione

$$(x_0 - t) + 2t\,(y_0 - t^2) = 0 \quad \to \quad 6t^3 - 3t - 4 = 0$$

La stessa equazione per determinare l'ascissa di R incontrata prima..!

OSSERVAZIONE 5.3. *Tenuto conto che il minimo di $d(x, y)$ in tutto $\mathbb{R}^2$ corrisponde al valore*

$$\begin{cases} d_x(x,y) = 0 \\ d_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$d(4/3, 1) = \frac{20}{3}$$

ne deriva che il valore minimo richiesto sull'insieme determinato dal vincolo $y = x^2$ sará certamente piú alto.

6. Esercizio

Siano

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^3), \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

tali che

$$F(x, y, g(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Si calcoli $\nabla g(0, 0)$ sapendo che $F(0, 0, 0) = 0$ e $\nabla F(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La funzione composta

$$F(x, y, g(x, y))$$

composta di funzioni C^1 é differenziabile e quindi vale la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} F(x, y, g(x, y)) = F_x(x, y, g(x, y)) + F_z(x, y, g(x, y))\, g_x(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} F(x, y, g(x, y)) = F_y(x, y, g(x, y)) + F_z(x, y, g(x, y))\, g_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

da cui, calcolando per $(x, y) = (0, 0)$ si ha

$$\begin{cases} F_x(0, 0, g(0, 0)) + F_z(0, 0, g(0, 0))\, g_x(0, 0) = 0 \\ \\ F_y(0, 0, g(0, 0)) + F_z(0, 0, g(0, 0))\, g_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Se $g(0, 0) = 0$ ne segue

$$\begin{cases} g_x(0, 0) = 0 \\ \\ g_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

se al contrario $g(0, 0) \neq 0$ nulla si puó dire circa $\nabla g(0, 0)$.

OSSERVAZIONE 6.1. *Si consideri, ad esempio*

$$F(x,y,z) = (z - e^{2x})(x - z) \quad \to \quad \begin{cases} F(0,0,0) & = 0 \\ F_x(0,0,0) & = 0 \\ F_y(0,0,0) & = 0 \\ F_z(0,0,0) & = 1 \end{cases}$$

sia la funzione $g_1(x,y) = e^{2x}$ *sia la* $g_2(x,y) = x$ *soddisfano l'equazione*

$$F(x,y,g_k(x,y)) = 0\,, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ma hanno gradienti diversi nell'origine !

Parte 5

Le prove d'esonero 2003/2004

CAPITOLO 34

Primo esonero - 30 ottobre 2003

$\boxed{\text{Soluzioni}}$

1. Esercizio

Detto E l'insieme definito implicitamente dall'equazione

$$xy + y^2 = 1$$

ed $f(x, y) = x^2 + y^2$,

- *esaminare se $f(x, y)$ ammette massimo o minimo su E,*
- *determinare gli eventuali valori di massimo o minimo,*
- *determinare i punti di E in cui tali estremi sono assunti.*

1.1. Soluzione.

L'insieme E definito dall'equazione $xy + y^2 = 1$ é un'iperbole,

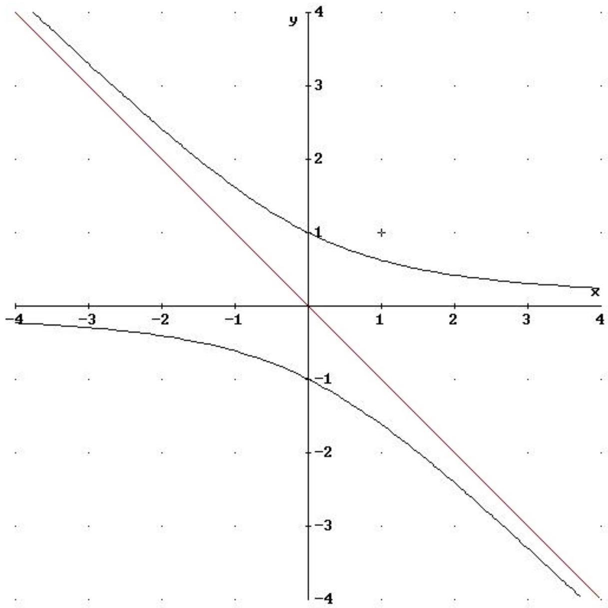


FIGURA 1. L'iperbole del primo esercizio.

insieme del piano chiuso ma non limitato: quindi, a priori non é assicurato che la funzione continua $x^2 + y^2$ abbia minimo e massimo su E

- MASSIMO: la funzione $f(x, y) = x^2+y^2$ rappresenta il quadrato della distanza del punto (x, y) dall'origine, tenuto conto che E é un insieme illimitato la funzione $f(x, y)$ sará altrettanto illimitata superiormente su E: in altri termini esistono punti $P \in E$ distanti dall'origine piú di qualunque valore positivo si scelga.
Quindi non esiste il massimo.
- MINIMO: sia
$$\ell = \inf_{(x,y)\in E} f(x, y)$$
l'estremo inferiore di f. Riesce certamente $\ell > 0$ perché $f = 0$ solo sull'origine, punto che ha distanza positiva da E, e riesce, anche certamente,
$$\ell = \min_{(x,y)\in K} f(x, y)$$
essendo
$$K = E \cap \left\{x^2 + y^2 \leq 2\ell\right\}$$

l'insieme chiuso e limitato costituito dalla parte[1] di iperbole E contenuta nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 2\ell$
Quindi ℓ, come minimo, é un valore di f, assunto in qualche punto di E.

- i punti di estremo (minimi, massimi, flessi...) si trovano tra quelli individuati dall'algoritmo dei moltiplicatori di Lagrange, punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} f_x + \lambda\, g_x & = 0 \\ \\ f_y + \lambda\, g_y & = 0 \\ \\ g & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + \lambda\, y & = 0 \\ \\ 2y + \lambda\,(x + 2y) & = 0 \\ \\ xy + y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni segue, annullando il determinante,

$$f_x\, g_y - g_x\, f_y = x(x + 2y) - y^2 = 0$$

e, ricavato $x = (1 - y^2)/y$ dalla terza, sostituendo si ottiene

$$\frac{1 - y^2}{y}\left(\frac{1 - y^2}{y} + 2y\right) - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^4 = 1$$

Ne seguono i punti

$$\pm\left\{ y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \qquad x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt[4]{2}} \right\} \tag{29}$$

Il minimo é pertanto

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)$$

[1]parte sicuramente non vuota... ricordate le proprietá dell'estremo inferiore.

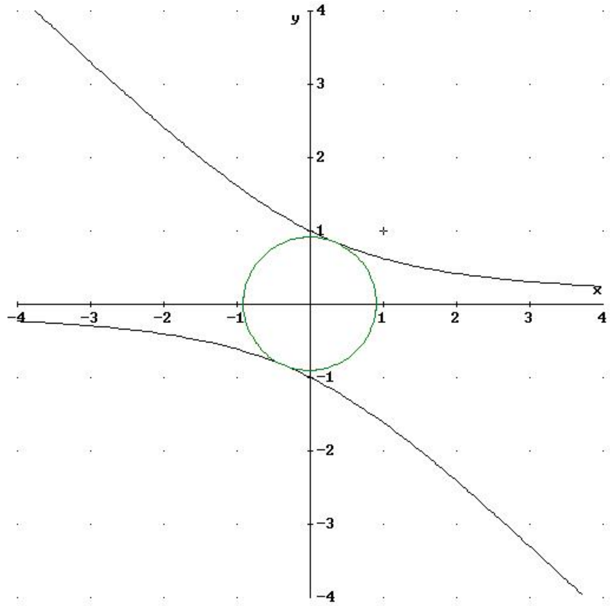


Figura 2. La circonferenza $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$ tangente all'iperbole.

Il minimo é il valore della funzione f sui due punti determinati dall'algoritmo dei moltiplicatori di Lagrange, vedi formula (29).

2. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo di forze

$$F = \left\{ \frac{y^2}{x+1}, \;\; 2y\ln(x+1) + 3x \right\}$$

per compiere un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 1$ *in senso antiorario.*

2.1. Soluzione.

Il campo di forze assegnato é definito (e di classe C^∞) nel semipiano

$$x + 1 > 0$$

La curva assegnata é interamente contenuta in tale semipiano

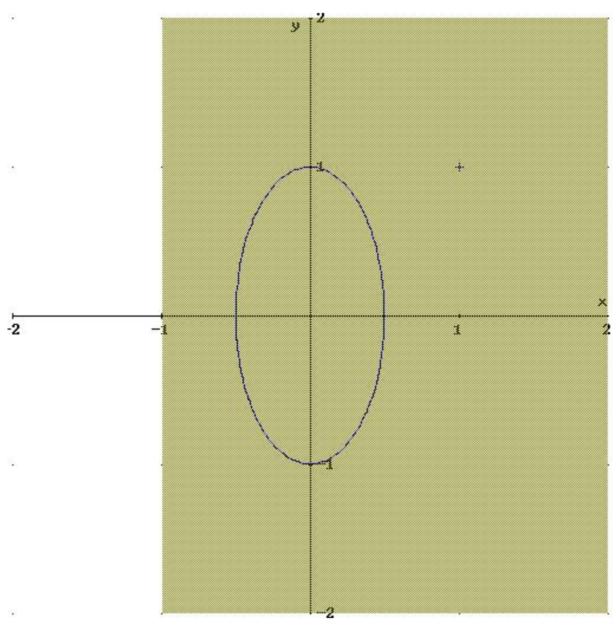


FIGURA 3. L'ellisse del secondo esercizio e il semipiano $x + 1 > 0$

Si puó quindi calcolare il lavoro richiesto, tenuto conto del verso antiorario di percorrenza, tramite la formula di Stokes

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\; ds = \iint_E rot_z(\overrightarrow{F})\; dxdy$$

Tenuto conto che

$$\mathrm{rot}_z(\overrightarrow{F}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{y^2}{x+1} & 2y\ln(x+1)+3x & 0 \end{pmatrix} = 3\,\overrightarrow{k}$$

segue

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\ ds = \iint_E 3\,dxdy = 3\,\mathrm{Area}(E) = \frac{3}{2}\pi$$

In altri termini il campo F puó essere pensato come somma dei due campi

$$\overrightarrow{A} = \left\{ \frac{y^2}{x+1},\ \ 2y\ln(x+1) \right\}, \qquad \overrightarrow{B} = \{0,\ \ 3x\}$$

Il primo $\overrightarrow{A}$ ha rotore nullo nel semipiano $x+1>0$, quindi é conservativo e quindi il suo lavoro lungo l'ellisse é nullo. Fra l'altro é facile riconoscere che

$$\overrightarrow{A} = \nabla(y^2\ \ln(1+x))$$

ovvero che $y^2\ \ln(1+x)$ é un potenziale per $\overrightarrow{A}$.

Il secondo, $\overrightarrow{B}$, ha rotore 3, non é conservativo e il suo lavoro lungo l'ellisse vale, tenuto conto della rappresentazione dell'ellisse, con l'orientamento antiorario richiesto,

$$x = \frac{1}{2}\cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{t}\ ds = \int_0^{2\pi} 3\frac{1}{2}\cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

come era stato ottenuto tramite la formula di Stokes.

3. Esercizio

- *Calcolare l'area della superficie* Σ *contenuta nel piano* $z = x-1$ *e limitata dal cilindro* $(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1$
- *Calcolare l'integrale superficiale*

$$\int_\Sigma \sqrt{(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2}\, d\sigma$$

3.1. Soluzione.

- $$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{(x-2)^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1} \sqrt{1 + (x-1)_x^2 + (x-1)_y^2}\, dxdy =$$

  $$= \sqrt{2} \iint_{(x-2)^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1} dxdy = \sqrt{2}\,\pi\,\sqrt{2} = 2\pi$$

  avendo tenuto conto che la regione $(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1$ é delimitata da un'ellisse di semiassi 1 e $\sqrt{2}$, e quindi di area $\pi\sqrt{2}$.

- $$\int_\Sigma \sqrt{(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2}\, d\sigma = \sqrt{2} \iint_{(x-2)^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1} \sqrt{(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2}\, dxdy$$

  un ovvio cambiamento di variabile $\xi = x-2, \quad y/\sqrt{2} = \eta$ traduce il precedente integrale in

  $$2 \iint_{\xi^2+\eta^2\leq 1} \sqrt{\xi^2+\eta^2}\, d\xi\, d\eta$$

  avendo tenuto conto dello jacobiano della trasformazione

  $$dx\, dy = \sqrt{2}\, d\xi\, d\eta.$$

  L'ultimo integrale si calcola ovviamente in coordinate polari

$$2 \iint_{\xi^2+\eta^2\leq 1} \sqrt{\xi^2+\eta^2}\, d\xi\, d\eta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho = 2.2\pi.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Osservazione 3.1. *La funzione integranda nell'integrale superficiale richiesto prende valori compresi tra 0 e 1: l'integrale é venuto, infatti, un po' meno dell'area di* Σ :

$$\frac{4}{3}\pi < 2\pi,$$

come il teorema della media lasciava prevedere...!

4. Esercizio

Sia S il solido formato dal cilindro $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ sormontato dalla semisfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, \quad z \geq 1$, e sia

$$\overrightarrow{F} = \{xy,\ xy,\ (1-x-y)\,z\}$$

Calcolare il flusso

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

essendo ∂S la frontiera di S e $\overrightarrow{\nu}$ il versore normale esterno.

4.1. Soluzione.

Il teorema della divergenza riconosce che

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_S \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz$$

da cui, tenuto conto che

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = y + x + (1-x-y) = 1$$

si ricava

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_S dx\, dy\, dz = \text{Volume}(S)$$

La semplice geometria di S fa riconoscere che

$$\text{Volume}(S) = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

Quindi il flusso richiesto vale

$$\frac{5}{3}\pi.$$

Il conto richiesto si poteva eseguire anche prescindendo dal teorema della divergenza.
Tenuto conto che la frontiera di S é composta da tre porzioni di superficie

- la base sul piano $z = 0$,
- la superficie laterale del cilindro,
- la semisfera,

che ciascuna di esse ha, rispettivamente le seguenti parametrizzazioni

- $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, $\quad z = 0$, $\rho \in [0, 1]$, $\quad \theta \in [0, 2\pi]$
- $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$, $\quad z = t$, $\theta \in [0, 2\pi] \quad t \in [0, 1]$
- $x = \sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = 1 + \sin(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi]$

che il versore normale esterno é su ciascuna delle tre parti rispettivamente il seguente

- $\nu = \{0, 0, 1\}$
- $\nu = \{\cos(\theta), \sin(\theta), 0\}$
- $\nu = \{\sin(\varphi)\cos(\theta),\ \sin(\varphi)\sin(\theta),\ \cos(\varphi)\ \}$

che i tre integrali doppi del prodotto scalare $F \times \nu$ sono

- 0 (il primo, quello sul cerchio base)
- $\int_0^1 dt \int_0^{2\pi} \{\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin^2(\theta)\}d\theta = 0$
- il terzo integrale
  - $F \times \nu = \sin^3(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)[\cos(\theta) + \sin(\theta)] +$
    $+ [1 - \sin(\varphi)(\cos(\theta) + \sin(\theta))](1 + \cos(\varphi))\cos(\varphi)$
  - $d\sigma = \sin(\varphi)d\varphi\, d\theta$
  - tutti gli addendi che contengono $\sin(\theta)$ o $\cos(\theta)$ producono integrale nullo su $[0, 2\pi]$.
  - resta pertanto solo
    $$2\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(\varphi))\cos(\varphi)d\varphi = 5\pi/3$$

  cioé il risultato ottenuto (piú rapidamente) servendosi del teorema della divergenza.

CAPITOLO 35

Secondo esonero - 27 novembre 2003

Soluzioni:

1. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + x^2 y^2, \\ \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione:

$y' = y + x^2 y^2$ é un'equazione differenziale di Bernoulli: possiede la soluzione

$$y \equiv 0$$

pertanto ogni altra soluzione $y(x)$, per il teorema di unicitá, non si annulla mai.
Dividendo per $-y^2$ si ottiene

$$-y^{-2}y' = -y^{-1} - x^2$$

che, posto $y^{-1} = z$ rappresenta l'equazione lineare di primo ordine in z

$$z' = -z - x^2 \tag{30}$$

Integrale generale:

- soluzioni dell'omogenea associata $z' = -z \quad z_0(x) = c\, e^{-x}$
- soluzione equazione completa: cerchiamone una come

  $$\overline{z}(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

  sostituendo si deve avere

  $$A = -1, B = 2, C = -2$$

  quindi

  $$\overline{z}(x) = -x^2 + 2\,x - 2$$

L'integrale generale dell'equazione (30) é pertanto

$$z(x) = c\, e^{-x} - x^2 + 2x - 2$$

La condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$ implica, per la (30), $z(0) = 2$ e, quindi,

$$z(0) = c - 2 = 2 \quad \rightarrow \quad c = 4 \quad \rightarrow \quad z(x) = 4\, e^{-x} - x^2 + 2x - 2$$

Disegnati separatamente i grafici di $4\, e^{-x}$ e di $x^2 - 2x + 2$

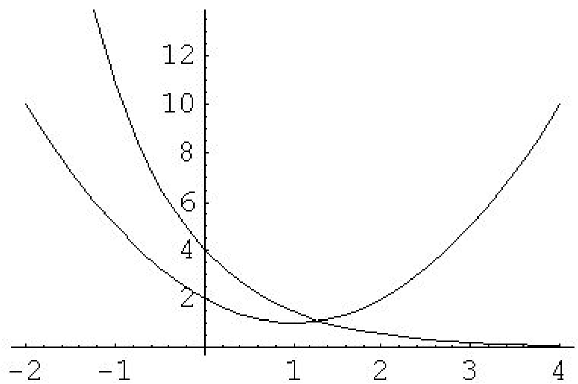


FIGURA 1. I due termini $4\, e^{-x}$ e $x^2 - 2x + 2$

si riconosce agevolmente che essi si intersecano in x_0, poco dopo $x = 1$: quindi

$$z(x_0) = 0$$

e quindi la considerazione di

$$y(x) = \frac{1}{z(x)}$$

sará lecita solo a sinistra di tale x_0.
La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{4\, e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$$

soluzione definita per $x < x_0$.

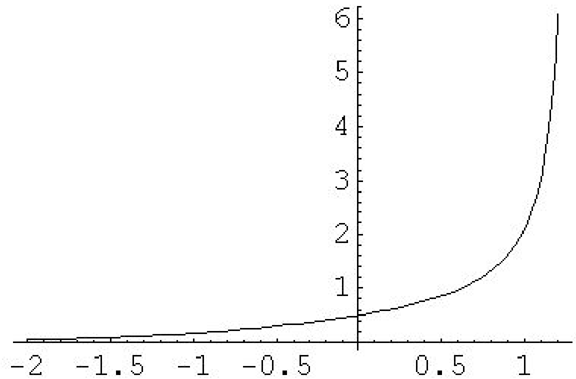


FIGURA 2. Il grafico della soluzione $y(x)$ del primo esercizio

2. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+x+y}{1-(x+y)}, \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Indicato con $z = x + y$, $\quad \to \quad z' = 1 + y'$ il problema assegnato si trasforma nel seguente

$$z' - 1 = \frac{1+z}{1-z}, \quad z(0) = 2$$

Ne segue, a conti fatti l'equazione di tipo autonomo in z

$$z' = \frac{2}{1-z}$$

$$\int (1-z)dz = \int 2dx \quad \to \quad z - \frac{1}{2}z^2 = 2x + c$$

Ne segue

$$z(x) = 1 \pm \sqrt{1 - (4x + 2c)}$$

Tenuta presente la condizione $z(0) = 2$ se ne deduce

$$2 = 1 \pm \sqrt{1 - 2c}, \quad \to \quad 1 = 1 - 2c \quad \to \quad c = 0$$

e quindi,

$$z(x) = 1 \pm \sqrt{1 - 4x}$$

La condizione $z(0) = 2$ determina la scelta del segno avanti alla radice

$$z(x) = 1 + \sqrt{1 - 4x} \quad \to \quad y(x) = 1 + \sqrt{1 - 4x} - x$$

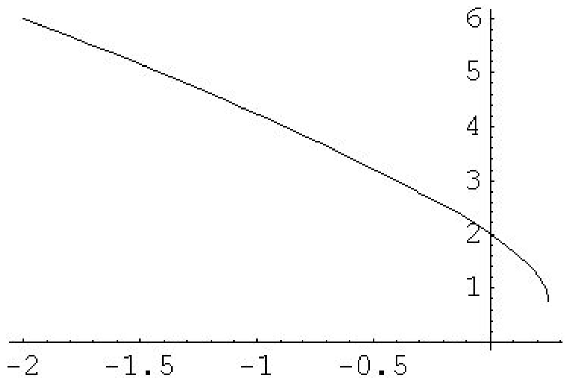


FIGURA 3. La soluzione del secondo esercizio.

La soluzione osservata esiste per

$$1 - 4x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{4}$$

per l'ovvia *esistenza* della radice quadrata.
Ma del resto l'espressione

$$y(x) = 1 + \sqrt{1 - 4x} - x \quad \Leftrightarrow \quad x + y(x) - 1 = \sqrt{1 - 4x}$$

fa riconoscere che la soluzione non potrebbe comunque passare per un punto in cui

$$x + y = 1$$

l'equazione differenziale stessa, in tale punto non é definita !
Notate inoltre che

$$\lim_{x \to 0.25^-} y'(x) = -\infty$$

e quindi che la soluzione é, di fatto definita per

$$x < \frac{1}{4}$$

La soluzione trovata é una

soluzione in grande,

cioé é definita in tutto l'intervallo delle x in cui é definita l'equazione differenziale: cosa che non accade, ad esempio, per la soluzione del primo esercizio.

3. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}\, y' - \; 4\, \frac{1}{x^2}\, y = 1, \\ \\ y(1) = 0, \\ \\ y'(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare di secondo ordine, non omogenea, a coefficienti variabili di tipo Eulero, definita per $x \neq 0$. Tenuto conto che le condizioni iniziali assegnate si riferiscono a $x = 1$ lavoreremo comunque nel semiasse

$$x > 0.$$

- Soluzioni dell'equazione omogenea: soluzioni nella forma
  $y = x^\lambda$ si approda all'equazione algebrica in λ
  $$\lambda^2 - 4 = 0$$
  dalla quale si deducono i due esponenti
  $$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2$$
  e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea é
  $$y_0(x) = A\,x^2 + B\,x^{-2}$$
- Equazione completa: cerchiamone una soluzione nella forma (metodo della variazione delle costanti)
  $$\overline{y}(x) = A(x)\,x^2 + B(x)\,x^{-2}$$
  Il sistema che devono soddisfare le due derivate $A'(x)$ e $B'(x)$ é il seguente
  $$\begin{cases} A'\,x^2 + B'\,x^{-2} = 0 \\ 2A'x - 2B'x^{-3} = 1 \end{cases}$$
  Ne segue, risolvendo il sistema, e tenendo conto che lavoriamo con $x > 0$,
  $$A'(x) = \frac{1}{4x} \quad B'(x) = -\frac{1}{4}x^3$$

quindi

$$A(x) = \frac{1}{4}\ln(x), \quad B(x) = -\frac{1}{16}x^4$$

da cui la soluzione dell'equazione completa

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2 - \frac{1}{16}x^2$$

L'integrale generale dell'equazione assegnata é pertanto

$$y(x) = A\,x^2 + B\,x^{-2} + \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2 - \frac{1}{16}x^2$$

ovvero, riassumendo in un unico termine il primo e l'ultimo addendo,

$$y(x) = A\,x^2 + B\,x^{-2} + \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2 \tag{31}$$

Per soddisfare le condizioni iniziali occorre che

$$\begin{cases} y(1) = A + B = 0 \\ y'(1) = 2A - 2B + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad \rightarrow \quad A = B = 0$$

La soluzione richiesta é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2$$

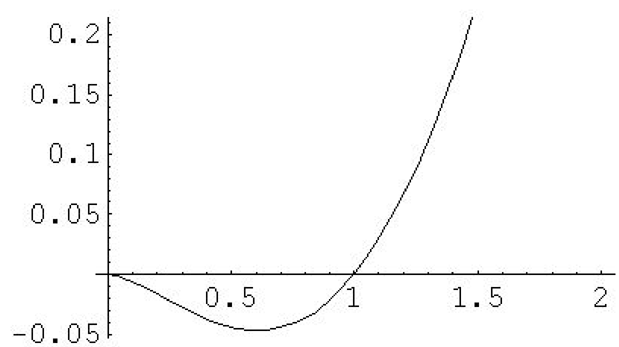


FIGURA 4. La soluzione $y(x)$ del terzo esercizio.

3.1. Usiamo la sostituzione $x = e^t$.

La sostituzione $x = e^t$ conduce alle seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} & = x\,\frac{dy}{dx} \\ \\ \frac{d^2y}{dt^2} & = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} \end{cases}$$

L'equazione differenziale si trasforma, nella nuova variabile t nella seguente

$$y''(t) - 4y(t) = e^{2t}$$

- soluzioni omogenea associata:

$$y_0(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$$

- soluzione particolare equazione completa: cerchiamola nella forma $\overline{y}(t) = A\,t\,e^{2t}$, sostituendo si trova che deve essere $A = 1/4$
- Integrale generale dell'equazione:

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$$

Tornando alla variabile x si ottiene pertanto

$$y(x) = Ax^2 + Bx^{-2} + \frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

espressione naturalmente uguale alla (31) precedente.

Osservazione 3.1. *Anche la soluzione di questo esercizio é*

soluzione in grande

infatti essa é definita in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ *lo stesso in cui sono definiti i coefficienti dell'equazione differenziale.*

4. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + (1-\alpha)\,y' - \alpha\,y = e^{2x}$$

al variare del parametro α.

Soluzione

- Equazione omogenea associata: $y'' + (1-\alpha)\ y' - \alpha\ y = 0$, soluzioni della forma $y(x) = e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 + (1-\alpha)\,\lambda - \alpha = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{1}{2}\left\{\alpha - 1 \pm \sqrt{(1+\alpha)^2}\right\}$$

ne segue

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \alpha$$

- Integrale generale dell'omogenea:

$$\begin{cases} \alpha \neq -1 & \Rightarrow \ y_0(x) = A\,e^{-x} + Be^{\alpha\,x} \\ \\ \alpha = -1 & \Rightarrow \ y_0(x) = (A\ + B\,x\,)\,e^{-x} \end{cases}$$

- Soluzione particolare della completa:

$$\begin{cases} \alpha \neq 2 & \Rightarrow \ \overline{y}(x) = \frac{1}{3(2-\alpha)}e^{2x} \\ \\ \alpha = 2 & \Rightarrow \ \overline{y}(x) = \frac{1}{3}xe^{2x} \end{cases}$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$\begin{cases} \alpha \neq -1, \alpha \neq 2 & \Rightarrow \ y(x) = A\,e^{-x} + Be^{\alpha\,x} + \frac{1}{3(2-\alpha)}e^{2x} \\ \\ \alpha = -1 & \Rightarrow \ y(x) = (A\ + B\,x\,)\,e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x} \\ \\ \alpha = 2 & \Rightarrow \ y(x) = A\,e^{-x} + Be^{2\,x} + \frac{1}{3}xe^{2x} \end{cases}$$

Si noti, nella seconda e terza delle espressioni precedenti, come le formule siano espresse direttamente con il valore α speciale cui si riferiscono.

CAPITOLO 36

Terzo esonero - 10 dicembre 2003

$\boxed{\text{Soluzioni}}$

1. Esercizio

Assegnata la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k)\; x^k$$

- determinare l'intervallo di convergenza,
- determinare la somma $S(x)$,

1.1. Soluzione.

- L'intervallo di convergenza si determina con il criterio del rapporto

$$\left|\frac{(1+k)\; x^k}{(k)\; x^{k-1}}\right| = \frac{1+k}{k}|x| \quad \rightarrow \quad |x|$$

La serie converge assolutamente per $|x| < 1$ Agli estremi $x = 1$ e $x = -1$ i termini della serie non sono infinitesimi, quindi é escluso che in essi la serie possa convergere.
- Ricordato che $\forall |x| < 1$,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k &= \tfrac{1}{1-x} &&= (1-x)^{-1} \\ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} k\; x^{k-1} &= \left(\tfrac{1}{1-x}\right)' &&= (1-x)^{-2}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} k\; x^k = \left(\tfrac{x}{1-x}\right)' = x(1-x)^{-2},$$

Ne segue

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k\; x^k = (1-x)^{-1} + x(1-x)^{-2}$$

Eseguite le somme si ha pertanto

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Osservazione 1.1. *Il risultato ottenuto poteva essere osservato anche piú rapidamente al modo seguente, sempre naturalmente per* $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)\,x^k = \sum_{h=1}^{\infty} h\,x^{h-1} = \left(\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Esercizio

Assegnata la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+k^2}$$

- Determinare l'intervallo di convergenza, precisando la convergenza o meno ai suoi estremi,
- detta $S(x)$ la somma determinare il polinomio di Taylor relativo al quadrato $S^2(x)$ con punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n = 2$.

2.1. Soluzione.

- Applichiamo il criterio del rapporto

$$\left|\frac{\frac{x^k}{1+k^2}}{\frac{x^{k-1}}{1+(k-1)^2}}\right| = \frac{k^2-2k+2}{k^2+1}|x| \quad \rightarrow \quad |x|$$

Quindi la serie converge assolutamente per $-1 < x < 1$ e non converge né per $x < -1$ né per $x > 1$.

Per $x = 1$ e per $x = -1$ i termini della serie sono maggiorati in modulo da

$$\frac{1}{1+k^2}$$

termini che costituiscono una serie convergente: pertanto la serie assegnata converge assolutamente nell'intervallo $[-1, 1]$ estremi inclusi.

- Indichiamo con $f(x) = S^2(x)$: il polinomio di Taylor richiesto é

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Riesce naturalmente

$$\begin{array}{lll} f(0) & = S^2(0) & = 1, \\ f'(0) & = 2S(0)S'(0) & = 2\ 1\ \frac{1}{2} = 1, \\ f''(0) & = 2[S'(0)]^2 + 2S(0)S''(0) & = \frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} = \frac{13}{10} \end{array}$$

Il polinomio richiesto é quindi

$$1 + x + \frac{13}{20}x^2$$

Osservazione 2.1. *Il risultato poteva essere ottenuto anche piú rapidamente eseguendo il quadrato della somma dei primi 3 termini della* $S(x)$

$$\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}x^4 + x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3$$

e trascurando i termini con esponente di x maggiore di 2

$$1 + \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{2}{5}x^2$$

3. Esercizio

Assegnata la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sin(x))^n$$

studiarne la convergenza.
Detta $f(x)$ la somma della serie calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(x)dx$$

3.1. Soluzione.

I termini della serie soddisfano, qualunque sia $x \in R$, la diseguaglianza

$$\left|\frac{n+1}{2^n}(\sin(x))^n\right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

I termini, non dipendenti da x a secondo membro formano, come si riconosce ad esempio col criterio del rapporto, una serie convergente.
Pertanto:

- La serie di funzioni assegnata converge assolutamente $\forall x \in R$,
- la serie di funzioni assegnata converge $\forall x \in R$,
- la serie di funzioni assegnata converge (criterio di Weierstrass) uniformemente $\forall x \in R$.

Detta $f(x)$ la somma della serie, la convergenza uniforme permette la seguente uguaglianza

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\cos(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(x)\cos(x)dx$$

da cui tenuto presente che

$$\int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(x)\cos(x)dx = \sin^{n+1}(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\cos(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Indicato con*

$$y = \frac{\sin(x)}{2}$$

e tenuto presente che $|y| < 1$, *la serie precedente si scrive anche come*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n = \sum_{m=1}^{\infty} my^{m-1} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} y^m\right)' = \frac{1}{(1-y)^2}$$

Risostituendo ad y *la sua espressione si riconosce*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sin(x))^n = \frac{4}{4 - 4\sin(x) + \sin^2(x)}$$

4. Esercizio

Dimostrare che esiste l'integrale improprio

$$\int\int_B \frac{x}{\tan(x^2+y^2)}\,dxdy, \quad B = x^2 + y^2 \leq 1$$

e successivamente calcolarne il valore.

4.1. Soluzione. La funzione integranda proposta ha un punto di discontinuitá nell'origine.
Tenuto conto che

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{\tan(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{\cos(t)} \lim_{t\to 0} \tfrac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

dall'ultimo limite segue che in un intorno dell'origine

$$0.5 \leq \frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq 1.5$$

ovvero

$$0.5(x^2+y^2) \leq \tan(x^2+y^2) \leq 1.5(x^2+y^2)$$

Dalla minorazione a primo membro e dalla $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ segue che

$$\left|\frac{x}{\tan(x^2+y^2)}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{0.5(x^2+y^2)} = \frac{1}{0.5(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}}$$

Diseguaglianza sufficiente a riconoscere l'esistenza dell'integrale improprio assegnato.

Successivamente motivi di simmetria fanno riconoscere che il valore di tale integrale non puó che essere 0. Infatti l'integrale improprio relativo al semicerchio di destra, $x \geq 0$ e quello relativo al semicerchio di sinistra, $x \leq 0$ sono uguali ed opposti.

Parte 6

Le prove d'esonero 2004/2005

CAPITOLO 37

Esonero 18 novembre 2004

1. Soluzioni

1.1. Esercizio.

i): *Dimostrare che l'equazione* $y = xy + \ln y$ *definisce in un intorno di* $P = (1, 1)$ *una funzione* $y = f(x)$

ii): *Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 1$ *di ordine* 2 *della* $f(x)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- Il teorema di Dini richiede che
  - il punto assegnato $(1, 1)$ soddisfi l'equazione
  $$F(x, y) = y - xy - \log(y) = 0$$
  cosa che accade,
  - in tale punto riesca $F_y(x, y) = 1 - x - 1/y \neq 0$ cosa che accade essendo $F_y(1, 1) = -1$

  quindi l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce, vedi Figura 1, per x in un intorno di $x_0 = 1$ una funzione implicita $y = f(x)$, $f(1) = 1$.

  Tale funzione $f(x)$ é, nell'intorno di $x_0 = 1$ in cui é definita anche indefinitamente derivabile.
- Il polinomio di Taylor richiesto é, per definizione
  $$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2$$
  Per determinarlo occorre determinare i due valori $f'(1)$ e $f''(1)$:
  - $$f(x) - x\, f(x) - \log(f(x)) \equiv 0 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow f'(x) - f(x) - x\, f'(x) - f'(x)/f(x) \equiv 0$$
  da cui si ricava
  $$f'(1) - f(1) - 1\, f'(1) - f'(1)/f(1) = 0$$
  $$\Rightarrow f'(1) = -1$$

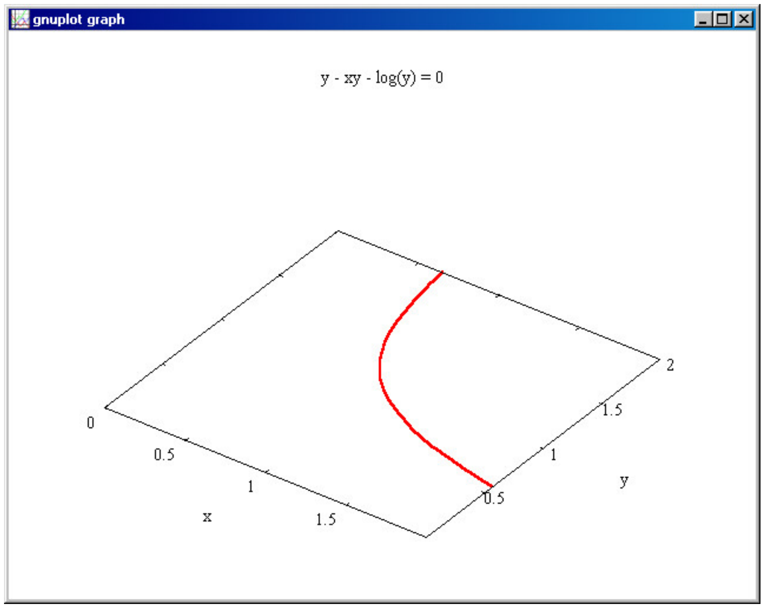


FIGURA 1. Il luogo del piano $y - xy - \log(y) = 0$.

–

$$f'(x) - f(x) - x\, f'(x) - f'(x)/f(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) - f'(x) - f'(x) - xf''(x) - \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} = 0$$

$$f''(1) - f'(1) - f'(1) - 1f''(1) - \frac{f''(1)f(1) - f'^2(1)}{f^2(1)} = 0$$

$$\Rightarrow f''(1) = 3$$

Ne segue

$$P(x) = 1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2$$

ovvero

$$P(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$$

OSSERVAZIONE 1.1. *L'equazione $y - xy - \log(y) = 0$ é risolvibile molto piú facilmente rispetto ad x che non rispetto da y*

$$x = g(y) = 1 - \frac{1}{y}\,\log(y)$$

La funzione $y = f(x)$ cercata é semplicemente l'inversa della $g(y)$ di cui sopra.

Il grafico della $x = g(y)$ si disegna facilmente, ad esempio con un GnuPlot: il grafico dell'inversa $y = f(x)$ é semplicemente, vedi Figura 2, il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante...

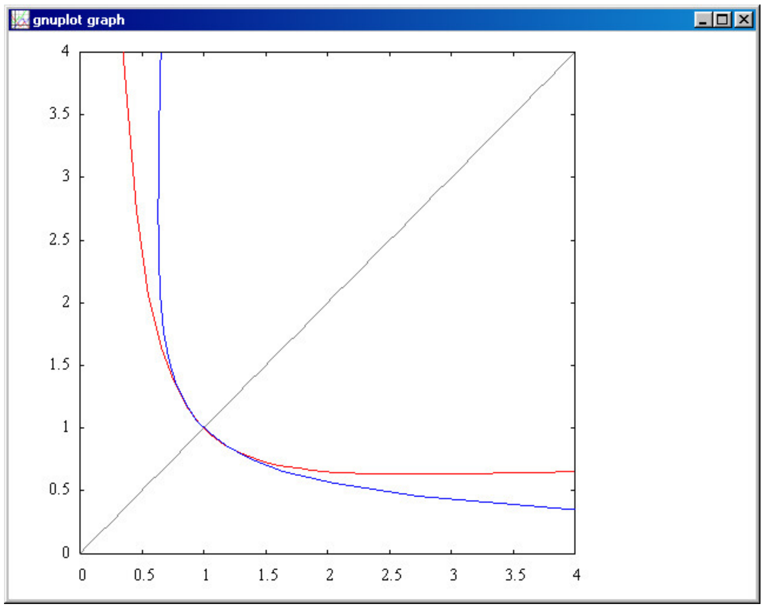


FIGURA 2. Il grafico rosso di $x = g(y)$ e quello blu della $y = f(x)$

1.2. Esercizio.
Detti $A = (0, 4)$ e $B = (-4, -4)$, trovare i punti P della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ che rendano minima e massima la somma dei quadrati

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La somma dei quadrati delle distanze del punto $P = (x, y)$ dai due punti $A = (0, 4)$ e $B = (-4, -4)$ é

$$f(x, y) = x^2 + (y - 4)^2 + (x + 4)^2 + (y + 4)^2$$

ovvero

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2) + 8x + 48$$

Tenuto presente che i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ si rappresentano parametricamente con

$$x = 2\cos(\theta),\ y = 2\sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

il massimo e il minimo richiesti sono, vedi Figura 3, il massimo e il minimo di

$$f[2\cos(\theta), 2\sin(\theta)] = 8[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)]+16\cos(\theta)+48 = 16\cos(\theta)+56$$

ovviamente corrispondenti a

$$\begin{cases} \text{minimo} & = & 40, & \theta = \pi \\ \text{Massimo} & = & 72, & \theta = 0 \end{cases}$$

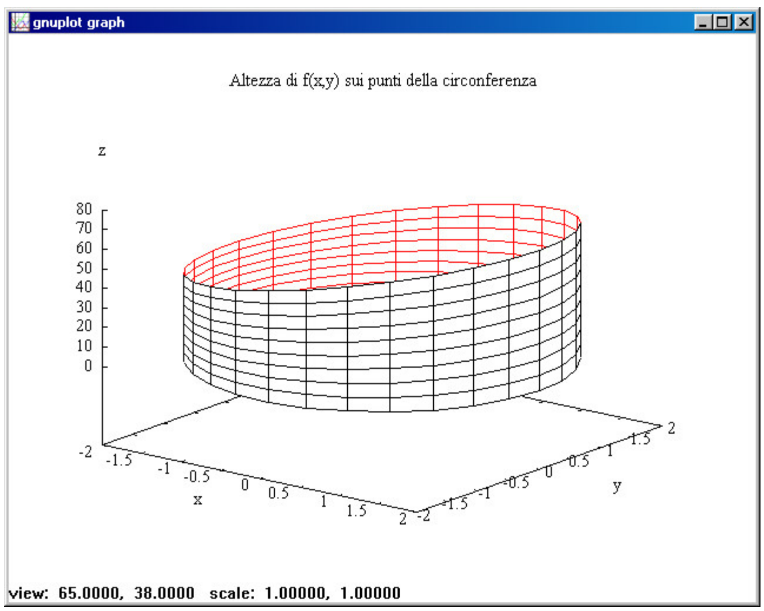


FIGURA 3. L'altezza della $f(x, y)$ sui punti della circonferenza.

Il metodo dei moltiplicatori

L'esercizio poteva anche essere risolto secondo l'algoritmo dei *moltiplicatori di Lagrange* introducendo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2(x^2 + y^2) + 8x + 48 + \lambda\,(x^2 + y^2 - 4)$$

e considerando il sistema formato dalle tre derivate parziali uguali a zero

$$\begin{cases} 4x + 8 + 2\lambda\, x & = 0 \\ 4y + 2\lambda\, y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 & = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2, \quad y = 0$$

Da cui

$$f(-2, 0) = 40 \quad f(2, 0) = 72$$

1.3. Esercizio.

- **i):** *Calcolare il lavoro del campo vettoriale $F = (-x^2y, xy^2)$ percorrendo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel verso antiorario.*
- **ii):** *Verificare il risultato precedente applicando il teorema di Stokes.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il lavoro richiesto é il valore del seguente integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza assegnata e $\overrightarrow{t}$ il versore tangente orientato nel verso antiorario.

$$\begin{cases} C : x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \\ \overrightarrow{t} = \{-\sin(\theta), \cos(\theta)\}, \\ ds = \sqrt{sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}\, d\theta = \, d\,\theta \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^{2\pi} \left\{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\right\} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\, d\,\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, d\,u = \frac{\pi}{2}$$

Il teorema di Stokes stabilisce l'uguaglianza

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}_z(\overrightarrow{F})\, dx\, dy$$

essendo Ω il cerchio di centro l'origine e raggio 1
Tenuto conto che

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \\ -x^2y & xy^2 & 0 \end{pmatrix} = \{0, 0, x^2 + y^2\}$$

Servendosi per l'integrale doppio sul cerchio Ω delle coordinate polari si ha

$$\iint_{\Omega} \operatorname{rot}_z(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = 2\,\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

valore in accordo con quello ottenuto precedentemente per l'integrale curvilineo.

1.4. Esercizio.

i): *Calcolare l'area della superficie* Σ *contenuta nel piano* $x+z=4$ *e limitata dal cilindro* $x^2+(y-2)^2 \leq 1$.

ii): *Calcolare l'integrale superficiale*

$$\iint_\Sigma xz d\sigma.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La superficie assegnata, vedi Figura 4 ha la seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & 2+\rho\sin(\theta) \\ z = & 4-\rho\cos(\theta) \end{cases} \qquad \Omega: \rho\in[0,1],\, \theta\in[0,2\pi]$$

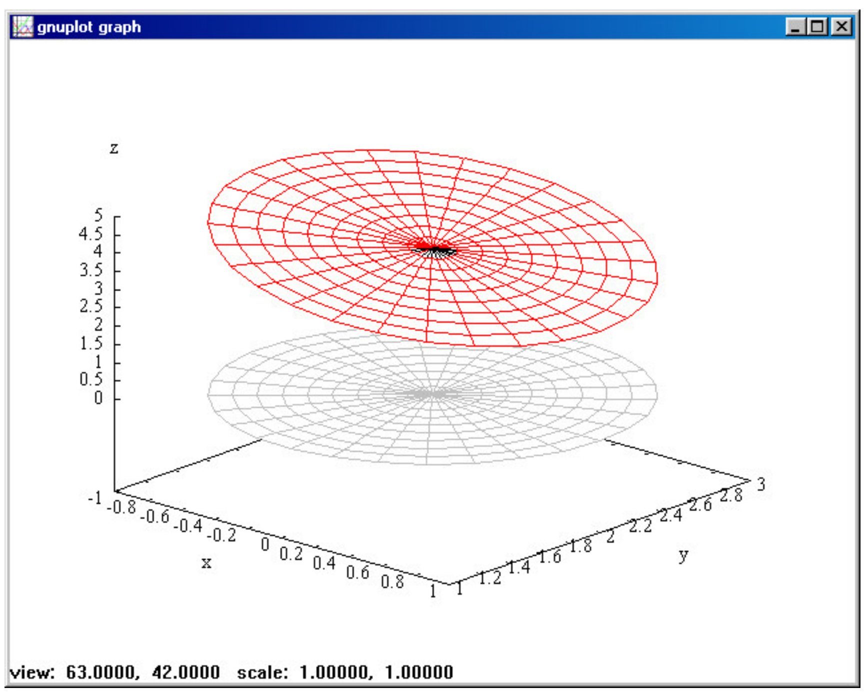


FIGURA 4. La superficie Σ, ellisse rossa, rappresentata sul cerchio grigio.

La matrice Jacobiana é la seguente

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\rho\,\sin(\theta) & \rho\,\cos(\theta) & \rho\,\sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad L^2 + M^2 + N^2 = 2\rho^2$$

Ne segue per l'area l'espressione:

$$Area(\Sigma) = \iint_\Omega \rho\sqrt{2} d\rho\, d\theta = 2\pi\sqrt{2}\frac{1}{2} = \pi\sqrt{2}$$

L'integrale superficiale é il seguente

$$\iint_\Sigma xz\, d\sigma = \iint_\Omega \{\rho\,\cos(\theta)(4 - \rho\,\cos(\theta))\}\, \rho\sqrt{2}\, d\rho\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\,\cos(\theta)\, d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho - \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

Osservazione 1.2. *La superficie* Σ *assegnata é assegnata in forma cartesiana*

$$z = f(x, y) = 4 - x, \quad \Omega : x^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

La sua area coincide pertanto con

$$\iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy = \iint_\Omega \sqrt{2}\, dx\, dy = \pi\sqrt{2}$$

avendo tenuto conto che l'area del cerchio Ω *vale* π.
Il fattore $\sqrt{2}$ *é il reciproco del valore del coseno dell'angolo tra la normale al piano* $x + z = 4$ *e l'asse* z.

CAPITOLO 38

Esonero 7 dicembre 2004

1. Soluzioni

ANALISI VETTORIALE
2004-2005
Secondo esonero

1.1. Esercizio.

i): *Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea*

$$y''' + 2ay'' - 3a^2y' = 0$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii): *Determinare l'integrale generale dell'equazione*

$$y''' + 2ay'' - 3a^2y' = 4\mathrm{e}^x$$

per $a = 0$ *e per* $a = 1$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le soluzioni dell'equazione omogenea dipendono dalle radici dell'equazione caratteristica associata

$$\lambda^3 + 2a\lambda^2 - 3a^2\lambda = 0 \quad \to \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = a, \\ \lambda_3 = -3a \end{cases}$$

Si tratta di tre radici diverse se $a \neq 0$, coincidenti se $a = 0$
L'integrale generale dell'equazione omogenea assegnata é pertanto

$$\begin{cases} a \neq 0 :\to & y(x) = c_1 + c_2 e^{a\,x} + c_3 e^{-3a\,x} \\ a = 0 :\to & y(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 \end{cases}$$

Il caso $a = 0$ é evidente anche senza particolare teoria: l'equazione, per $a = 0$ si riduce a

$$y''' = 0$$

e le sue soluzioni sono ovviamente tutte e sole le funzioni con derivata terza identicamente nulla. . . i polinomi di secondo grado !

Equazione completa:

$$a = 0 :\rightarrow y''' = 4\,e^x \quad y(x) = 4\,e^x + c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2$$

$$a = 1 :\rightarrow y''' + 2\,y'' - 3y' = 4\,e^x$$

Tenuto conto che e^x figura, appunto per $a = 1$, tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata, cerchiamo la soluzione particolare nella forma $A\,x\,e^x$.
Svolti i conti si riconosce che $\overline{y}(x) = x\,e^x$ soddisfa l'equazione completa: pertanto l'integrale generale richiesto é

$$y(x) = x\,e^x + c_1 + c_2 e^{\,x} + c_3 e^{-3\,x}$$

1.2. Esercizio.
Assegnata l'equazione differenziale

$$y' = \sin(x)(1 - y^2)$$

- *si determinino tutte le soluzioni,*
- *si determini la soluzione che soddisfa la condizione iniziale* $y(0) = 0$
- *si esamini per quali* $a \in R$ *le soluzioni che soddisfano la condizione iniziale* $y(0) = a$ *sono limitate.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione assegnata

$$y' = \sin(x)(1 - y^2),$$

é a variabili separabili. Possiede le soluzioni d'equilibrio

$$y_{-1}(x) \equiv -1, \quad y_1(x) \equiv 1.$$

soluzioni ovviamente dei problemi iniziali $y(0) = \pm 1$
Le soluzioni dei problemi di Cauchy con $y(0) = a \neq \pm 1$ si determinano con il noto algoritmo delle equazioni a variabili separabili, un'integrazione e una esplicitazione.

$$\int_a^y \frac{dy}{1 - y^2} = \int_0^x \sin(x)\,dx$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{1 - y^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y}\right\}$$

si ha

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+a}{1-a}\right| = -\cos(x)+1$$

Le frazioni

$$\frac{1+y}{1-y}, \quad \frac{1+a}{1-a}$$

hanno (necessariamente) lo stesso segno quindi

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+a}{1-a}\right| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$$

ovvero

$$\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\left(\frac{1-a}{1+a}\right) = e^{2(-\cos(x)+1)}$$

da cui, ricavando la y si ottiene l'espressione della soluzione del problema di Cauchy:

$$y_a(x) = \frac{\dfrac{1+a}{1-a}e^{-2\cos(x)+2} - 1}{\dfrac{1+a}{1-a}e^{-2\cos(x)+2} + 1} \tag{32}$$

La soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = 0$ si deduce naturalmente dal calcolo precedente (32) per le $y_a(x)$

$$y_0(x) = -\frac{e^{-2\,(\cos(x)-1)} - 1}{e^{-2\,(\cos(x)-1)} + 1}$$

Limitatezza delle soluzioni trovate:

- tenuto conto che i grafici di due soluzioni diverse dell'equazione non possono intersecarsi,
- tenuto conto dell'esistenza delle due soluzioni d'equilibrio $y \equiv -1, \; y \equiv 1$,

si riconosce che sono ovviamente tutte limitate quelle con $y(0) \in [-1, 1]$ i cui grafici non possono che essere contenuti nella striscia $-1 < y < 1$.

1.3. Esercizio.

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{nx}$$

i): *determinare l'intervallo di convergenza della serie e studiare la convergenza agli estremi;*

ii): *detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare*

$$\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx, \quad a < \log(2);$$

iii): *calcolare, se esiste,*

$$\int_{-\infty}^{\log(2)} S(x)\,dx.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La serie assegnata coincide naturalmente con la seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{e^x}{4}\right)^n = \frac{e^x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{e^x}{4}\right)^{n-1}$$

che la rende simile alla derivata di una serie geometrica...

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Il criterio del rapporto applicato alla serie dell'esercizio assegnato conduce a considerare la frazione

$$\frac{(n+1)\left(\frac{e^x}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{e^x}{4}\right)^n} = \frac{n+1}{n}\frac{e^x}{4} \to \frac{e^x}{4}$$

La serie assegnata pertanto converge in corrispondenza a tutti i valori x per i quali

$$\frac{e^x}{4} < 1$$

La serie converge pertanto nell'intervallo

$$E: \; x < \log(4)$$

Nell'estremo $x = \log(4)$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{n\log(4)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} 4^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n$$

ovviamente non convergente.

Tenuto conto della relazione precedentemente osservata tra la serie assegnata e la serie geometrica, tenuto conto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

si riconosce, per $x \in E$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{nx} = \frac{e^x}{4} \; \frac{1}{(1-\dfrac{e^x}{4})^2}$$

L'integrale richiesto $\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx, \quad a < \log(2)$, é lecito perché l'intervallo proposto é contenuto nell'insieme E in cui la serie converge. Puó calcolarsi inoltre con due strategie equivalenti:

- servendosi dell'espressione esplicita di $S(x)$

$$\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx = \int_a^{\log(2)} \frac{e^x}{4} \; \frac{1}{(1-\dfrac{e^x}{4})^2}\,dx = \left. \frac{1}{(1-\dfrac{e^x}{4})} \right|_a^{\log(2)} =$$

$$= \frac{1}{(1-\dfrac{e^{\log(2)}}{4})} - \frac{1}{(1-\dfrac{e^a}{4})} = 2 - \frac{1}{(1-\dfrac{e^a}{4})}$$

- integrando *termine a termine*, operazione permessa essendo la serie assegnata uniformemente convergente nell'intervallo di integrazione assegnato,

$$\int_a^{\log(2)} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\log(2)} \frac{n}{4^n} \mathrm{e}^{nx} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(e^{n\log(2)} - e^{na} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{4} \right)^n =$$

$$= 2 - \frac{1}{1-\dfrac{e^a}{4}}$$

  risultato naturalmente uguale a quello precedente...!

La domanda relativa all'integrazione impropria

$$\int_{-\infty}^{\log(2)} S(x)\,dx = \lim_{a\to--\infty} \int_a^{\log(2)} S(x)\,dx$$

su tutta la semiretta riguarda

- esistenza dell'integrale,
- e suo valore.

E' facile rispondere contemporaneamente alle due questioni dal momento che possediamo, esplicitamente l'espressione dell'integrale su $[a, \log(2)]$, pertanto

$$\int_{-\infty}^{\log(2)} S(x)\,dx = \lim_{a\to--\infty}\left(2-\frac{1}{1-\dfrac{e^a}{4}}\right)=1$$

1.4. Esercizio.

Sia

$$f(x,y)=e^{-x^2-4y^2}$$

- *calcolare l'integrale*
$$\iint_{E_M} f(x,y)dxdy$$
essendo E_M la regione delimitata dall'ellisse $x^2+4y^2\le M^2$
- *riconoscere che $f(x,y)$ soddisfa la condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale esteso a tutto R^2*
- *determinare il valore di*
$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione esponenziale e^t verifica, per ogni $t>0$ le diseguaglianze

$$e^t>1+t,\quad e^{-t}<\frac{1}{1+t}$$

dalle quali segue

$$e^{-x^2-y^2}<\frac{1}{1+x^2+y^2}$$

Tenuto presente che

$$e^{-x^2-4y^2}\le e^{-x^2-y^2}<\frac{1}{1+x^2+y^2}$$

ne segue l'esistenza dell'integrale improprio in tutto il piano.
Calcoliamo l'integrale sulla regione E_M delimitata dall'ellisse

$$\frac{x^2}{M^2}+\frac{y^2}{M^2/4}=1$$

servendosi delle coordinate polari-ellittiche

$$x=M\rho\,\cos(\theta),\ y=\frac{M}{2}\rho\sin(\theta),\quad \rho\in[0,1],\theta\in[0,2\pi]$$

Lo jacobiano della trasformazione vale $\frac{1}{2}M^2\rho$ pertanto

$$\iint_{E_M} e^{-x^2-4y^2} dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-M^2\rho^2} \frac{M^2}{2} \rho\, d\rho =$$
$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^1 e^{-M^2\rho^2} \left(2\, M^2 \rho\right) d\rho = \frac{1}{2}\pi \left(1 - e^{-M^2}\right)$$

Passando al limite su $M \to \infty$ si ottiene quindi

$$\int_{R^2} e^{-x^2-4y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\pi$$

Parte 7

Le prove d'esonero 2005/2006

CAPITOLO 39

Esonero ottobre 2005

1. Esercizio

Sia $F(x,y) = \cos(xy) + x - \frac{2}{\pi}y$.

a): *Dimostrare che l'equazione* $F(x,y) = 0$ *definisce implicitamente, in un intorno del punto* $P_0 = (0, \frac{\pi}{2})$, *una funzione* $y = f(x)$;

b): *determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* $y = f(x)$ *nel punto* P_0;

c): *determinare il polinomio di Taylor del secondo ordine di* $f(x)$ *di punto iniziale* $x_0 = 0$.

1.1. Soluzione:

$\boxed{\text{a}}$ Occorre verificare che siano soddisfatte nel punto le condizioni sufficienti del Teorema di Dini:

- $F \in C^1$ almeno in un intorno del punto assegnato,
- $F(0, \frac{\pi}{2}) = 0$,
- $F_y(x,y) = -x\sin(xy) - 2/\pi \quad F_y(0, \frac{\pi}{2}) = -2/\pi \neq 0$.

$\boxed{\text{b}}$ tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $x_0 = 0$, $y = f(0) + f'(0)x$

Dal Teorema di Dini si ha:

$$f(o) = \frac{\pi}{2}, f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, g(x))} = -\frac{-y\sin(xy) + 1}{-x\sin(xy) - 2/\pi} \quad f'(0) = \frac{\pi}{2}$$

La retta tangente é pertanto

$$y = \frac{1}{2}\pi(1 + x)$$

Risultato prevedibile guardando, per $x \simeq 0$, all'equazione

$$F(x,y) \simeq 1 + x - \frac{2}{\pi}y = 0$$

$\boxed{\text{c}}$ Il polinomio di Taylor richiesto é

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Per scriverlo esplicitamente manca il solo coefficiente $f''(0)$.
Dal Teorema di Dini si ha, vedi Dispense pag.33,

$$F_{xx} + 2F_{xy}f' + F_{yy}\, f'^2 + F_y f'' = 0$$

da cui, per $x = 0$ si ha

$$F_x = 1,\ F_y = -\frac{2}{\pi},\ F_{xx} = -\frac{\pi^2}{4},\ F_{xy} = 0,\ F_{yy} = 0$$

quindi

$$-\frac{\pi^2}{4} - \frac{2}{\pi} f''(0) = 0 \quad \to \quad f''(0) = -\frac{\pi^3}{8}$$

Il polinomio di Taylor richiesto é pertanto

$$P_2(x) = \frac{\pi}{2}\,\{1 + x\} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi^3}{8}\, x^2$$

Osservazione 1.1. *Le formule riportate a pag. 34 delle Dispense contengono (purtroppo) un errore: trovarlo e inviare una mail. Il correttore piú rapido sará pubblicamente riconosciuto !*

2. Esercizio

Disegnare l'insieme E definito dal vincolo

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$$

e calcolare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = 3x + y$$

su tale E.

2.1. Soluzione:

L'equazione $(x^2+y^2-1)(4x^2+9y^2-36) = 0$ é soddisfatta dalle soluzioni di ciascuna delle due equazioni

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

soluzioni che rappresentano

- i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ di centro l'origine e raggio 1,
- i punti dell'ellisse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ di centro ancora l'origine e semiassi 3 e 2.

Il problema di massimo e minimo proposto corrisponde pertanto ai due problemi di massimo e minimo della funzione f rispettivamente

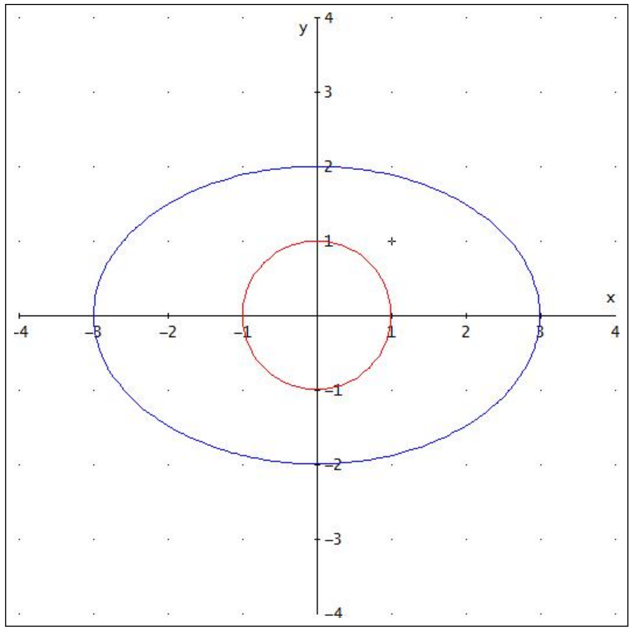


FIGURA 1. $(x^2+y^2-1)(4x^2+9y^2-36)=0$

- sulla circonferenza,
- sull'ellisse.

Problema sulla circonferenza:

$$L(x,y,\lambda)=3x+y+\lambda(x^2+y^2-1) \qquad \begin{cases} 3+2\lambda x=0 \\ 1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Ne segue

$$x=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

ovvero

$$\max_{x^2+y^2=1}(3x+y)=\sqrt{10}, \qquad \min_{x^2+y^2=1}(3x+y)=-\sqrt{10}$$

Problema sull'ellisse:

$$L(x,y,\lambda)=3x+y+\lambda(4x^2+9y^2-36) \qquad \begin{cases} 3+8\lambda x=0 \\ 1+18\lambda y=0 \\ 4x^2+9y^2=36 \end{cases}$$

Ne segue

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{85}}{72}, \quad x = \pm\frac{27}{\sqrt{85}}, \quad y = \pm\frac{4}{\sqrt{85}}$$

ovvero

$$\max_{4x^2+9y^2=36}(3x+y) = \sqrt{85}, \qquad \min_{4x^2+9y^2=36}(3x+y) = -\sqrt{85}$$

Riassumendo il massimo e il minimo di $3x + y$ sull'insieme E circonferenza ed ellisse sono rispettivamente

$$\max_E (3x+y) = \sqrt{85}, \quad \min_E (3x+y) = -\sqrt{85}$$

e sono raggiunti sull'ellisse.

3. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (xy^2, -x^2y)$,

- **a) :** *calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo la curva, percorsa nel verso antiorario, composta dall'arco di parabola* $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$ *e dal segmento di estremi* $(1,1)$ *e* $(-1,1)$*;*
- **b):** *verificare il risultato ottenuto servendosi del teorema di Stokes applicato alla regione delimitata dalla curva data.*

3.1. Soluzione:

La curva assegnata si compone di due parti

- un arco di parabola P:

$$x = t, y = t^2,\ t \in [-1,1], \tau = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\{1,\ 2t\},\ ds = \sqrt{1+4t^2}dt$$

- un segmento orizzontale S:

$$x = t,\ y = 1,\ t \in [-1,1],\ \tau = \{-1, 0\}, ds = dt$$

$$\int_P \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_{-1}^{1} (t^5 - 2t^5)dt = 0$$

$$\int_P \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_{-1}^{1} (-t)dt = 0$$

Il lavoro lungo l'intera curva vale 0.
La formula di Stokes avrebbe prodotto

$$\int_{\partial\Omega} F\times\tau\, ds0 \iint_{\Omega} \mathrm{rot}\,_z(F)\, dx\, dy = \iint_{\Omega}(-4xy)dxdy = -4\int_{-1}^{1} xdx \int_{x^2}^{1} ydy = 0$$

risultato in accordo con il precedente.

4. Esercizio

Disegnare la regione D del piano

$$D := \left\{(x,y) : \frac{x}{\pi} \leq y \leq \pi x,\ 0 \leq xy \leq \pi\right\}$$

e calcolarne l'area usando il teorema della divergenza.

4.1. Soluzione:

La limitazione

$$\frac{x}{\pi} \leq y \leq \pi x$$

implica $x \geq 0$, ovvero che la regione D richiesta appartiene al semipiano delle x non negative.

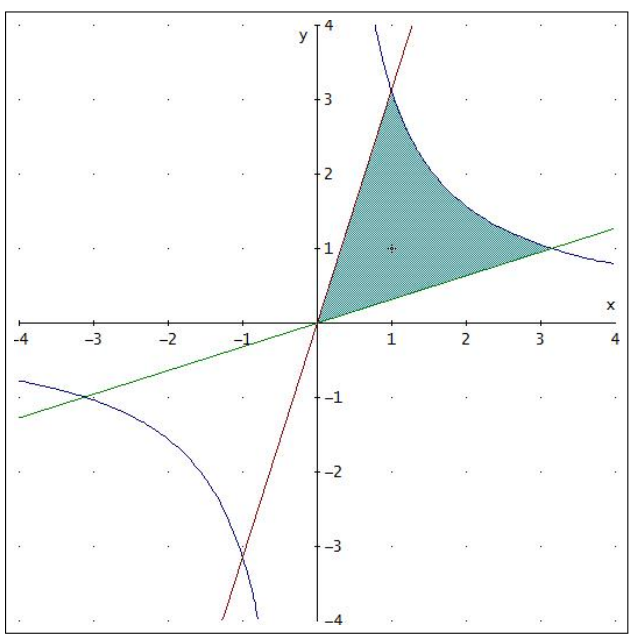


FIGURA 2. La regione D del quarto esercizio.

L'area richiesta corrisponde, per il teorema della divergenza al flusso uscente seguente

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D}\{x,\, y\}\times\overrightarrow{\nu}\, ds$$

La frontiera ∂D si compone di tre porzioni, vedi Figura 2,

- primo segmento S_1:

$$x=t,\ y=\pi\, t,\ \ t\in[0,1],\ \overrightarrow{\nu}=\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\{\pi,-1\},\ ds=\sqrt{1+\pi^2}\, dt$$

- tratto curvilineo C :

$$x=t,\ y=\pi/t,\ t\in[1,\pi],\ \ \overrightarrow{\nu}=\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2/t^2}}\left\{\frac{\pi}{t^2},\, 1\right\},\ ds=\sqrt{1+\pi^2/t^2}\, dt$$

- secondo segmento S_2:

$$x=t,\ y=t/\pi,\ t\in[0,\pi],\ \overrightarrow{\nu}=\frac{1}{\sqrt{1+1/\pi^2}}\left\{1,\, -\frac{1}{\pi}\right\},\ ds=\sqrt{1+1/\pi^2}dt$$

$$\frac{1}{2}\int_{S_1}\{x,\, y\}\times\overrightarrow{\nu}\, ds=\frac{1}{2}\int_0^1(\pi t-\pi t)dt=0$$

$$\frac{1}{2}\int_{C}\{x,\, y\}\times\overrightarrow{\nu}\, ds=\frac{1}{2}\int_1^\pi\ \left(t\frac{\pi}{t^2}+\frac{\pi}{t}\right)dt=\pi\ \ln(\pi)$$

$$\frac{1}{2}\int_{S_2}\{x,\, y\}\times\overrightarrow{\nu}\, ds=\frac{1}{2}\int_0^\pi(t-t)dt=0$$

Il flusso uscente, cioé l'area richiesta vale quindi $\pi\ \ln(\pi)$.

CAPITOLO 40

Esonero novembre 2005

1. Esercizio

Assegnata la superficie parametrica Σ

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}u - 2\cos(v) - \sin(v), \\ y = \sqrt{3}u + 2\cos(v) - \sin(v), \qquad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi] \\ z = \sqrt{2}(u + \sqrt{3}\sin(v)) \end{cases}$$

determinare:

- *la matrice*
$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$
- *i versori* $\overrightarrow{\nu}$ *ortogonali a* Σ.
- *l'area di* Σ,
- *le equazioni parametriche delle due curve bordo di* Σ.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La matrice della prima domanda:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -\cos(v) + 2\ \sin(v) & -\cos(v) - 2\ \sin(v) & \sqrt{6}\ \cos(v) \end{pmatrix}$$

I vettori normali a Σ si ricavano dai minori L, M, N della precedente matrice

$$\begin{cases} L = 4\sqrt{2}\ \cos(v) + 2\sqrt{2}\ \sin(v) \\ M = -4\sqrt{2}\ \cos(v) + 2\sqrt{2}\ \sin(v) \\ N = -4\sqrt{3}\ \sin(v) \end{cases}$$

Per calcolare dei versori occorre calcolare l'espressione

$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-4\sqrt{2}\ \cos(v) + 2\sqrt{2}\ \sin(v)\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\ \cos(v) + 2\sqrt{2}\ \sin(v)\right)^2 + 48\sin(v)^2}$$

che semplificata si riduce a

$$\sqrt{64} = 8$$

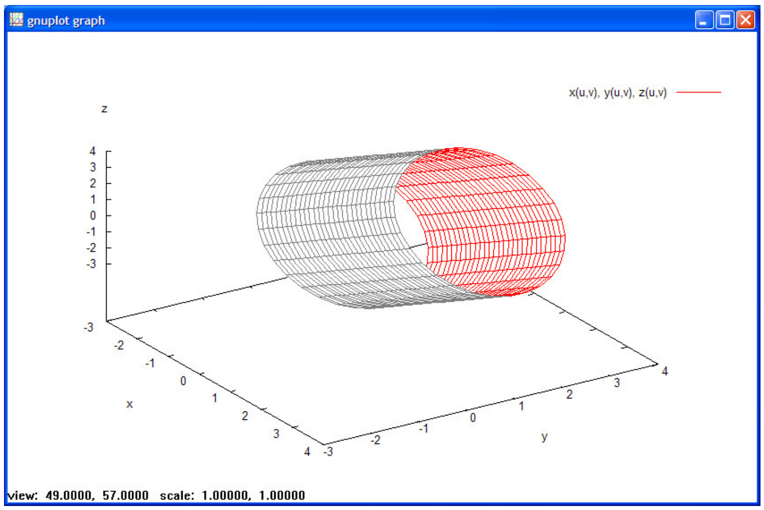


FIGURA 1. La superficie del primo esercizio

I versori normali a Σ sono pertanto

$$\overrightarrow{\nu} = \pm\frac{1}{8}\left\{4\sqrt{2}\,\cos(v) + 2\sqrt{2}\,\sin(v),\ -4\sqrt{2}\,\cos(v) + 2\sqrt{2}\,\sin(v),\ -4\sqrt{3}\,\sin(v)\right\}$$

OSSERVAZIONE 1.1. *Si noti come i versori normali alla superficie trovati non dipendano da* u : *sulla superficie tutti i punti ottenuti da una stessa* v *al variare di* $u \in [0,1]$ *hanno la stessa normale...*
Fa pensare al cilindro....

L'area di Σ é

$$Area(\Sigma) = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} \sqrt{L^2+M^2+N^2}\,dv = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} 8\,dv = 16\pi$$

I bordi di Σ sono le due curve $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1$ dedotte dalla rappresentazione parametrica fornita allorché u prende i due valori 0 e 1 estremi del suo intervallo di variabilitá

$$\mathcal{C}_0 : \begin{cases} x = -2\cos(v) - \sin(v), \\ y = 2\cos(v) - \sin(v), \\ z = \sqrt{2}\sqrt{3}\sin(v) \end{cases} \qquad \mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = \sqrt{3} - 2\cos(v) - \sin(v), \\ y = \sqrt{3} + 2\cos(v) - \sin(v), \\ z = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}\sin(v)) \end{cases}$$

per

$$v \in [0, 2\pi]$$

OSSERVAZIONE 1.2. *La superficie Σ assegnata é uguale (nel senso che si ottiene da essa con un movimento rigido) al cilindro*

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\,\cos(v) \\ y = 2\sqrt{2}\,\sin(v) \qquad u \in [0,1], \quad v \in [0, 2\pi] \\ z = 2\sqrt{2}\,u \end{cases}$$

Il movimento é quello determinato dalla matrice (di rotazione[1])

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \\ \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

É facile verificare che il valore dell'area non cambia: il cilindro originale ha infatti

- *raggio* $= 2\sqrt{2}$,
- *altezza* $= 2\sqrt{2}$,
- *superficie (laterale)* $= 2\sqrt{2} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} = 16\pi$

2. Esercizio

Assegnati la curva chiusa

$$\mathcal{C}: \ x = \sqrt{2}\sin t \cos t, \ y = \cos^2 t, \ z = \sin^2 t, \quad 0 \le t \le \pi$$

e il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = \{z, x, y\}$

- *determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo $\mathcal{C}$ in uno dei due versi possibili,*
- *riconoscere che la curva $\mathcal{C}$ è l'intersezione tra la sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ed il piano $y + z = 1$ e determinare una superficie Σ che abbia $\mathcal{C}$ come bordo,*

[1] Forse ne avete sentito parlare nei corsi di Geometria

- *determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo $\mathcal{C}$ mediante la formula di Stokes su Σ.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

Richiedere il *Lavoro* del campo $\overrightarrow{F}$ percorrendo $\mathcal{C}$ in uno dei due versi possibili equivale a calcolare il modulo di tale lavoro

$$|Lavoro| = \left| \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds \right|$$

Assumendo come verso di percorrenza quello offerto dalla rappresentazione parametrica al crescere di $t \in [0, \pi]$ si ha il versore

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2}(\cos^2 t - \sin^2 t), -2\sin(t)\cos(t),\ 2\sin(t)\cos(t) \right\}$$

$$ds \ = \ \sqrt{2}\ dt;$$

Tenuto conto che sulla $\mathcal{C}$ riesce

$$F = \{z, x, y\} = \left\{ \sin^2(t),\ \sqrt{2}\sin(t)\cos t,\ \cos^2 t \right\}$$

si ha

$$\left| \int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau} ds \right| = \left| \int_0^{\pi} \left\{ \sin^2 t, \sqrt{2}\sin t\cos t, \cos^2 t \right\} \times \right.$$

$$\left. \left\{ \sqrt{2}(\cos^2 t - \sin^2 t), -2\sin t\cos t, 2\sin t\cos t \right\} dt \right| =$$

$$\left| \int_0^{\pi} (-\sqrt{2}\cos^2 t + 2\cos^3 t\sin t) dt \right| = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

- É facile riconoscere che $\mathcal{C}$ é una curva chiusa.
- É facile riconoscere che

$$\left(\sqrt{2}\sin(t)\cos(t)\right)^2 + \left(\cos^2(t)\right)^2 + \left(\sin^2(t)\right)^2 = \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)^2 = 1$$

e quindi i punti di $\mathcal{C}$ appartengono alla superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- É altrettanto facile riconoscere che i punti di $\mathcal{C}$ hanno coordinate che verificano la relazione
$$y + z = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$
e quindi sono punti del piano $y + z = 1$.
Pertanto $\mathcal{C}$ é contenuta nell'intersezione
$$(x^2 + y^2 + z^2 = 1) \cap (y + z = 1)$$
cioé $\mathcal{C}$ é contenuta nella circonferenza intersezione della sfera di centro l'origine e raggio 1 col piano $y + z = 1$.
- $\mathcal{C}$ **non ha punti doppi per** $t \in [0, \pi]$: infatti, con semplici identitá trigonometriche si riconosce che
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t), \;\; z = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$
ovvero
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t), \;\; z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$
equazioni parametriche di un'ellisse del piano xz, curva certamente priva di punti doppi.
- $\mathcal{C}$ chiusa, senza punti doppi, contenuta nell'intersezione $(x^2 + y^2 + z^2 = 1) \cap (y + z = 1)$ coincide

quindi necessariamente

con la circonferenza intersezione della sfera di centro l'origine e raggio 1 col piano $y + z = 1$.

Una superficie Σ cercata é pertanto il cerchio del piano $y + z = 1$ delimitato dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Si tratta di una superficie cartesiana:
$$z = 1 - y, \;\; x^2 + y^2 + (1 - y)^2 \leq 1$$
ovvero
$$z = 1 - y, \quad (x, y) \in E : \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \leq 1$$

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

$$|Lavoro| = \left| \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds \right| = \left| \iint_{\Sigma} rot(F) \times \nu \, d\sigma \right|$$

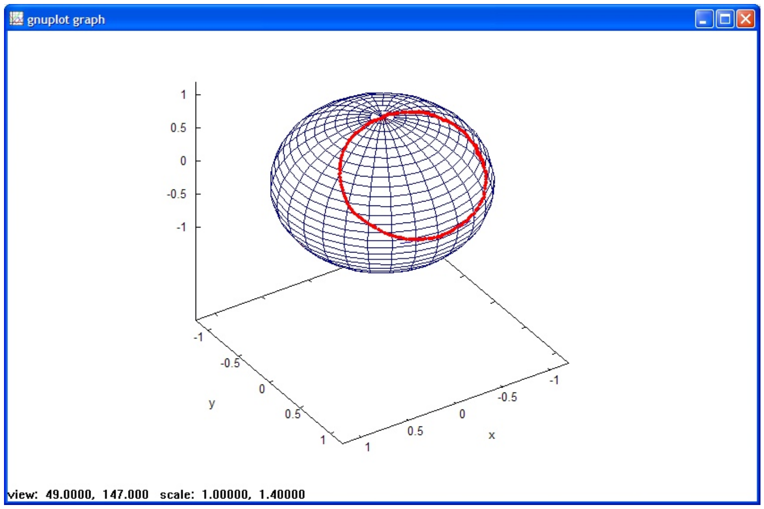


FIGURA 2. La superficie Σ dell'esercizio 2.

Riesce

$$rot(\overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = \{1, 1, 1\}$$

Il versore normale al piano é

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0, 1, 1\}$$

sul piano si ha

$$d\sigma = \sqrt{2}\, dx\, dy$$

Si ha pertanto

$$\left| \iint_{\Sigma} rot(F) \times \nu \, d\sigma \right| = \iint_{E} 2\, dx\, dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

avendo tenuto conto della formula $\pi\, a\, b$ dell'area dell'ellisse di semiassi

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = \frac{1}{2}.$$

3. Esercizio

- *Data l'equazione differenziale* $y' = y\ \log(y)$, *se ne faccia uno studio qualitativo per determinare: l'insieme dove l'equazione é definita, gli intervalli di crescenza e decrescenza, concavitá e convessitá delle sue soluzioni* $y(x)$. *Si tracci quindi un grafico approssimativo delle possibili soluzioni.*
- *Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy*
$$\begin{cases} y' = y\ \log(y), \\ y(0) = e. \end{cases}$$
- *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*
$$\begin{cases} y' = y\ \log(y) + xy, \\ y(0) = 1/e. \end{cases}$$
servendosi della sostituzione $y(x) = e^{z(x)}$,

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

L'equazione $y' = y\ \log(y)$ é definita solo per $y > 0$: quindi la funzione $y(x) \equiv 0$ non é soluzione.
L'unica soluzione costante, o d'equilibrio, é perció $y(x) \equiv 1$.
Dallo studio del segno di y', cioé di $y\ \log(y)$, si ricava che le soluzioni saranno crescenti per $y > 1$ e decrescenti per $0 < y < 1$.
Inoltre, per quanto concerne la convessitá:

$$y'' = y' \log(y) + y' = y \log(y)(1 + \log(y)) \begin{cases} > 0 & \text{se } \{y > 1\} \cup \{y < 1/e\} \\ = 0 & \text{se } y = 1/e \\ < 0 & \text{se } \{1/e < y < 1\} \end{cases}$$

per cui, vedi Figura 3,

- le soluzioni maggiori di uno sono sempre convesse,
- quelle tra zero e uno prima concave e poi convesse, con un flesso a quota $y = 1/e$.

Le osservazioni qualitative precedenti conducono a concludere che

- per le soluzioni con $0 < y(x) < 1$ riesce
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$$
- per le soluzioni $1 < y(x)$ riesce
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 1$$

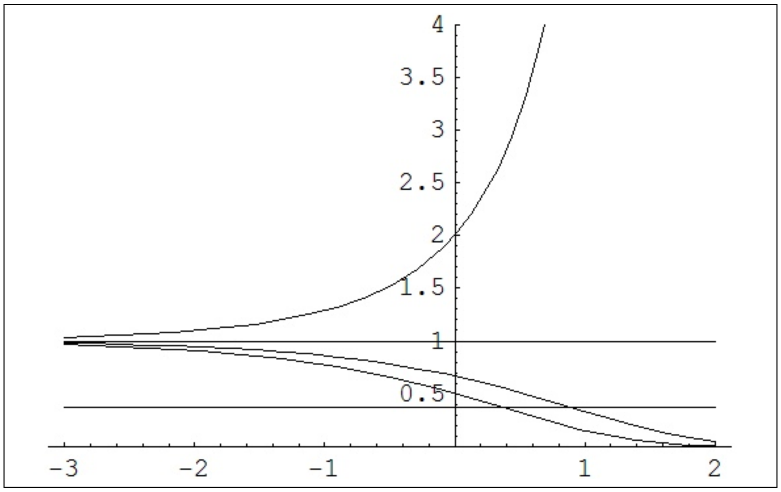


FIGURA 3. Le soluzioni dell'eq.autonoma $y' = y\,\log(y)$: la soluzione d'equilibrio $y \equiv 1$ e la quota $y = 1/e$ alla quale si hanno i flessi.

- si riconosce inoltre che le soluzioni $y(x) > 1$ sono illimitate superiormente[2].

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

Per separazione di variabili:

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int dx \Rightarrow \log|\log y| = x + c$$

Dalla condizione iniziale si ha

$$y(0) = e \quad \rightarrow \quad \log|\log e| = c \quad \rightarrow \quad c = 0$$

per lo studio del punto 1) sappiamo che

$$y(0) = e > 1 \quad \rightarrow \quad y(x) > 1\ \forall x \quad \rightarrow \quad \log(y) > 0\ \forall x$$

e quindi

$$\log|\log y| = x \quad \rightarrow \quad \log(\log y) = x \quad \rightarrow \quad \log(y) = e^x$$

da cui la soluzione

$$y(x) = e^{e^x}$$

soluzione crescente (vertiginosamente...) $\forall x \in R$, vedi tabellina seguente

[2]Al punto in cui siamo, qualitativamente, non possiamo neanche sapere se le soluzioni $y(x) > 1$ siano o meno definite in tutto l'asse $\mathbb{R}$, potrebbero cioé *esplodere* anche in corrispondenza a punti x_0 al finito

x	$y(x)$
-3	1.051047
-2	1.144920
-1	1.44466
0	2.71828
1	15.15426
2	1618.17
3	5.2849×10^8
...	....

La soluzione $y(x) = e^{e^x}$ trovata verifica le proprietá qualitative previste precedentemente per le soluzioni $y(x) > 1$

- $\lim_{x \to -\infty} e^{e^x} = 1$,
- $y(x) = e^{e^x}$ é illimitata superiormente,

é, inoltre, definita in tutto l'asse reale $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

La sostituzione

$$y(x) = e^{z(x)},$$

indicata implica

$$y(x) = e^{z(x)}, \quad y'(x) = e^{z(x)}\, z'(x), \quad y \log(y) = e^z\, z, \quad xy = x\, e^{z(x)}$$

L'equazione differenziale si trasforma quindi in

$$e^{z(x)}\, z'(x) = e^z\, z + x\, e^{z(x)}$$

semplificando membro a membro per il fattore non nullo e^z si ottiene l'equazione differenziale lineare completa

$$z' = z + x \tag{33}$$

- Le soluzioni dell'omogenea associata $z' = z$ sono $A\, e^x$,
- una soluzione dell'equazione completa é $-x - 1$,

pertanto tutte le soluzioni della (33) sono

$$z(x) = A\, e^x - x - 1.$$

Determinate le $z(x)$ si trovano le soluzioni

$$y(x) = e^{A\, e^x - x - 1}$$

dell'equazione di partenza.

La condizione iniziale $y(0) = 1/e$ implica

$$\frac{1}{e} = e^{A-1} \quad \to \quad A - 1 = -1 \quad \to \quad A = 0$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é, vedi Figura 4,

$$y(x) = e^{-(x+1)}$$

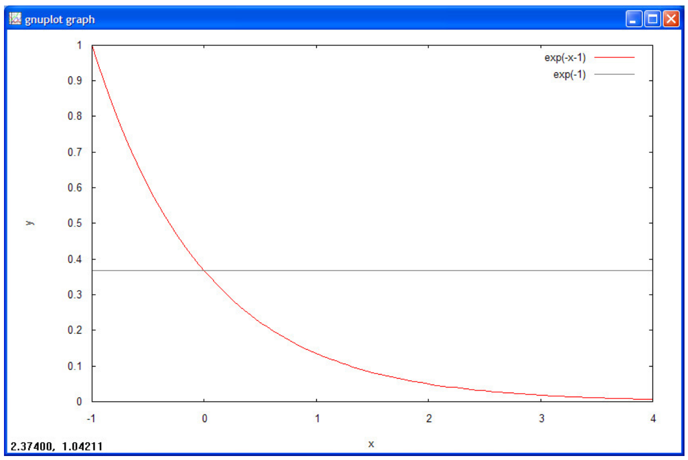


FIGURA 4. $y(x) = e^{-(x+1)}$

OSSERVAZIONE 3.1. *L'intersezione del grafico in Figura 4 con la quota $y = 1$, in alto a sinistra, non deve scandalizzare nessuno: l'equazione di cui ci stiamo occupando non é la $y' = y\log(y)$ ma la $y' = y\log(y) + xy$, che é altra cosa... per esempio non ha affatto l'equilibrio $y = 1$...*

OSSERVAZIONE 3.2. *Si noti come la sostituzione proposta $y = e^z$ per l'equazione $y' = y\ \log(y) + x\,y$ della terza domanda sia adatta anche a trattare l'equazione iniziale*

$$y' = y\ \log(y), \quad y = e^z \quad \to \quad z'\,e^z = z\,e^z \quad \to \quad z' = z$$

da cui

$$z(x) = A\,e^x \quad \to \quad y(x) = e^{A\,e^x}$$

formula che non richiede neanche di faticare sul segno di $|\log(y)|$.

CAPITOLO 41

Esonero dicembre 2005

1. Esercizio

- *Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare*
$$y''' - (1+\alpha)y'' + \alpha y' = 0\ .$$
- *Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy*
$$\begin{cases} y''' - 2y'' & +y' = x \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 2 \\ y''(0) & = 0\ . \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale lineare omogenea $y''' - (1+\alpha)y'' + \alpha y' = 0$, é

$$\lambda(\lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \alpha.$$

Ci sono quindi tre casi da considerare nell'espressione dell'integrale generale $y_0(x)$ dell'equazione omogenea a seconda che il parametro α

coincida con 0,
coincida con 1,
sia diverso sia da 0 *che da* 1.

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 & \rightarrow & y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \\ \alpha = 1 & \rightarrow & y_0(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x \\ \alpha \neq 0, 1 & \rightarrow & y_0(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{\alpha x} \end{array}$$

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

L'equazione differenziale omogenea associata corrisponde al caso $\alpha = 1$ del punto precedente.
Una soluzione particolare $\overline{y}(x)$ dell'equazione completa, con termine

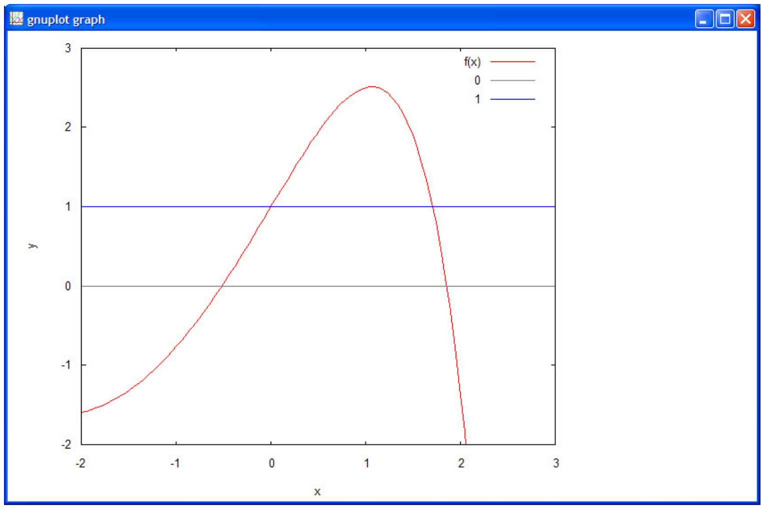


Figura 1. La soluzione del problema di Cauchy.

noto x puó essere cercata nella forma ancora di polinomio di secondo grado

$$\overline{y}(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

con a, b, c da determinare.
L'innalzamento di grado é dovuto al fatto che nel primo membro dell'equazione manca il termine y.
Quindi, sostituendo nell'equazione completa,

$$\begin{cases} \overline{y}' = 2\,a\,x + b \\ \overline{y}'' = 2\,a \\ \overline{y}''' = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad 2\,a\,x - 4\,a + b = x$$

ne segue

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = 2, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

infatti le costanti $\overline{y}(x) = c_1$ sono soluzioni dell'omogenea.
Otteniamo cosí

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + \frac{x^2}{2} + 2x \ ,$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} y(0) & = c_1 + c_2 & = 1 \\ y'(0) & = c_2 + c_3 + 2 & = 2 \\ y''(0) & = c_2 + 2c_3 + 1 & = 0\ . \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = & 0 \\ c_2 = & 1 \\ c_3 = & -1 \end{cases}$$

La soluzione richiesta é quindi, vedi Figura 1

$$y(x) = (1-x)e^x + \frac{x^2}{2} + 2\,x.$$

2. Esercizio

Dato il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} x' = -x + 5\,y \\ y' = 2\,x + 2\,y \end{cases} \tag{34}$$

- *determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice associata al sistema (34),*
- *determinare l'integrale generale del sistema (34),*
- *detta $(x_0(t), y_0(t))$ la soluzione del sistema (34) con le condizioni iniziali*

$$x(0) = 5, \quad y(0) = k,$$

  stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la soluzione verifica le condizioni

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0,$$

- *in corrispondenza dei valori k trovati, disegnare nel piano la curva di equazioni parametriche $(x_0(t), y_0(t))$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

La matrice del sistema (34) é

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

i suoi autovalori λ sono le soluzioni dell'equazione

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda-4)(\lambda+3) = 0$$

da cui

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 4.$$

Un autovettore $U_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ corrispondente a λ_1, $\quad A\,U_1 = -3\,U_1$,

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 5\beta_1 &= -3\alpha_1 \\ 2\alpha_1 + 2\beta_1 &= -3\beta_1 \end{cases} \quad \to \quad 2\alpha_1 + 5\beta_1 = 0$$

é, ad esempio,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Analogamente si riconosce che un autovettore $U_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ corrispondente a λ_2 è, ad esempio,

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seconda domanda:

Determinati autovalori e autovettori si ottiene l'integrale generale del sistema (34)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 U_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 U_2 \mathrm{e}^{4t} \to \begin{cases} x(t) = -5c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{4t} \\ y(t) = 2c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{4t} \end{cases}$$

Terza domanda:

La soluzione $(x_0(t), y_0(t))$ del sistema (34) che verifica le condizioni iniziali

$$x(0) = 5 \ , y(0) = k,$$

si trova, imponendo tali condizioni iniziali, e di conseguenza scegliendo

$$c_1 = \frac{1}{7}(k-5), \qquad c_2 = \frac{1}{7}(10+5k).$$

ed é quindi

$$x_0(t) = \tfrac{1}{7}\left\{-5(k-5)\mathrm{e}^{-3t} + (10+5k)\mathrm{e}^{4t}\right\}$$

$$y_0(t) = \tfrac{1}{7}\left\{2(k-5)\mathrm{e}^{-3t} + (10+5k)\mathrm{e}^{4t}\right\}$$

Risulta

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0$$

se e solo se il coefficiente dell'esponenziale e^{4t}, sia in $x_0(t)$ che in $y_0(t)$ é nullo, cioé se $10 + 5k = 0$ ovvero $k = -2$.
La soluzione corrispondente a tale valore $k = -2$ é pertanto

$$x_0(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}, \qquad y_0(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}.$$

Quarta domanda:

Ricavando e^{-3t} dalla prima equazione

$$x_0(t) = 5e^{-3t}, \quad \to \quad e^{-3t} = \frac{1}{5}x_0(t)$$

e sostituendo nella seconda si ottiene

$$y_0(t) = -2\,\frac{1}{5}x_0(t) \quad \rightarrow \quad 2\,x_0(t) + 5\,y_0(t) = 0$$

La curva $\mathcal{C}_{A,B}$ di equazioni parametriche

$$x_0(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}, \quad y_0(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}$$

per $t \in [A, B]$ é pertanto contenuta, qualunque sia l'intervallo $[A, B]$ nella retta

$$2x + 5y = 0.$$

Osservazione 2.1. *La curva*[1] $\mathcal{C}_{0,+\infty}$

$$x_0(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}, \quad y_0(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

é il segmento di estremi $(5, -2)$ *e* $(0, 0)$, *estremo quest'ultimo escluso. Al variare di* $t \in [0, +\infty)$ *il punto* $(x_0(t), y_0(t))$ *si muove da* $(5, -2)$ *verso l'origine, muovendosi sempre piú lentamente....*
Al variare invece di $t \in [0, -\infty)$ *il punto* $(x_0(t), y_0(t))$ *si muove da* $(5, -2)$ *allontanandosi dall'origine lungo la semiretta*

$$2x + 5y = 0, \quad x \geq 5$$

sempre piú velocemente....
Riassumendo si puó riconoscere che la curva si equazioni parametriche

$$x_0(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}, \quad y_0(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

é la semiretta

$$2x + 5y = 0, \quad x > 0$$

3. Esercizio

Assegnata la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{x^3}{8} \right)^k$$

- *determinare l'insieme* E *di convergenza,*
- *detta* $S(x)$ *la somma della serie calcolare l'integrale*

$$\int_{-1}^{0} S(x)\, x^2\, dx$$

senza ricorrere all'espressione esplicita di $S(x)$,

[1] Stiamo abusando della parola curva accettando che il parametro vari su un intervallo illimitato

- *calcolare la derivata terza di $S(x)$ nell'origine.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Prima domanda:}}$

Studiamo, con il criterio del rapporto, la convergenza assoluta:

$$\frac{(k+2)\left|\frac{x^3}{8}\right|^{k+1}}{(k+1)\left|\frac{x^3}{8}\right|^{k}} = \frac{k+2}{k+1}\left|\frac{x^3}{8}\right| \quad \to \quad \left|\frac{x^3}{8}\right| = \left(\frac{|x|}{2}\right)^3 < 1$$

da cui si riconosce che la serie assegnata converge assolutamente per

$$|x| < 2 \quad \to \quad -2 < x < 2$$

Al di fuori di tale intervallo aperto, cioé per $x \leq -2$ oppure per $x \geq 2$ i termini

$$(k+1)\left(\frac{x^3}{8}\right)^k$$

della serie non sono neanche infinitesimi e quindi al di fuori di tale intervallo aperto $-2 < x < 2$ la serie non converge.

$\boxed{\text{Seconda domanda:}}$

L'integrale richiesto

$$\int_{-1}^{0} S(x)\, x^2\, dx$$

si riferisce all'intervallo chiuso

$$I:\ [-1, 0] \subset (-2, 2)$$

In esso la serie converge totalmente: infatti

$$x \in I \quad \to \quad \left|(k+1)\left(\frac{x^3}{8}\right)^k\right| \leq (k+1)\left(\frac{1}{8}\right)^k$$

e gli addendi

$$(k+1)\left(\frac{1}{8}\right)^k$$

formano una serie numerica convergente.
Quindi nell'intervallo $I\ :\ [-1, 0]$ la serie converge uniformemente e quindi

$$\int_{-1}^{0} S(x)\, x^2\, dx = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{1}{8}\right)^k \int_{-1}^{0} x^{3k}\, x^2 dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{1}{8}\right)^k \left.\frac{x^{3k+3}}{3k+3}\right|_{-1}^{0} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{1}{8}\right)^k \frac{(-1)^k}{3k+3} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{8}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{27} \simeq 0,296296$$

$\boxed{\text{Terza domanda:}}$

Tenuto conto che

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{x^3}{8}\right)^k = 1 + 2\left(\frac{1}{8}\right)x^3 + 3\left(\frac{1}{8}\right)^2 x^6 + \ldots$$

e che la formula di Taylor indica

$$S(x) = S(0) + S'(0)x + \frac{1}{2!}S''(0)x^2 + \frac{1}{3!}S'''(0)x^3 + \ldots$$

riesce necessariamente

$$\frac{1}{3!}S'''(0) = 2\left(\frac{1}{8}\right)$$

da cui

$$S'''(0) = 2\left(\frac{1}{8}\right)3! = \frac{3}{2}$$

Osservazione 3.1. *Uno sviluppo alternativo dell'esercizio poteva essere ricavato dalla osservazione che*

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \quad \to \quad \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \forall t \in (-1,1)$$

ovvero anche, posto $k-1=h$

$$\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)t^h = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \forall t \in (-1,1)$$

da cui

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{x^3}{8}\right)^k = \frac{1}{(1-\frac{x^3}{8})^2} = \frac{8^2}{(8-x^3)^2} \quad \forall x \in (-2,2)$$

La (fortunata) conoscenza esplicita della somma $S(x)$ permette di calcolare direttamente l'integrale richiesto

$$\int_{-1}^{0} S(x)\, x^2\, dx = 8^2 \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(8-x^3)^2}\, dx =$$

$$= \frac{8^2}{3} \frac{1}{8 - x^3}\bigg|_{-1}^{0} = \frac{8^2}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{27}$$

il valore ottenuto anche integrando la serie termine a termine.

–

Flavia Lanzara Dipartimento di Matematica Universita' degli studi di Roma La Sapienza Piazzale Aldo Moro, 2 - 00185 Roma tel. (+39)0649913203 - fax (+39)0644701007 lanzara@mat.uniroma1.it

Parte 8

Le prove d'esonero 2007/2008

CAPITOLO 42

Esonero 1

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Esonero 1

26 ottobre 2007

1.1. Esercizio.

a) *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ le serie seguenti convergono:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+kx}{k^2} \quad , \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln\left(2+k^2x^2\right)}$$

b) *Calcolare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(k^2 + \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right) z^k$$

c) *Calcolare rispettivamente la parte reale, la parte immaginaria ed il modulo dei seguenti numeri complessi*

$$z^2 - 2iz - 3i \quad , \qquad z^3 \quad , \qquad z^2 - 2 - 3i$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

- a)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+kx}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Se $x \neq 0$ non converge, se $x = 0$ sí !

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k\ln\left(2+k^2x\right)}\right)$$

Se $x = 0$ la serie

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

non converge.

Se $x \neq 0$ tenuto conto che, per k sufficientemente grande riesce

$$\ln(2+k^2x^2) \leq \ln(2k^2x^2) = \ln(2x^2) + 2\ln(k) \leq 3\ln(k)$$

si ha

$$\frac{1}{k\ln\left(2+k^2x^2\right)} \geq \frac{1}{3}\frac{1}{k\ln(k)}$$

Tenuto conto che la serie

$$\sum \frac{1}{k\ln(k)}$$

é divergente si deduce, per confronto asintotico che anche la serie data é divergente.

- b) Consideriamo la serie dei moduli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(k^2 + \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)|z|^k$$

Tenuto conto che per k sufficientemente grande riesce

$$k^2|z|^k \leq \left(k^2 + \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)|z|^k \leq \left(k^2+2e\right)|z|^k \leq 2\,k^2|z|^k$$

si riconosce, per confronto, che la serie assegnata ha lo stesso cerchio di convergenza della

$$\sum k^2 z^k$$

la quale ha, com'é noto, raggio di convergenza $R=1$.

Pertanto il raggio di convergenza della serie assegnata é $R=1$.

Osservazione 1.2. *Analogo ragionamento prova che tutte le serie*

$$\sum \left(P(k)+a_k\right)\, z^k$$

P polinomio assegnato non nullo e $\{a_k\}$ successione limitata assegnata hanno raggio di convergenza $R=1$

- c)

$$w = (x+iy)^2 - 2i(x+iy) - 3i = x^2 - y^2 + 2ixy - 2ix + 2y - 3i \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \Re(w) = x^2 - y^2 + 2y$$

$$w = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \Im(w) = 3x^2y - y^3$$

$$w = (x+iy)^2 - 2 - 3i = x^2 - y^2 + 2ixy - 2 - 3i \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad |w| = \sqrt{(x^2-y^2-2)^2 + (2xy-3)^2}$$

1.2. Esercizio.
Si consideri la funzione

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x\,|x-1|}}$$

a) *dire se é limitata nel suo insieme di definizione,*
b) *dire se é integrabile in senso classico o improprio in* $(0, 1)$*,*
c) *dire se é integrabile in senso classico o improprio in* $[2, +\infty]$.

SOLUZIONE:

- a) g é definita per $x > 0 \cap \{x \neq 1\}$, tenuto conto che
$$\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty, \quad \xi = 0, \quad \xi = 1$$
si riconosce che g non é limitata.
- b)
$$\frac{e^x - 1}{x\sqrt{x\,|x-1|}} = \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$$
Tenuto conto che il primo fattore
$$\frac{e^x - 1}{x}$$
ammette limiti sia per $x \to 0^+$ sia per $x \to 1^-$ e quindi é limitato in $(0, 1)$,
tenuto conto che gli altri due fattori divergono rispettivamente come
$$\frac{1}{|x|^\alpha}, \quad \frac{1}{|1-x|^\alpha}, \quad \alpha = 1/2 < 1$$
si riconosce che la funzione $g(x)$ é dotata di integale improprio in $(0, 1)$.
- c) Tenuto conto che
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$
se ne deduce che non esiste l'integrale improprio su $[1, +\infty)$

1.3. Esercizio.

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 + |x|^n + |x|^{2n}}{2 + |x|^{3n}}$$

a) *si determini il limite puntuale e lo si denoti con f e si dica se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$.*
b) *si dica se la convergenza è uniforme in $I = [-1/2, 1/2]$.*
c) *si dica se la convergenza è uniforme in $J = [2, 10]$.*

SOLUZIONE:

Le $f_n(x)$ sono funzioni pari: basta studiare quindi il tratto $x \geq 0$

- a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + |x|^n + |x|^{2n}}{2 + |x|^{3n}} = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \quad |x| < 1 \\ 1 & se \quad |x| = 1 \\ 0 & se \quad |x| > 1 \end{cases}$$

  Tenuto conto che le $f_n(x)$ sono continue in $\mathbb{R}$ e il loro limite $f(x)$ non é continuo se ne deduce che la convergenza non é uniforme in $\mathbb{R}$.

- b) $x \in I = [-1/2, 1/2]$

$$\left| \frac{1 + |x|^n + |x|^{2n}}{2 + |x|^{3n}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2|x|^n + 2|x|^{2n} - |x|^{3n}}{2(2 + |x|^{3n})} \right| \leq |x|^n \leq \frac{1}{2^n} \quad \to \quad 0$$

- c)$x \in J = [2, 10]$

$$\left| \frac{1 + |x|^n + |x|^{2n}}{2 + |x|^{3n}} - 0 \right| \leq \frac{3|x|^{2n}}{|x|^{3n}} = \frac{3}{|x|^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \to \quad 0$$

CAPITOLO 43

Esonero 2

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Esonero 2

26 novembre 2007

2.4. Esercizio.
Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ *e sia* $X : B \to \mathbb{R}^3$ *definita come segue:*

$$X(u, v) = (u + v, u - v, u^2 - v^2).$$

a: *Verificare che la superficie* $\Sigma = X(B)$ *è regolare.*
b: *Calcolare i vettori* X_u, X_v e $X_u \wedge X_v$.
c: *Calcolare l'area di* Σ.
d: *Determinare la lunghezza di* $\Gamma = X(\partial B)$.

Soluzione:

La superficie $\Sigma = X(B)$ é regolare:

- le componenti della rappresentazioni parametrica, polinomi in u e v sono C^∞
- $X(u, v)$ é iniettiva: se infatti

$$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2) \quad \to \quad \begin{cases} u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \\ u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \\ u_i^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2 \end{cases}$$

Le prime due equazioni del sistema indicato implicano

$$\begin{cases} (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) = 0 \\ (u_1 - u_2) - (v_1 - v_2) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Risulta quindi provato che

$$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2) \quad \to \quad (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

- La matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & -2v \end{pmatrix}$$

ha un minore (prime due colonne) con determinante diverso da zero, e quindi ha sicuramente rango 2.

Calcolare i vettori X_u, X_v e $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{array}{ll} X_u & = \{1,\, 1,\, 2u\} \\ X_v & = \{1,\, -1,\, -2v\} \\ X_u \wedge X_v & = \{2(u-v),\, 2(u+v),\, -2\} \end{array}$$

Calcolare l'area di Σ

$$Area(\Sigma) = \iint_B |X_u \wedge X_v|\, du\, dv = 2\iint_B \sqrt{1+2(u^2+v^2)}\, du\, dv =$$

$$2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+2\,\rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$$

Determinare la lunghezza di $\Gamma = X(\partial B)$.

$$\Gamma = X(\partial B): \quad \{\cos(t)+\sin(t),\, \cos(t)-\sin(t),\, \cos^2(t)-\sin^2(t)\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

L'espressione della lunghezza é quindi

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 16\, \cos^2(t)\, \sin^2(t)} dt$$

il valore di tale integrale non é il valore $2\sqrt{2}\,\pi$ erroneamente indicato precedentemente, e non é calcolabile elementarmente !

2.5. Esercizio.

Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z, \quad x+y+3z \le 1\}$ *e sia*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \Big\{(x^2-y^2)y,\, (x^2-y^2)x,\, (x^2-y^2)z\Big\}$$

- **a:** *Determinare il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso $\partial\Omega$ come un certo integrale superficiale e calcolare tale integrale superficiale.*
- **b:** *Ricalcolare il flusso del punto a) usando il teorema della divergenza (quindi come integrale triplo).*
- **c:** *Calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ uscente dalla superficie della sfera di centro l'origine e raggio* 1 **mediante un integrale triplo.**

Soluzione:

Ω é il tetraedro contenuto nel primo ottante di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $x + y + 3z = 1$

Per calcolare il flusso uscente occorre decomporre $\partial\Omega$ nei 4 triangoli che lo compongono

(1) T_1 : appartenente al piano $y = 0$, $\quad \overrightarrow{n} = \{0, -1, 0\}$, $\quad \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{n} = -x^3$
(2) T_2 : appartenente al piano $x = 0$, $\quad \overrightarrow{n} = \{-1, 0, 0\}$, $\quad \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{n} = y^3$
(3) T_3 : appartenente al piano $z = 0$, $\quad \overrightarrow{n} = \{0, 0, -1\}$, $\quad \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{n} = 0$
(4) T_4 : appartenente al piano $x+y+3z = 1$, $\quad \overrightarrow{n} = \{1, 1, 3\}/\sqrt{11}$, $\quad \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{n} = (x^2 - y^2)/\sqrt{11}$

Considerato che i due triangoli T_1 e T_2 sono uguali gli integrali su di essi risultano uguali ed opposti, pertanto

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{n} \, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{11}} \iint_{T_4} (x^2 - y^2) d\sigma = \iint_{T} (x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

essendo T il triangolo

$$0 \leq y \leq 1 - x, \ 0 \leq x \leq 1$$

Riesce pertanto

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{n} \, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 - y^2) \, dy = 0$$

Ricalcolare il flusso del punto a) usando il teorema della divergenza (quindi come integrale triplo).

$$div \left((x^2 - y^2) \Big\{ y, x, z \Big\} \right) = \nabla(x^2 - y^2) \, . \, \Big\{ y, x, z \Big\} + (x^2 - y^2) \, div(F) = x^2 - y^2$$

$$\int\int\int_{\Omega} (x^2 - y^2) \, dx \, dy \, dz = 0$$

per la simmetria del dominio Ω rispetto al piano $y = x$ piano di simmetria di Ω.

Calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ uscente dalla superficie della sfera **mediante un integrale triplo.**

$$\int\int\int_{B} (x^2 - y^2) \, dx \, dy \, dz = 0$$

ancora per la simmetria della palla B rispetto al piano $x = y$.

2.6. Esercizio.
Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}: \ E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \overrightarrow{F}(x,y,z) = \left\{ \frac{-y}{x^2+y^2}, \ \frac{x}{x^2+y^2}, \ xy(z+1) \right\}.$$

- **a:** *Dire in quale insieme* $E \subset \mathbb{R}^3$ *è definito* $\overrightarrow{F}$, *e dire se* **il complementare di** E *è un punto, un piano o una retta.*
  Infine calcolare $\mathrm{Rot}\,\overrightarrow{F}$ *in* E.
- **b:** *Calcolare la circuitazione di* $\overrightarrow{F}$ *lungo la curva* γ *di equazioni parametriche*
  $\phi(t) = \{\cos(t), \ \sin(t), \ 0\}, \quad t \in [0, 2\pi]$.
- **c:** *Assegnata la superficie*

$$\Sigma_0: \ X(u,v) = \left\{u+1, (v+1)^2, -v\right\}, \quad (u,v) \in D: \ (u+1)^2 + (v+1)^2 \le 1$$

scrivere le equazioni parametriche del bordo $\Gamma = X(\partial D)$ *e calcolare la circuitazione di* $\overrightarrow{F}$ *lungo* Γ, *percorsa nel verso antiorario, usando il Teorema di Stokes.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il campo F é definito per $x^2 + y^2 \neq 0$: l'insieme di definizione E é pertanto $\mathbb{R}^3$ privato di una retta, l'asse z.

$$rot(\overrightarrow{F}) = \{x(z+1), \ -y(z+1), \ 0\}$$

Calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ:

$$\phi'(t) = \{-\sin(t), \cos(t), 0\} \quad \to \quad \int_\gamma \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

$$\partial D: \ \begin{cases} u+1 = \cos(\theta), \\ v+1 = \sin(\theta), \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Gamma = X(\partial D) := \{\cos(\theta), \sin^2(\theta), 1 - \sin(\theta)\}$$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds = \iint_{\Sigma_0} rot(\overrightarrow{F}) \,.\, \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

$$X_u = \{1, 0, 0\}, \quad X_v = \{0, 2(v+1), -1\},$$

La rappresentazione di $X_u \wedge X_v$ corretta é la seguente:

$$X_u \wedge X_v = \{0, 1, 2(v+1)\}$$

$$rot\overrightarrow{F} \,.\, X_u \wedge X_v = (v+1)^2(v-1) \quad \to \quad \rho^2 \sin^2(\theta)(-2 + \rho\sin(\theta))$$

$$\iint_{\Sigma_0} rot(\overrightarrow{F}) \, . \, \overrightarrow{\nu} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin^2(\theta)(-2 + \rho \sin(\theta))\rho d\rho = -\frac{\pi}{2}$$

CAPITOLO 44

Esonero 3

ANALISI VETTORIALE
2007-2008

Soluzioni Esonero 3

14 gennaio 2008

3.7. Esercizio.

Consideriamo l'equazione differenziale seguente:

$$y'' + 2y' + 10y = \cos(t) + \sin(2t)$$

a) *trovare la soluzione generale v dell'equazione omogenea associata,*
b) *calcolare il $\lim_{t\to+\infty} v(t)$*
c) *calcolare la soluzione generale dell'equazione non omogenea,*
d) *scegliere da c) la soluzione del problema di Cauchy di dati iniziali $y(0) = 9/85, y'(0) = 2/85$*

Soluzione:

a)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 - 3i \\ \lambda_2 = -1 + 3i \end{cases}$$

$$v(t) = c_1\, e^{\lambda_1\, t} + c_2\, e^{\lambda_2\, t} \quad \to \quad v(t) = e^{-t}\, \{c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)\}$$

b)

$$|v(t)| \leq (|c_1| + |c_2|)\, e^{-t} \quad \to \quad \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$$

c) Cerchiamo prima una soluzione

$$y_1(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$

relativa al solo termine $\cos(t)$ e poi una seconda

$$y_2(t) = c\cos(2t) + d\sin(2t)$$

relativa all'altro $\sin(2t)$

$$y_1''(t) + 2\,y_1'(t) + 10\,y_1(t) = \cos(t) \quad \to \quad \begin{cases} -2a + 9b & = 0 \\ 9\,a + 2\,b & = 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{9}{85}, \quad b = \frac{2}{85} \quad \to \quad y_1(t) = \frac{1}{85}\,\{9\,\cos(t) + 2\,\sin(t)\}$$

$$y_2''(t) + 2\,y_2'(t) + 10\,y_2(t) = \sin(2t) \quad \to \quad \begin{cases} -4\,c + 6\,d & = 1 \\ 6\,c + 4\,d & = 0 \end{cases}$$

$$c = -\frac{4}{52}, \quad d = \frac{6}{52} \quad \to \quad y_2(t) = \frac{1}{52}\,\{-4\,\cos(2t) + 6\,\sin(2t)\}$$

Le soluzioni dell'omogenea sono pertanto

$$\begin{aligned} y(t) = \;& e^{-t}\,\{c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)\} \\ &+ \frac{1}{85}\,\{9\,\cos(t) + 2\,\sin(t)\} \\ &+ \frac{1}{52}\,\{-4\,\cos(2t) + 6\,\sin(2t)\} \end{aligned}$$

d) Tenuto conto che

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + \dfrac{9}{85} - \dfrac{4}{52} & = \dfrac{9}{85} \\[2ex] y'(0) = -c_1 + 3c_2 + \dfrac{2}{85} + \dfrac{12}{52} & = \dfrac{2}{85} \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} y(0) = c_1 - \dfrac{4}{52} & = 0 \\[2ex] y'(0) = -c_1 + 3c_2 + \dfrac{12}{52} & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{13} \\[2ex] c_2 = -\dfrac{2}{39} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy é pertanto

$$\begin{aligned} y(t) = \;& e^{-t}\left\{\frac{1}{13}\cos(3t) - \frac{2}{39}\sin(3t)\right\} \\ &+ \frac{1}{85}\,\{9\,\cos(t) + 2\,\sin(t)\} \\ &+ \frac{1}{52}\,\{-4\,\cos(2t) + 6\,\sin(2t)\} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.3. *Suggerirei di semplificare l'equazione (troppo calcolosa assegnata) in*

$$y'' + 2y' + 10y = \cos(t)$$

che ha come soluzione particolare della non omogenea

$$y(t) = ...$$

con le condizioni iniziali

$$y(0) = ..., \quad y'(0) = ...$$

che corrispondono esattamente alla soluzione particolare della non omogenea.

3.8. Esercizio.

(un po' semplificato rispetto alla versione originale)

Sia $Z \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ *essendo*

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - x^2y - y^2$$

a) *Dimostrare che Z è un insieme chiuso e limitato.*
b) *Trovare i punti $P = (0, \beta) \in Z$*
c) *Determinare a quali dei punti trovati in b) si può applicare il teorema della funzione implicita.*
d) *Dire se le funzioni implicite trovate hanno nell'origine punti di minimo o massimo locale.*

Soluzione:

a) Z é chiuso perché insieme di livello di una funzione g continua.
   É inoltre limitato perché, posto $\rho^2 = x^2 + y^2$ riesce

$$(x^2 + y^2)^2 = \rho^4 \quad \to \quad x^4 + y^4 = \rho^4 - 2x^2y^2 \geq \rho^4 - \frac{x^4 + y^4}{2}$$

e quindi

$$\begin{array}{ll} x^4 + y^4 & \geq \frac{2}{3}\rho^4 \\ -x^2y & \geq -\rho^3 \\ -y^2 & \geq -\rho^2 \end{array}$$

Si ha pertanto

$$g(x, y) \geq \frac{2}{3}\rho^4 - \rho^3 - \rho^2 = \rho^4\left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right\}$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)\to\infty} g(x, y) = +\infty$$

Quindi esiste $R > 0$ tale che, detta $B(0, R) : x^2 + y^2 < R^2$

$$(x, y) \notin B(0, R) \quad \rightarrow \quad g(x, y) > 1$$

e quindi $Z = \{g = 0\} \subseteq B(0, R)$.

b) $(0, \beta) \in Z \quad \leftrightarrow \quad \beta^4 - \beta^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \beta = 0, \ \beta = \pm 1$

c) Per applicare il teorema della funzione implicita occorre che $\nabla g(x, y) \neq 0$: pertanto
- $P_1 = (0, 0) : \quad \nabla g(0, 0) = 0$ non é applicabile,
- $P_2 = (0, 1) : \quad \nabla g(0, 1) = \{0, 2\} \neq 0$ é applicabile,
- $P_3 = (0, -1) : \quad \nabla g(0, -1) = \{0, 6\} \neq 0$ é applicabile.

d) Indicate con $h_2(x), \ h_3(x)$ le funzioni implicite relative a $P_2, \ P_3$ riesce

$$\begin{cases} h_2(0) = 1 \\ h_2'(0) = -\dfrac{g_x(0, 1)}{g_y(0, 1)} = 0 \\ h_2''(0) = -\dfrac{g_{xx}(0, 1)}{g_y(0, 1)} = -1 < 0 \end{cases}$$

$h_2(x)$ ha nell'origine un massimo locale.

$$\begin{cases} h_3(0) = -1 \\ h_3'(0) = -\dfrac{g_x(0, 1)}{g_y(0, 1)} = 0 \\ h_3''(0) = -\dfrac{g_{xx}(0, 1)}{g_y(0, 1)} = 1 > 0 \end{cases}$$

$h_3(x)$ ha nell'origine un minimo locale.

3.9. Esercizio.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

essendo $f(y) = \dfrac{\sin(y)}{y}$, *prolungata per* $y = 0$ *con il valore* 1.

a) *Verificare le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità in piccolo.*

b) *Verificare che se* $y_0 \in (\pi, 2\pi)$ *la soluzione è monotona nel suo intervallo di esistenza*

c) *Dimostrare che per ogni* $y_0 \in \mathbb{R}$ *la soluzione è limitata.*

d) *Si scelga* $y_0 = \pi/2$ *e si calcolino* $y'(0), y''(0)$.

Soluzione:

a) La funzione $f(y)$, prolungata nell'origine con il valore 1 é di classe $C^\infty(\mathbb{R})$: quindi il problema di Cauchy assegnato ha il teorema di esistenza e unicitá qualunque sia $y_0 \in \mathbb{R}$.

b) L'equazione assegnata é di tipo autonomo: possiede quindi tutte le soluzioni d'equilibrio $y = c$ se $f(c) = 0$: in particolare possiede quindi le soluzioni
$$y = \pi, \quad y = 2\pi$$
La soluzione che verifica la condizione iniziale
$$y(0) = y_0 \in (\pi, 2\pi)$$
non potendo, per il teorema di unicitá, traversare le due rette $y = \pi, \quad y = 2\pi$ verificherá necessariamente la condizione
$$\pi < y(t) < 2\pi$$
Ma allora $f(y(t)) < 0$ e quindi $y'(t) < 0$: quindi $y(t)$ é monotona decrescente.

c) L'equazione autonoma $y' = f(y)$ possiede le infinite soluzioni d'equilibrio
$$y = \pm k\,\pi, \quad \forall k \in, \ k \neq 0$$
Il ragionamento precedente, basato sul teorema di unicitá, si applica a qualunque altro dato iniziale y_0
   - se $y_0 = k\pi$ allora la soluzione $y(t)$ é la soluzione d'equilibrio $y = k\,\pi$, soluzione quindi limitata,
   - se $y_0 \neq k\,\pi$ allora indicati con $r\pi < s\pi$ i multipli di π non nulli piú vicini tali che $y_0 \in (r\pi,\, s\pi)$, si riconosce che la soluzione $y(t)$ verifica necessariamente la disuguaglianza
   $$r\pi < y(t) < s\pi$$
   e pertanto é limitata.

d)
$$y' = f(y) \quad \to \quad y'' = f'(y)\,y' = f'(y)\,f(y)$$
$$y'(0) = \frac{\sin(y(0))}{y(0)} \quad \to \quad y'(0) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$
$$y''(0) = y'(0)\frac{\cos(y(0))y(0) - \sin(y(0)}{y^2(0)} \quad \to \quad y''(0) = -\frac{8}{\pi^3}$$

Parte 9

Gli esami 2003/2004

CAPITOLO 45

Esame scritto - 23 marzo 2004

Esercizio 1. Sia $\{Q = (x, y) \in R^2, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, calcolare il lavoro compiuto dal campo

$$F = \{y^2,\ x^2\}$$

lungo la frontiera di D percorsa in senso antiorario con i due seguenti procedimenti

- calcolando esplicitamente l'integrale curvilineo che definisce il lavoro,
- servendosi della formula di Stokes.

Esercizio 2. Detta Σ la superficie

$$z = x\,y,\ \ x^2 + y^2 \leq 1$$

- calcolare l'area di Σ
- calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_\Sigma (1 + x^2 + y^2)\, d\sigma$$

- verificare che il valore ottenuto per tale integrale rispetta il teorema della media.

Esercizio 3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{2x+1}{1+x^2} y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Esercizio 4. Provare che l'equazione

$$e^{\cos(xy)} = y$$

definisce, in un intorno del punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$, una funzione implicita $y = f(x)$.

Calcolare lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n = 2$

Soluzioni - 23 marzo 2004

Esercizio 1. *Sia* $\{Q = (x, y) \in R^2, -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$, *calcolare il lavoro compiuto dal campo*

$$F = \{y^2,\ x^2\}$$

lungo la frontiera di D percorsa in senso antiorario con i due seguenti procedimenti

- *calcolando esplicitamente l'integrale curvilineo che definisce il lavoro,*
- *servendosi della formula di Stokes.*

Soluzione:

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = \int_{-1}^{1} 1dx + \int_{-1}^{1} 1dy - \int_{-1}^{1} 1dx - \int_{-1}^{1} 1dy = 0$$

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = \iint_D \mathrm{rot}\,(F)_z dxdy = \iint_D (2x - 2y)dxdy = 0$$

Esercizio 2. *Detta* Σ *la superficie*

$$z = x\,y,\ \ x^2 + y^2 \le 1$$

- *calcolare l'area di* Σ
- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\iint_\Sigma (1 + x^2 + y^2)\, d\sigma$$

- *verificare che il valore ottenuto per tale integrale rispetta il teorema della media.*

Soluzione:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy \ \to\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2}\rho d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 1 + \rho^2 \rho d\rho = \pi \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1.21\pi$$

Analogo conto per l'integrale superficiale

$$\iint_{\Sigma} (1 + x^2 + y^2)\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + \rho^2)\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1 + \rho^2)^{3/2} \rho d\rho = \pi \frac{2}{5}\, (1 + \rho^2)^{5/2}\big|_0^1 = \pi \frac{2}{5}(4\sqrt{2} - 1) \approx 1.86\pi$$

Esercizio 3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{2x+1}{1+x^2} y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Equazione omogenea associata:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \quad \rightarrow \quad y(x) = ce^{-\log(1+x^2) - \arctan(x)}$$

ovvvero

$$y(x) = c \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}$$

equazione completa: cerchiamo la soluzione nella forma (metodo della variazione delle costanti)

$$y(x) = c(x) \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}$$

Sostituendo si perviene a

$$c'(x) \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2} \rightarrow c'(x) = \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan(x)}$$

Ne segue

$$c(x) = e^{\arctan(x)} + k$$

L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + k\, \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}$$

Esercizio 4. Dimostrare che in un intorno del punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ l'equazione

$$e^{\cos(xy)} = y$$

definisce una funzione implicita $y = f(x)$. Calcolare lo sviluppo di Taylor di tale funzione di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n = 2$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Applichiamo il Teorema di Dini ad $F(x, y) = e^{\cos(xy)} - y$: riesce

$$F(0,1) = 0, \quad F_y(x, y) = -xe^{\cos(xy)} \sin(xy) - 1, \quad F_y(0, 1) = -1 \neq 0$$

pertanto é provata l'esistenza della funzione implicita $y = f(x)$ con $f(0) = 1$

Formula di Taylor:
derivando una prima volta si ottiene:

$$F_x(x, y)+F_y(x, y)y' = 0 \quad \rightarrow \quad -e^{\cos(xy)}y \sin(xy)-(1+e^{\cos(xy)}x \sin(xy))y' = 0$$

da cui, sostituendo $x = 0$ e $y = 1$ si ricava

$$y'(0) = 0$$

Derivando una seconda volta

$$F_{xx} + F_{xy}y' + F_{yx}y' + F_{yy}y'^2 + F_y y'' = 0$$

sostituendo tenuto conto che $y'(0) = 0$ si ha

$$F_{xx}(0, 1) + F_y(0, 1)y''(0) = 0$$

da cui segue

$$y''(0) = -e.$$

Il polinomio di Taylor richiesto é pertanto

$$P(x) = 1 - \frac{e}{2}x^2$$

CAPITOLO 46

Esame scritto - 20 settembre 2004

1. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$F = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+2y}} + y,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+2y}} - 2x \right\}$$

- dire dove é definito;
- calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la frontiera di

  $$D = (1,2) \times (0, \frac{1}{2})$$

  percorsa in senso antiorario.

2. Esercizio

Assegnata la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^n$$

- determinare l'insieme E di convergenza;
- determinare in E la somma della serie.

3. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = 2(1-x) + \sin(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Esercizio

Assegnata l'equazione

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$$

- riconoscere che essa definisce una funzione implicita $y = g(x)$ nell'intorno del punto $(1, 1)$;
- calcolare $g'(1)$ e $g''(1)$;
- determinare il luogo definito dall'equazione assegnata.

CAPITOLO 47

Esame scritto - 20 settembre 2004

$\boxed{\text{SOLUZIONI}}$

1. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$F = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y}} + y,\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y}} - 2x \right\}$$

- dire dove é definito;
- calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la frontiera di

$$D = (1,2) \times (0, \frac{1}{2})$$

, percorsa in senso antiorario.

$\boxed{\textbf{SOLUZIONE}}$

Il campo F é definito nella parte di piano in Figura 1

$$x^2 + 2y > 0$$

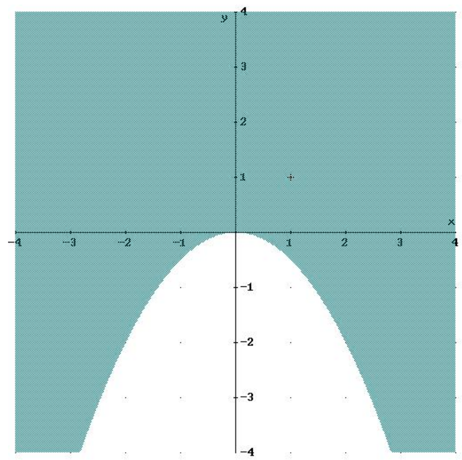


FIGURA 1. L'insieme, scuro, di definizione del campo F

insieme semplicemente connesso.
Il lavoro richiesto é l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$$

essendo C la poligonale rettangolare frontiera di D e $\overrightarrow{t}$ il versore tangente.
Tenuto presente che C é una curva chiusa si puó applicare il Teorema di Stokes nel piano e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \iint_D \operatorname{rot}_z \overrightarrow{F}\, dxdy$$

Tenuto presente che

$$\operatorname{rot}_z \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2y}} + y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2y}} - 2x\right)$$

e che

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2y}} + y\right) = -2 - \frac{x}{(x^2+2\,y)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2y}} - 2x\right) = 1 - \frac{x}{(x^2+2\,y)^{\frac{3}{2}}}$$

si ha

$$\operatorname{rot}_z \overrightarrow{F} = -3$$

Ne segue

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = -3 \iint_D dxdy = -\frac{3}{2}$$

Il lavoro richiesto poteva essere calcolato anche direttamente senza servirsi della formula di Stokes al modo seguente:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = & \\ & + \textstyle\int_1^2 dx + \\ & + \textstyle\int 0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{4+2y}} - 4\right) dy \\ & - \textstyle\int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right) dx + \\ & - \textstyle\int 0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2y}} - 2\right) dy = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

I quattro integrali fanno, con semplicissimi calcoli ancora $-\frac{3}{2}$.

2. Esercizio

Assegnata la serie la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^n$$

- determinare l'insieme E di convergenza;
- determinare in E la somma della serie.

SOLUZIONE

Il criterio del rapporto

$$\left| \frac{(1+2(n+1)) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^{n+1}}{(1+2n) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^n} \right|$$

conduce, semplificazioni effettuate a

$$\frac{e^{\sin(x)}}{3} \frac{2n+3}{2n+1} \to \frac{e^{\sin(x)}}{3}$$

Tenuto conto che

$$0 < \frac{1}{3} e^{-1} \leq \frac{e^{\sin(x)}}{3} \leq \frac{1}{3} e < 1$$

Si riconosce che la serie assegnata converge assolutamente per ogni x ovvero

$$E = R$$

Tenuto conto che per $|z| < 1$ si ha

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_0^\infty n\, z^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

si ricava per la somma della serie assegnata

$$\sum_{n=0}^\infty (1+2n)\left(\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^n + 2\frac{e^{\sin(x)}}{3}\sum_{n=0}^\infty n\left(\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^{n-1} =$$

$$\frac{1}{1-\frac{e^{\sin(x)}}{3}} + 2\frac{e^{\sin(x)}}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^2} =$$

$$\frac{1+\frac{e^{\sin(x)}}{3}}{\left(1-\frac{e^{\sin(x)}}{3}\right)^2} = 3\frac{3+e^{\sin x}}{(3-e^{\sin x})^2}$$

3. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = 2(1-x) + \sin(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{SOLUZIONE}}$

- equazione omogenea: $y'' - y' = 0$
  integrale generale $y_0 = A + Be^x$
- soluzione particolare della $y'' - y' = 2(1-x)$
  $y(x) = Cx^2 + Dx \Rightarrow 2C - 2Cx - D = 2 - 2x,\ C = 1, D = 0$
  $y_1(x) = x^2$
- soluzione particolare della $y'' - y' = \sin(x)$
  $y(x) = E\sin(x) + F\cos(x) \Rightarrow -2E\sin(x) - 2F\cos(x) - E\cos(x) + F\sin(x) = \sin(x)$ ne segue $F = -1/3,\ E = -2/3$
  $y_2(x) = -\frac{1}{3}(\sin(x) + 2\cos(x))$

L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea assegnata é pertanto

$$y(x) = A + Be^x + x^2 - \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato si ottiene sostituendo le condizioni iniziali e ricavando di conseguenza i valori delle due costanti A e B
Si ottiene $A = 0$ e $B = 1/2$
La soluzione richiesta é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + x^2 - \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

4. Esercizio

Assegnata l'equazione

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$$

- riconoscere che essa definisce una funzione implicita $y = g(x)$ nell'intorno del punto $(1, 1)$;
- calcolare $g'(1)$ e $g''(1)$;
- determinare il luogo definito dall'equazione assegnata.

$\boxed{\textbf{SOLUZIONE}}$

Detta $f(x, y) = 0$ l'equazione assegnata

- occorre verificare che il punto $(1, 1)$ assegnato soddisfi l'equazione $f(1, 1) = 0$ e che in tale punto riesca $f_y(1, 1) \neq 0$

$$f_y(x, y) = 3(x^2+y^2)^2(2y)-3(2y), = 6y\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right) \to f_y(1, 1) = 18 \neq 0$$

$$f_x(x, y) = 3(x^2+y^2)^2(2x)-3(2x), = 6x\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right) \to f_x(1, 1) = 18 \neq 0$$

-

$$g'(x) = -\frac{f(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{6x\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right)}{6y\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right)} = -\frac{x}{g(x)}$$

$$g'(1) = -\frac{1}{g(1)} = -1$$

$$g''(x) = -\left(\frac{x}{g(x)}\right)' = -\frac{g(x) - xg'(x)}{g^2(x)} = -\frac{g(x) + \frac{x^2}{g(x)}}{g^2(x)}$$

$$g''(1) = -2$$

- Indicato con $\rho^2 = x^2 + y^2$ l'equazione assegnata si scrive anche come
$$\rho^6 - 3\rho^2 - 2 = 0$$
ovvero posto $t = \rho^2$ si presenta come un'equazione di terzo grado in t
$$t^3 - 3t - 2 = 0$$
Il fatto che il punto $(1, 1)$ soddisfaceva l'equazione significa che l'equazione in t scritta ammette la radice $t = 2$ quindi il polinomio di terzo grado si fattorizza in
$$t^3 - 3t - 2 = (t - 2)(t^2 + 2t + 1) = (t - 2)(t + 1)^2$$
Le radici dell'equazione in t sono pertanto $t = 2$ e $t = -1$, quest'ultima doppia e negativa.
L'equazione in ρ pertanto ha la sola soluzione
$$\rho^2 = 2$$
Il luogo descritto dall'equazione assegnata é pertanto al circonferenza
$$x^2 + y^2 = 2$$
La funzione implicita $g(x)$ con la quale abbiamo lavorato é pertanto la funzione
$$g(x) = \sqrt{2 - x^2}$$

Parte 10

Gli esami 2004/2005

CAPITOLO 48

Esame 13 dicembre 2004

1. Esame e recuperi vari

1.1. Esercizio.

Sia $f(x,y) = e^{-x\,y}$ *e sia* $D: \; 4\,x^2 + y^2 \leq 1$

- *provare che* $f(x,y)$ *ha massimo e minimo in* D,
- *calcolare tali massimo e minimo .*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione f é continua in tutto R^2, l'insieme assegnato D é chiuso e limitato quindi il teorema di Weierstrass sulle funzioni continue assicura l'esistenza del massimo e del minimo.
La ricerca dei punti di D in cui tali massimo e minimo vengono raggiunti si fa

- cercando i punti critici o stazionari di f interni a D,
- cercando i punti di massimo e minimo di f sulla frontiera ∂D, cioé sul vincolo $4\,x^2 + y^2 = 1$

I punti stazionari

$$f_x = f_y = 0 \quad \to \quad -y\,e^{-xy} = -x\,e^{-xy} = 0 \quad \to \quad x = 0,\, y = 0$$

in tale punto riesce

$$f(0,0) = e^0 = 1$$

Massimi e minimi sul vincolo:

$$L(x,y,\lambda) = e^{-xy} + \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = & -y\,e^{-xy} + 8\lambda x = 0 \\ L_y = & -x\,e^{-xy} + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = & 4\,x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni, moltiplicando la prima per x e la seconda per y e sottraendo membro a membro si ricava

$$2\lambda\,(4x^2 - y^2) = 0$$

che, tenuto conto della terza equazione produce

$$x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

I valori della $f(x, y)$ nei punti della frontiera di D segnalati sono

$$f\left(\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\pm 1/4}$$

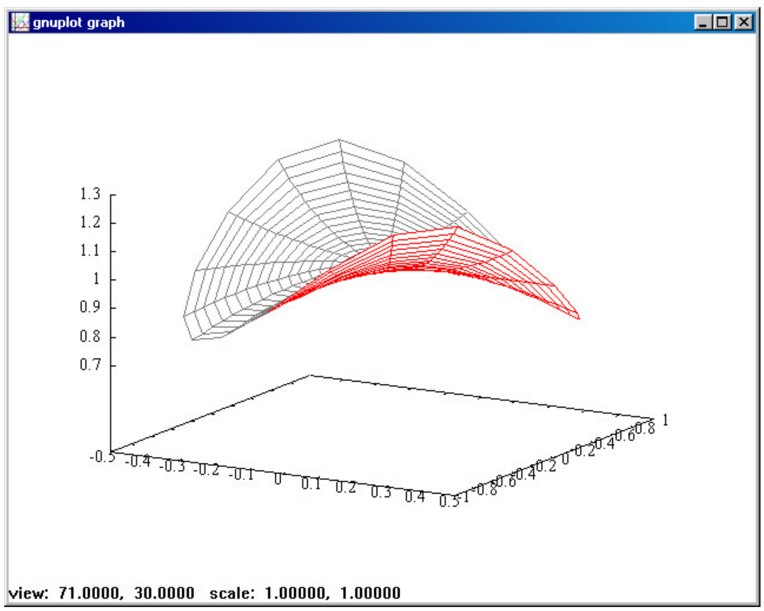


FIGURA 1. Il grafico di e^{-xy} sul dominio D

Tenuto conto del valore nell'origine e dei due valori estremali sulla frontiera si ricava, vedi Figura 1, che

$$\min_{(x,y)\in D} f(x, y) = e^{-1/4}, \qquad \max_{(x,y)\in D} f(x, y) = e^{1/4}$$

1.2. Esercizio.

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left\{x^2 + y^2,\ x^2 - y^2\right\}$$

- *calcolare il flusso di* $\overrightarrow{F}$ *uscente dal dominio* $D : x^2 + 4y^2 \leq 1$
- *verificare il risultato ottenuto servendosi del teorema della divergenza.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Il flusso richiesto é, per definizione, il valore del seguente integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds$$

essendo $\mathcal{C}$ l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$ e $\overrightarrow{\nu}$ il versore normale a $\mathcal{C}$ orientato verso l'esterno di D.
Il calcolo di $\overrightarrow{\nu}$ puó essere fatto servendosi della rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$

$$x = \cos(\theta),\ y = \frac{1}{2}\sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{\{-\sin(\theta),\ \frac{1}{2}\cos(\theta)\}}{\sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)}} \rightarrow \overrightarrow{\nu} = \frac{\{\frac{1}{2}\cos(\theta),\ \sin(\theta)\}}{\sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)}}$$

É facile riconoscere che l'orientamento di $\overrightarrow{\nu}$ é quello richiesto.
L'espressione del ds é

$$ds = \sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)}\, d\,\theta$$

Pertanto il flusso richiesto é

$$\int_0^{2\pi} \left((\cos^2(\theta) + \frac{1}{4}\sin^2(\theta))\frac{1}{2}\cos(\theta) + (\cos^2(\theta) - \frac{1}{4}\sin^2(\theta))\sin(\theta) \right) d\,\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \frac{3}{4}\sin^2(\theta))\cos(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} (\frac{5}{4}\cos^2(\theta) - \frac{1}{4})\sin(\theta)d\theta = 0$$

La verifica del teorema della divergenza

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_D div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy$$

richiede di calcolare anche l'integrale doppio a secondo membro e verificarne l'uguaglianza con il valore del flusso precedentemente trovato.

$$\iint_D div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = \iint_D (2x - 2y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} 2(x-y)dy = 2\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx = 0$$

1.3. Esercizio.

Sia Σ la superficie rappresentata in modo cartesiano da

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Omega : \, x^2 + y^2 \leq 4x - 3$$

- *calcolare l'area di Σ,*
- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\int_{\Sigma} z^2 \, d\,\sigma$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Il calcolo dell'area di una superficie rappresentata in modo cartesiano da $z = f(x, y)$ conduce a considerare la radice quadrata $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ che nel caso assegnato si riduce a

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x \right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2y \right)^2} = \sqrt{2}$$

Pertanto

$$Area(\Sigma) = \int_{\Omega} \sqrt{2} \, dx \, dy = \pi \sqrt{2}$$

avendo tenuto conto che

$$\Omega : x^2 + y^2 \leq 4x - 3 \quad \rightarrow \quad (x - 2)^2 + y^2 \leq 1$$

é un cerchio di raggio 1

Integrale superficiale:

$$\int_{\Sigma} z^2 \, d\,\sigma = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dx \, dy$$

$$\Omega : \begin{cases} x = 2 + \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi], \; \rho \in [0, 1]$$

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_0^1 \left\{ (2 + \rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2 \right\} \rho \, d\rho = (4 + \frac{1}{3}) \, 2\,\pi$$

1.4. Esercizio.
Siano $y_\alpha(x)$ *le soluzioni dei problemi di Cauchy*

$$y' = e^x\, y\,(2-y), \quad y(0) = \alpha$$

- *determinare* $y_\alpha(x)$ *per* $\alpha = 1$
- *disegnare, in modo qualitativo i grafici delle soluzioni* $y_\alpha(x)$ *per* $\alpha = -1, 0, 1, 2, 3$
- *calcolare per* $\alpha \geq 0$ *il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione assegnata é a variabili separabili e ha le soluzioni d'equilibrio

$$y_0 \equiv 0, \quad y_2 \equiv 2$$

tutte le altre soluzioni diverse da esse non prendono mai né il valore 0 né il valore 2.
L'algoritmo risolutivo di $y_\alpha(x)$ conduce all'integrazione

$$\int_\alpha^y \frac{dy}{y(2-y)} = \int_0^x e^x\,dx$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{y(2-y)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\right\}$$

si ha

$$\frac{1}{2}\left\{\log\left|\frac{y}{2-y}\right| - \log\left|\frac{\alpha}{2-\alpha}\right|\right\} = e^x - 1$$

Tenuto conto che

$$\frac{y}{2-y}, \quad \frac{\alpha}{2-\alpha}$$

hanno necessariamente lo stesso segno segue

$$\frac{1}{2}\left\{\log\frac{y}{2-y}\frac{2-\alpha}{\alpha}\right\} = e^x - 1$$

da cui, per $\alpha = 1$ si ha

$$\log\frac{y}{2-y} = 2\,(e^x - 1) \quad \frac{y}{2-y} = 2\,e^{2\,(e^x-1)},$$

$$y = \frac{2\,e^{2\,(e^x-1)}}{1 + e^{2\,(e^x-1)}} \quad \to \quad y_1(x) = \frac{2\,e^{2\,e^x}}{e^2 + e^{2\,e^x}}$$

Le soluzioni $y_\alpha(x)$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 2$ non prendono mai né il valore 0 né il valore 2

- se $\alpha < 0 \Rightarrow y_\alpha(x) < 0$
- se $0 < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < y_\alpha(x) < 2$
- se $2 < \alpha \Rightarrow 2 < y_\alpha(x)$

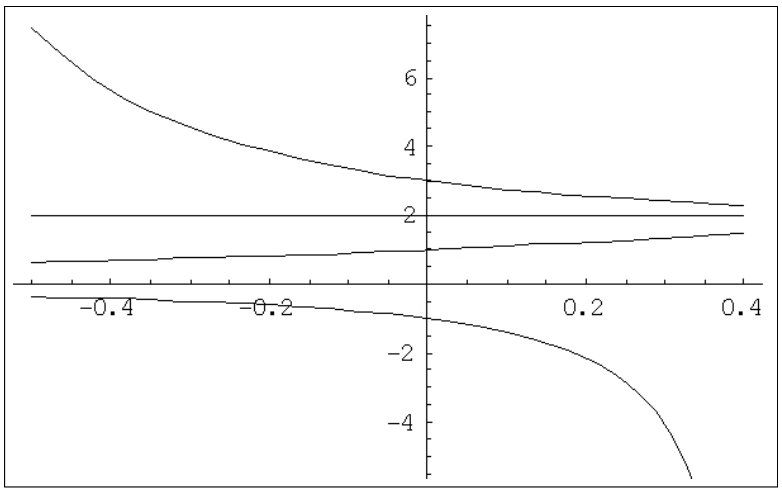


FIGURA 2. Le soluzioni $y_\alpha(x)$ per $\alpha = -1, 0, 1, 2, 3$

Ne segue, vedi Figura 2, tenuto conto del segno del secondo membro dell'equazione differenziale, che

- se $\alpha < 0 \Rightarrow y'_\alpha(x) < 0, \quad y_\alpha(x)$ monotona decrescente,
- se $0 < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < y'_\alpha(x), \quad y_\alpha(x)$ monotona crescente,
- se $2 < \alpha \Rightarrow y'_\alpha(x) < 0, \quad y_\alpha(x)$ monotona decrescente.

Il limite richiesto se $\alpha = 0$ é ovviamente 0 tenuto conto che $y_0(x) \equiv 0$. Per $\forall \alpha > 0$ si ha, invece,

$$\lim_{x \to +\infty} y_\alpha(x) = 2$$

Infatti:

- se $0 < \alpha < 2$ la soluzione $y_\alpha(x)$
  - é crescente
  - non puó superare 2
  - non puó avere limite $\ell < 2$ perché riuscirebbe $0 = e^{+\infty}\,\ell(2 - \ell)$
- se $\alpha = 2$ la soluzione é $y_2(x) \equiv 2$
- se $\alpha > 2$ la soluzione $y_\alpha(x)$ é decrescente, si mantiene sopra la quota 2, e per lo stesso motivo precedente non puó che avere limite 2.

1.5. Esercizio.
Assegnata l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + 2\,a\,y' + y = x + \sin(x)$$

- *determinare per ogni* $a \in \mathbb{R}$, *l'integrale generale dell'equazione omogenea,*
- *determinare, sempre per ogni* $a \in \mathbb{R}$, *l'integrale generale dell'equazione completa assegnata.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le soluzioni dell'equazioni omogenea costituiscono uno spazio vettoriale V di dimensione 2 : i suoi elementi si determinano tramite le radici dell'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + 2\,a\,\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\begin{array}{lll}
a^2 - 1 > 0 : & y_1(x) = e^{(-a+\sqrt{a^2-1})x}, & y_2(x) = e^{(-a-\sqrt{a^2-1})x} \\
a = \pm 1 : & y_1(x) = e^{-a\,x}, & y_2(x) = x\,e^{-a\,x} \\
a^2 - 1 < 0, a \neq 0 : & y_1(x) = e^{-a\,x}\cos(\sqrt{1-a^2}x), & y_2(x) = e^{-a\,x}\sin(\sqrt{1-a^2}x) \\
a = 0 : & y_1(x) = \cos(x), & y_2(x) = \sin(x)
\end{array}$$

Le soluzioni dell'omogenea sono quindi tutte e sole espresse da

$$y_0(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)$$

essendo $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ indicate sopra in riferimento ai diversi valori di a.

Equazione completa:
Cerchiamo, separatamente una soluzione particolare $P(x)$ relativa al solo addendo x a secondo membro e un'altra $u(x)$ relativa al solo addendo $\sin(x)$.

$$P(x) = x - 2a$$

Per quanto concerne il secondo addendo distinguiamo i casi

- $a \neq 0 : \quad u(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$
  Sostituendo si riconosce che deve riuscire $B = 0$, $A = -1/2a$ quindi
  $$u(x) = -\frac{1}{2a}\,\cos(x)$$
- $a = 0 : \quad u(x) = x(A\cos(x) + B\sin(x))$
  Sostituendo si riconosce che deve riuscire $A = -1/2$, $B = 0$ quindi
  $$u(x) = -\frac{x}{2}\cos(x)$$

L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + (x - 2a) + u(x)$$

essendo le $y_1(x)$, $y_2(x)$, $u(x)$ scelte come indicato sopra relativamente ai diversi valori di a.

1.6. Esercizio.

Assegnata la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k$$

- *determinare, servendosi del criterio del rapporto, l'insieme E di convergenza,*
- *determinare la somma $S(x)$,*
- *determinare il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} S(x)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il rapporto da considerare é il seguente

$$\left| \frac{(1+(k+1)) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{k+1}}{(1+k) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k} \right| = \frac{2+k}{1+k} \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \to \left| \frac{2x}{1+x^2} \right|$$

L'insieme di convergenza corrisponde pertanto all'insieme dei punti x che soddisfano la diseguaglianza

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

da cui

$$E = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

La somma della serie assegnata, per ogni $x \in E$ si ricava dalla serie geometrica per $|\rho| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k + \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{2x}{1+x^2}} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1-x\right)^4}$$

Per quanto concerne il limite

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1-x\right)^4} = 1$$

avendo tenuto conto nell'espressione razionale dei termini di grado maggiore.

Osservazione 1.1. *Un'indagine artigianale sui termini che compongono la serie avrebbe condotto a considerare*

$$S(x) = (1+0)\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^0 + (1+1)\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^1 + (1+2)\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \dots =$$

$$= 1 + 2\,\frac{2x}{1+x^2} + 3\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \dots$$

da cui, intanto

$$S(x) \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

Tenuto conto che gli addendi successivi

$$2\,\frac{2x}{1+x^2}, \quad 3\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2, \quad \dots$$

sono infinitesimi per $x \to +\infty$ era prevedibile il risultato

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 1$$

CAPITOLO 49

Esame 8 settembre 2005

1. Esame scritto

1.1. Esercizio.

Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x + 2y + 3$$

sull'insieme E determinato dalla condizione

$$4(x+1)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

1.2. Soluzione.

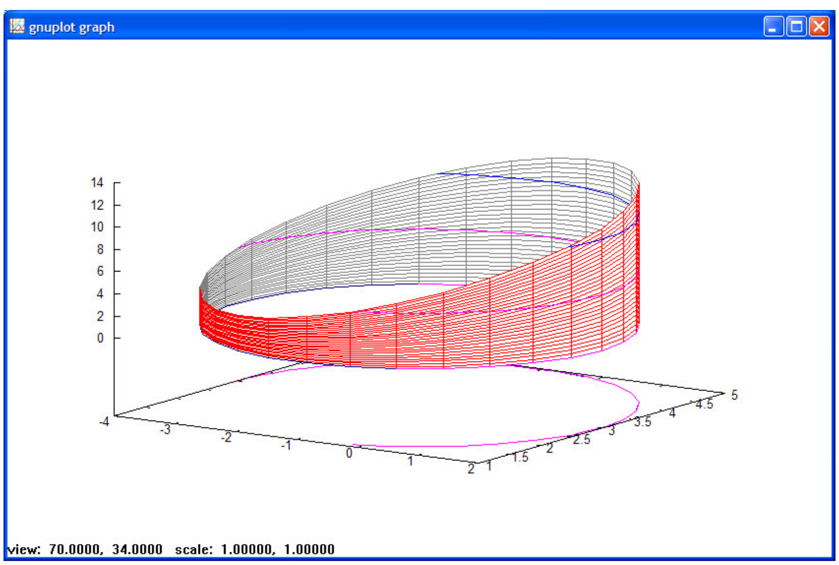


FIGURA 1. I valori di $f(x, y)$ sull'ellisse

$$4(x+1)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

assegnata.

La lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + 3 + \lambda\left\{4(x+1)^2 + 9(y-3)^2 - 36\right\}$$

ha le seguenti derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 8\lambda(x+1) & = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 18\lambda(y-3) & = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 4(x+1)^2 + 9(y-3)^2 - 36 & = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava

$$x + 1 = -\frac{1}{8\lambda}, \quad y - 3 = -\frac{1}{9\lambda}$$

che sostituiti nella terza produce

$$4\frac{1}{64\lambda^2} + 9\frac{1}{81\lambda^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{5}{72}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{72}$$

Il massimo e il minimo cercati sono raggiunti nei due punti

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(-\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

e valgono

$$M = 13, \quad m = 3$$

1.3. Esercizio.

Determinare il flusso del campo

$$\overrightarrow{F} = \left\{3x^2 + y^2, x^3 - 3y^2\right\}$$

uscente dalla regione

$$E : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x$$

1.4. Soluzione.

La regione assegnata é delimitata da un tratto di parabola e da una retta.

Il flusso richiesto puó essere determinato tramite il *Teorema della divergenza,*

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{n}\, ds = \iint_E div\, \overrightarrow{F}\, dx\, dy = \iint_E (6x - 6y)\, dx\, dy$$

Tenuto conto che E é il dominio normale rispetto all'asse x

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x$$

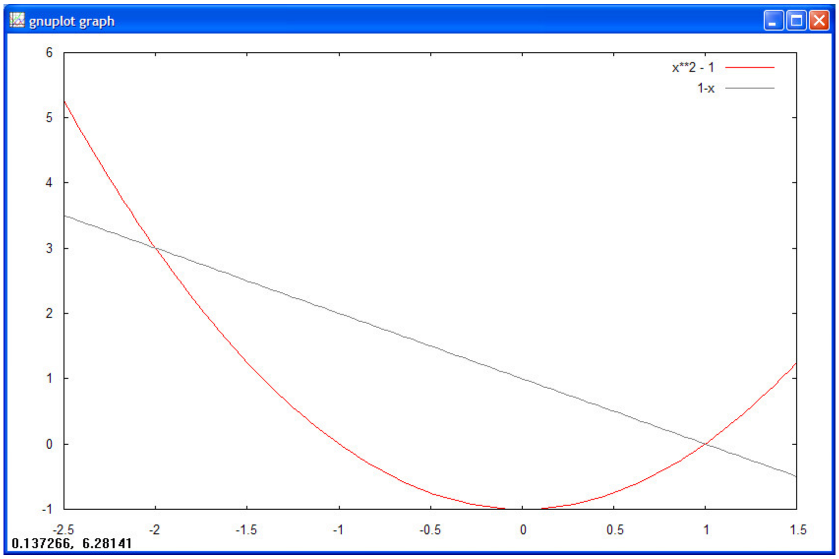


FIGURA 2. La regione E da cui calcolare il flusso uscente.

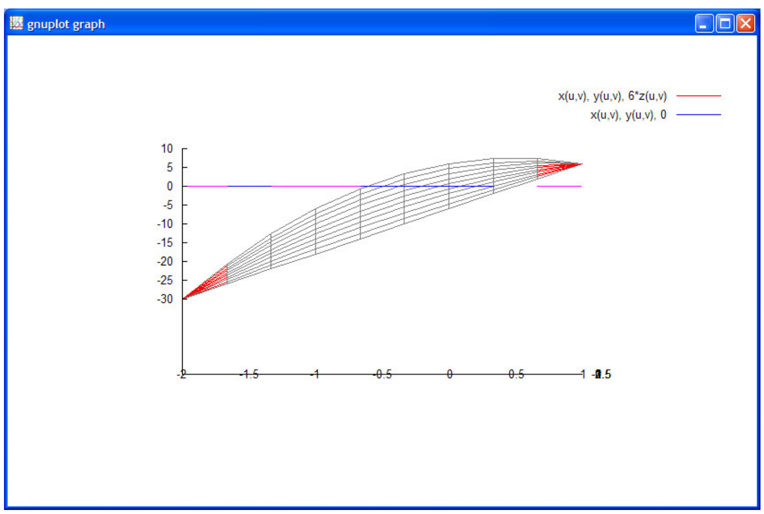


FIGURA 3. I valori della $div\, F$ su E, la linea orizzontale rappresenta la quota 0.

si ha

$$6 \iint_E (x-y)\,dx\,dy = 6 \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2-1}^{1-x} (x-y)\,dy = -\frac{297}{10}$$

1.5. Esercizio.

Detta Σ la superfice di rotazione

$$x = \rho(z)\cos(\theta), \quad y = \rho(z)\sin(\theta), \quad \rho(z) = \sqrt{z},$$

$$0 \le z \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

- *determinare l'area di* Σ,
- *determinare l'integrale superficiale*

$$\iint_\Sigma z\, d\sigma$$

1.6. Soluzione.

Tenuto conto della formula per l'area delle superfici di rotazione si ha

$$Area(\Sigma) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{z}\sqrt{z + \frac{1}{4}}\, dz =$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{4z+1}\, dz = \pi\, \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1) \simeq 5.33041$$

Ove non si usi l'espressione semplificata dell'area per le superfici di rotazione si lavora in modo standard:

$$x = \sqrt{t}\cos(\theta), \quad y = \sqrt{t}\sin(\theta), \quad z = t, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

La matrice da cui si ricavano L, M, N, é la seguente

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos(\theta) & \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin(\theta) & 1 \\ -\sqrt{t}\sin(\theta) & \sqrt{t}\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolati i minori si ottiene

$$L^2 + M^2 + N^2 = \sqrt{\frac{1}{4} + t}$$

e l'area richiesta é

$$Area = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} + t dt} = \pi\, \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

Il valore dell'integrale superficiale richiesto é, in qualunque modo si proceda,

$$Integrale = 2\pi \int_0^1 z\sqrt{z}\sqrt{z + \frac{1}{4}}\, dz = \pi \int_0^1 z\sqrt{4z+1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{60}(1 + 25\sqrt{5})\pi \simeq 2.97937$$

1.7. Esercizio.
Assegnato il problema di Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = k$$

- *determinare per ogni k la soluzione $y(x)$,*
- *determinare il suo insieme di esistenza,*
- *esaminare per quali k la $y(x)$ é limitata.*

1.8. Soluzione.

Si tratta di un'equazione autonoma

$$\int_k^y \frac{dy}{y^2} = x$$

Se $k = 0$ la soluzione é la funzione identicamente nulla.
Per gli altri k si ha

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{k} = x, \quad \to \quad y = \frac{k}{1 - kx}$$

L'insieme di definizione di ciascuna soluzione dei problemi di Cauchy assegnati (l'intervallo contenente l'origine in cui la soluzione é definita) é:

- se $k = 0$ tutto l'asse reale,
- se $k < 0$ é l'intervallo illimitato $(1/k, +\infty)$
- se $k > 0$ é l'intervallo illimitato $(-\infty, 1/k)$

La soluzione é limitata solo per $k = 0$.

1.9. Esercizio.
Determinare gli integrali generali dell'equazione differenziale lineare di secondo ordine

$$y'' + \lambda y = x + \sin(x)$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.10. Soluzione.

L'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$\begin{cases} \lambda = 0 & Y(x) = c_1 x + c_2 \\ \\ \lambda > 0 & Y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ \\ \lambda < 0 & Y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{cases}$$

Gli integrali generali dell'equazione completa variano anch'essi al variare di λ :

- per $\lambda = 1$ si ha
$$y(x) = x - \frac{x}{2}\cos(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$
- per $\lambda = 0$ si ha
$$y(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 + c_2\, x - \sin(x)$$
- per $\lambda < 0$ si ha
$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + \frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda - 1}\sin(x)$$
- per $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ si ha
$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) + \frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda - 1}\sin(x)$$

1.11. Esercizio.
Assegnata la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3/2}{k} (2x+1)^k$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *determinare la somma.*

1.12. Soluzione.

Si tratta di una serie binomiale.
La serie converge assolutamente per
$$|2x+1|| < 1, \quad \leftrightarrow \quad x \in (-1, 0)$$
Agli estremi di tale intervallo non c'é convergenza in quanto il termine generale della serie non é infinitesimo.
La somma, tenuto conto che per $|t| < 1$ si ha
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3/2}{k} t^k = (1+t)^{3/2}$$

vale, per $x \in (-1, 0)$

$$(1 + 2x + 1)^{3/2} = (2 + 2x)^{3/2} = 2\sqrt{2}(1 + x)\sqrt{1 + x}$$

Parte 11

Gli esami 2005/2006

CAPITOLO 50

Esame 12 dicembre 2005

1. Soluzioni

1.1. Esercizio.

- *Disegnare la curva chiusa* Γ *composta*
  - *dall'arco di circonferenza*
  $$x^2 + y^2 = 4$$
  minore tra $(2, 0)$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,
  - *dal segmento che congiunge* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(0, 0)$,
  - *dal segmento che congiunge* $(0, 0)$ e $(2, 0)$;
- *calcolare, ricorrendo al teorema di Stokes, il lavoro del campo vettoriale*
  $$\vec{F} = (y^2 - x^2y, xy^2)$$
  lungo la curva Γ *percorsa nel verso antiorario.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\int_\Gamma \vec{F} \times \vec{\tau}\, ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot}_z \vec{F}\, dx\, dy$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 - x^2y & xy^2 & 0 \end{vmatrix} = \{0,\, 0,\, x^2 + y^2 - 2y\}$$

Tenuto conto che in coordinate polari riesce

$$\Sigma \Leftrightarrow \{0 \le \rho \le 2,\, 0 \le \theta \le \pi/4$$

si ha

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot}_z \vec{F}\, dx\, dy = \int_0^2 \rho\, d\rho \int_0^{\pi/4} \left(\rho^2 - 2\rho \sin(\theta)\right) d\theta =$$

$$= \int_0^2 \rho \left\{ \frac{\pi}{4}\rho^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\rho \right\} d\rho =$$

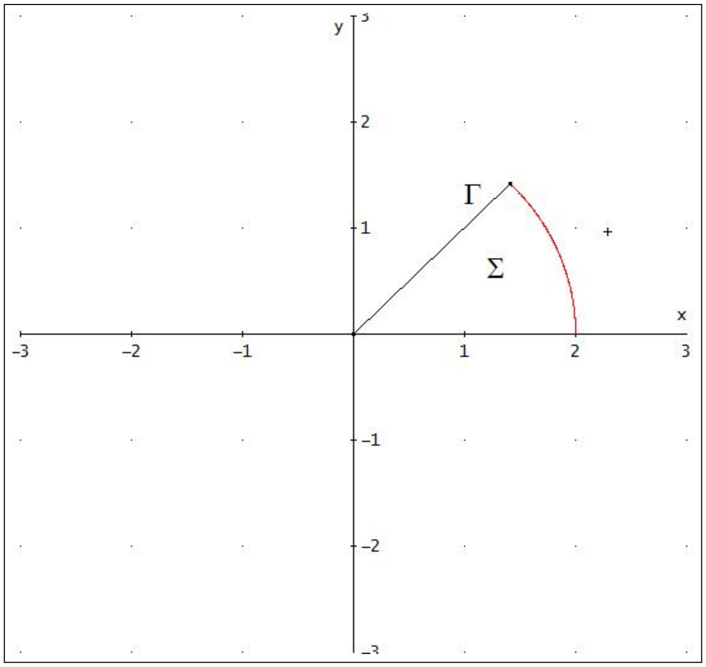


FIGURA 1. La curva Γ e la superficie Σ racchiusa.

$$= \pi + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\frac{2^3}{3} \simeq 1.5795$$

1.2. Esercizio. *Data la superficie Σ di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = u\,\sin(v), \\ y = u\,\cos(v), \qquad (u, v) \in D = \{1 \le u \le 3, 0 \le v \le \sqrt{2}\} \\ z = u, \end{cases}$$

- *determinare i versori normali alla superficie Σ;*
- *calcolare l'area di Σ;*
- *calcolare l'integrale superficiale* $\displaystyle\iint_\Sigma x\,y\,d\sigma$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Un vettore normale a Σ si determina eseguendo il prodotto vettoriale dei due vettori

$$\vec{X}_u = \{\sin(v),\,\cos(v),\,1\}, \quad \vec{X}_v = \{u\,\cos(v),\,-u\,\sin(v),\,0\}$$

tangenti alle linee coordinate.

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = \{u\,\sin(v),\,u\,\cos(v),\,-u\,\}$$

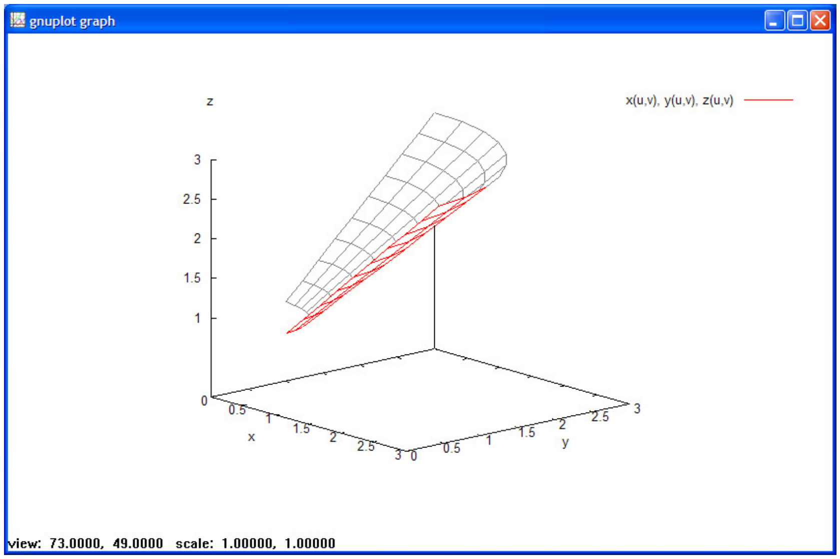


FIGURA 2. La superficie Σ

I versori normali $\vec{\nu}$ si determinano calcolando prima il modulo

$$\left|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\right| = |u|\sqrt{2}$$

e quindi

$$\vec{\nu} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin(v),\, \cos(v),\, -1\,\}$$

avendo tenuto anche conto che il parametro $u \in [1, 3]$ é positivo.

Indicato con $D: 1 \leq u \leq 3,\, 0 \leq v \leq \sqrt{2}$ il rettangolo del piano uv dove é assegnata la rappresentazione di Σ si ha

$$Area(\Sigma) = \iint_D |u|\sqrt{2}\, du\, dv = \sqrt{2}\int_1^3 u\, du \int_0^{\sqrt{2}} dv = 8$$

Per il calcolo dell'integrale superficiale, tenuto conto che

$$d\,\sigma \;=\; |u|\,\sqrt{2}\, du\, dv$$

si ha

$$\iint_\Sigma x\, y\, d\sigma = \iint_E u^2 \sin(v)\cos(v)|u|\sqrt{2}\, du\, dv =$$
$$= \sqrt{2}\int_1^3 u^3\, du \int_0^{\sqrt{2}} \sin(v)\cos(v)\, dv =$$
$$= 10\sqrt{2}\,\sin^2(\sqrt{2}) \simeq 13,8$$

Osservazione 1.1. *La rappresentazione parametrica della superficie Σ verifica l'equazione*

$$(u\,\sin(v))^2 + (u\,\sin(v))^2 = u^2$$

quindi Σ é parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$, vedi Figura 3.

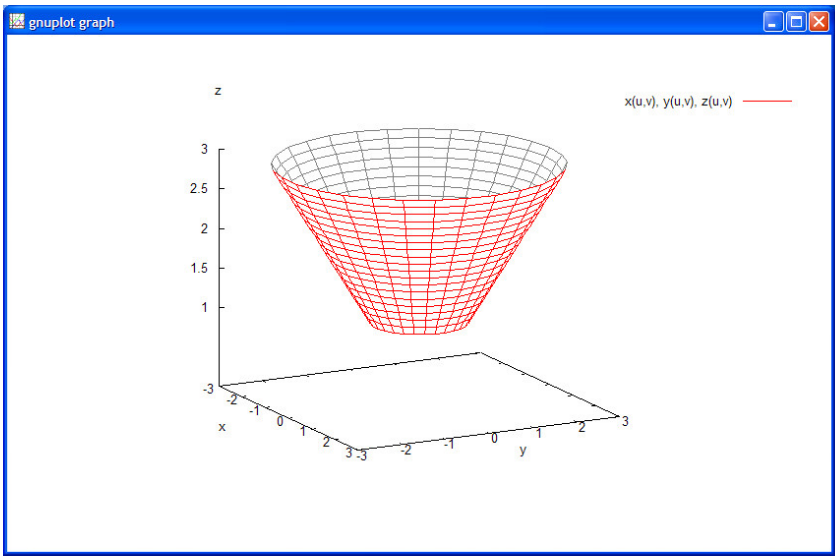


Figura 3. Il tronco di cono di cui la superficie Σ é parte.

Il cono $x^2+y^2 = z^2$ ha vertice nell'origine e la Σ é contenuta nel tronco di cono compreso tra i piani $z = 1$ e $z = 3$, vedi Figura 3.
Le aree delle superficie laterali del cono dal vertice ai piani $z = 3$ e $z = 1$ sono rispettivamente , come insegna la geometria elementare, circonferenza di base per apotema diviso 2,

$$\frac{1}{2}\left\{2\pi \times 3 \times 3\sqrt{2}\right\}, \quad \frac{1}{2}\left\{2\pi \times 1 \times 1\sqrt{2}\right\}$$

L'area della superficie laterale dell'intero tronco del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $1 \le z \le 3$ é pertanto, per differenza,

$$\pi\,8\sqrt{2}$$

Il parametro angolare v, corrispondente all'usuale θ delle coordinate polari, varia per Σ solamente in $[0, \sqrt{2}]$ in luogo di $[0, 2\pi]$.
Tale intervallo corrisponde, in termini di angolo θ circa a

$$0 \le \theta \le k\pi, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \simeq 0,45$$

ovvero, riferendosi ai gradi, a circa

$$0^0 \leq \theta \leq 81^0$$

come si riconosce nella Figura 2.
L'area di Σ *sará pertanto la frazione*

$$\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

dell'area dell'intero tronco di cono.
Riesce quindi, prevedibilmente,

$$Area(\Sigma) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \times \pi \, 8\sqrt{2} = 8$$

in accordo col valore trovato.

Osservazione 1.2. *Una stima per l'integrale superficiale richiesto poteva essere dedotta dalla nota relazione*

$$\min_{(x,y)\in\Sigma} f(x,y)\, Area(\Sigma) \leq \iint_{\Sigma} f(x,y)\, d\sigma \leq \max_{(x,y)\in\Sigma} f(x,y)\, Area(\Sigma)$$

Nel caso dell'esercizio, $f(x,y) = x\,y$ *era facile riconoscere che*

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\Sigma} xy = 1 \\ \\ \max\limits_{(x,y)\in\Sigma} xy = 3 \end{cases}$$

e, quindi, tenuro conto che $Area(\Sigma) = 8$,

$$8 \leq \iint_{\Sigma} x\,y\, d\sigma \leq 24$$

Il valore approssimativo 13, 8 *calcolato sopra soddisfa la stima precedente.*

1.3. Esercizio.

- *Determinare, nell'intorno dell'origine dove è definita, l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea*
$$y' + y\, \tan(x) = 0;$$
- *determinare l'integrale generale dell'equazione non omogenea*
$$y' + y\, \tan(x) = \cos(x);$$
- *determinare la soluzione del problema di Cauchy*
$$y' + y\, \tan(x) = \cos(x); \;\; y(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

Soluzione:

L'equazione non é definita, per via del coefficiente $\tan(x)$ nei punti $x_k = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$: quindi l'intorno dell'origine in cui é definita é

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$y' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} y \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$$

Ne segue, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

$$y(x) = A\cos(x) \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

Un'integrale particolare dell'equazione completa $y' + y\ \tan(x) = \cos(x)$ si trova,

- tenuto conto della forma particolare della funzione a secondo membro
- e del fatto che $\cos(x)$ é soluzione dell'equazione omogenea,

nella forma

$$\overline{y}(x) = x\left\{\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\right\}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\alpha = 1,\ \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{y}(x) = x\cos(x)$$

L'integrale generale dell'equazione completa $\forall x \in (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ é quindi

$$y(x) = A\cos(x) + x\cos(x)$$

Tra tali soluzioni quella che verifica il problema di Cauchy assegnato corrisponde ad $A = -\frac{\pi}{4}$ ed é quindi

$$y(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos(x)$$

Osservazione 1.3. *Strane soluzioni: l'equazione omogenea* $y' + y\ \tan(x) = 0$ *come pure quella completa* $y' + y\ \tan(x) = \cos(x)$ *sono definite, per via delle singolaritá di* $\tan(x)$ *solo per* $x \neq \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, *tuttavia.... le soluzioni*

$$y(x) = A\ \cos(x), \quad y(x) = A\ \cos(x) + x\cos(x)$$

sono definite in tutto l'asse reale !

Non solo: le due funzioni diverse, ad esempio,

$$y_1(x) = \begin{cases} \cos(x) & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos(x) & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} \cos(x) & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -2\cos(x) & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sono entrambe soluzioni, per $x \neq \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, *del problema di Cauchy*

$$y' + y\,\tan(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Che fine ha fatto il teorema di unicitá ?
La fine giusta[1]*: l'unicitá permane nell'intervallo*

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

si perde nell'insieme piú vasto (troppo vasto..., sconnesso)

$$x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

1.4. Esercizio.

- *Studiare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{e}^{kx}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x+1/2)^k}{k};$$

- *studiare l'insieme di convergenza della serie somma:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{kx} - \frac{(x+1/2)^k}{k}\right];$$

- *determinare le somme delle serie indicate nei punti precedenti.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Prima serie:}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k \mathrm{e}^{kx}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{kx}$$

Dal criterio del rapporto si ha

$$\frac{e^{(k+1)x}}{e^{kx}} = e^x < 1 \quad \to \quad x < 0$$

pertanto la serie converge assolutamente nella semiretta $x < 0$.

[1]Una funzione $f(x)$ che ha la derivata identicamente nulla é necessariamente una costante solo se considerata su un intervallo... puó non esserlo se considerata in un insieme non connesso.

Nel punto $x_0 = 0$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{e}^{k\,x_0} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

serie non convergente perché i termini non tendono a zero.
L'insieme di convergenza della prima serie é $x < 0$.

$\boxed{\text{Seconda serie:}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k-1}\frac{(x+1/2)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x+1/2|^k}{k}$$

Dal criterio del rapporto di ha

$$\frac{\frac{|x+1/2|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|x+1/2|^k}{k}} = \frac{k}{k+1}\,|x+1/2| < 1 \quad \rightarrow \quad |x+1/2| < 1$$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Pertanto la serie converge assolutamente per $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ e non converge per $x < -\frac{3}{2}$ o per $x > \frac{1}{2}$.
Per $x_0 = -\frac{3}{2}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x_0+1/2)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

serie opposta della serie armonica, e quindi anch'essa divergente.
Per $x_1 = \frac{1}{2}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x_1+1/2)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$$

serie a segni alterni con termini in valori assoluti decrescenti verso lo zero, convergente per il criterio di Leibnitz.

$\boxed{\text{Terza serie:}}$

Se x appartiene all'insieme di convergenza delle due serie

$$x \in (x<0) \cap (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}] = (-\frac{3}{2}, 0)$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{kx} - \frac{(x+1/2)^k}{k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{kx} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x+1/2)^k}{k}$$

Tenuto presente che

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t}\,\forall t \in (-1,1) \quad \to \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\mathrm{e}^x\right)^k = \frac{1}{1+e^x} - 1$$

Tenuto anche conto che

$$1-t+t^2+... = \frac{1}{1+t} \quad \to \quad t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+... = \log(1+t), \quad \forall t \in (-1,1)$$

si ha $\forall x \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x+1/2)^k}{k} = (x+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})^3+... = \log(1+(x+\frac{1}{2}))$$

da cui, per $-\frac{3}{2} < x < 0$, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{kx} - \frac{(x+1/2)^k}{k}\right] = \frac{1}{1+e^x} - 1 + \log(1+(x+\frac{1}{2}))$$

cioé

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{kx} - \frac{(x+1/2)^k}{k}\right] = \log(\frac{3}{2}+x) - \frac{e^x}{1+e^x}$$

Parte 12

Gli esami 2007/2008

CAPITOLO 51

Esame del 28 gennaio 2008

1.5. Esercizio.

(1) *Determinare l'insieme A dove la funzione*
$$f(x) = \frac{\sin^3(x) + x}{|x|^{\frac{5}{2}}}$$
è definita e dire se f è limitata su A.

(2) *Si controlli se f è integrabile in senso classico o improprio in $[0, 5]$ e in $[1, +\infty]$.*

(3) *Si determini il limite della successione di funzioni*
$$f_n(x) = \frac{\sin^n(x) + |x|^{2n}}{2 + |x|^n}$$

(4) *Si dica se la convergenza della successione di funzioni è uniforme in $I = (-1, 1)$.*

SOLUZIONE:

(1) La funzione
$$f(x) = \frac{\sin^3(x) + x}{|x|^{\frac{5}{2}}}$$
é definita per $x \neq 0$ e non é limitata: infatti
$$f(x) = \frac{\sin^3(x)}{|x|^{5/2}} \pm \frac{1}{|x|^{3/2}}$$
il primo addendo si mantiene limitato ma non lo é il secondo.

(2) La funzione $f(x)$ non é limitata in $[0, 5]$, quindi non é integrabile in senso classico.

Non é integrabile in $[0, 5]$ neanche in senso improprio: infatti
$$\frac{1}{x^{3/2}} = f(x) - \frac{\sin^3(x)}{x^{5/2}}$$

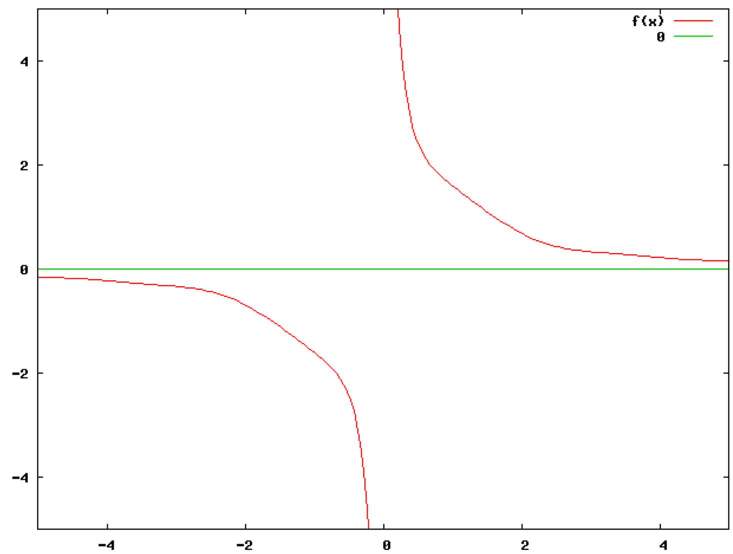


FIGURA 1. Il grafico di $f(x)$

e quindi se $f(x)$ fosse integrabile lo sarebbe anche $\dfrac{1}{x^{3/2}}$, che invece non lo é.
Tenuto conto che

$$x \in (1, +\infty) \quad \rightarrow \quad |f(x)| \leq \frac{1+x}{|x|^{5/2}} \leq \frac{2}{|x|^{1+1/2}}$$

si riconosce che f é integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$

(3) • Per $|x| < 1$ riesce

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} |\sin(x)|^n & = 0 \\ \lim_{n\to\infty} |x|^n & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

• Per $|x| = 1$ riesce

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} |\sin(x)|^n & = 0 \\ f_n(x) & = \dfrac{\sin^n(x) + 1}{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{3}$$

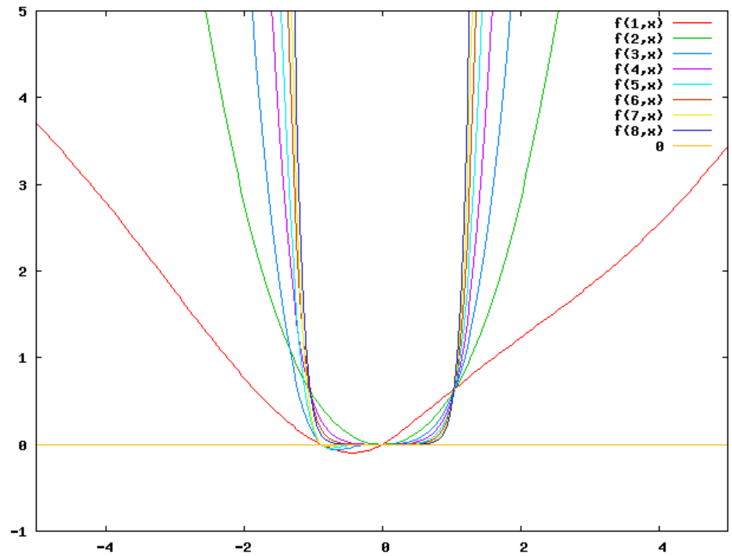


FIGURA 2. I grafici di alcune $f_n(x) \quad n \in [1, 7]$

- Per $|x| > 1$ riesce

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin^n(x)}{2+|x|^n} + \dfrac{|x|^{2n}}{2+|x|^n} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^n(x)}{2+|x|^n} = 0 & \qquad \to \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{2n}}{2+|x|^n} = +\infty \end{cases}$$

Pertanto la successione converge puntualmente per $|x| \le 1$ e riesce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1, 1) \\ 1/2 & x = \pm 1 \end{cases}$$

(4) La convergenza $f_n(x) \to f(x), \;\; f(x) = 0$ é uniforme per $x \in (-1/2, 12)$ infatti per $x \in (-\rho, \rho), \;\; |\rho| < 1$ riesce

$$|f_n(x)| \le \frac{\sin^n(|\rho|) + |\rho|^{2n}}{2} \le |\rho|^n \quad \to \quad 0$$

e quindi

$$x \in (-1/2, 12) \quad \to \quad |f_n(x) - f(x)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \to \quad 0$$

1.6. Esercizio.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *definito da* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ *e sia* $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\{x(x^2+y^2),\ \ xy(x^2+y^2)\right\}$$

(1) *Scrivere il flusso (uscente) di* $\overrightarrow{F}$ *attraverso* $\partial\Omega$ *come integrale curvilineo e calcolare tale integrale.*
(2) *Ricalcolare il flusso usando il teorema della divergenza (quindi come integrale doppio).*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La frontiera $\partial\Omega$ é composta da quattro segmenti:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, & y = 0 & \overrightarrow{\nu} = \{0,-1\} & \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu} = 0 \\ x = 1, & 0 \leq y \leq 1 & \overrightarrow{\nu} = \{1,0\} & \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu} = 1+y^2 \\ 0 \leq x \leq 1, & y = 1 & \overrightarrow{\nu} = \{0,1\} & \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu} = x(x^2+1) \\ x = 0, & 0 \leq y \leq 1 & \overrightarrow{\nu} = \{-1,0\} & \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu} = 0 \end{cases}$$

Ne segue

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \int_0^1 \left(1+t^2+t(t^2+1)\right) dt = \frac{25}{12}$$

Il teorema della divergenza indica

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_{\Omega} div(F)\, dx\, dy$$

pertanto

$$div(\overrightarrow{F}) = 3x^2 + y^2 + x^3 + 3xy^2$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \left(3x^2+y^2+x^3+3xy^2\right)\, dx = \frac{25}{12}$$

1.7. Esercizio.

Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^8 + y^8 - x^2 - xy^2$ *e sia*

$$Z \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$$

(1) *Dimostrare che* Z *è un insieme chiuso e limitato.*
(2) *Trovare i punti* $P \in Z$ *della forma* $P = (\alpha, 0)$.
(3) *Fra i punti* P *trovati determinare quelli in cui si può applicare il teorema della funzione implicita* $x = h(y)$
(4) *Per ognuno di tali punti si calcolino le derivate prima e seconda della funzione implicita corrispondente* $h(y)$ *nel punto* $y = 0$.
(5) *Si dica cosa si può dedurre per ciascuna* $h(y)$ *in* $y = 0$.

SOLUZIONE:

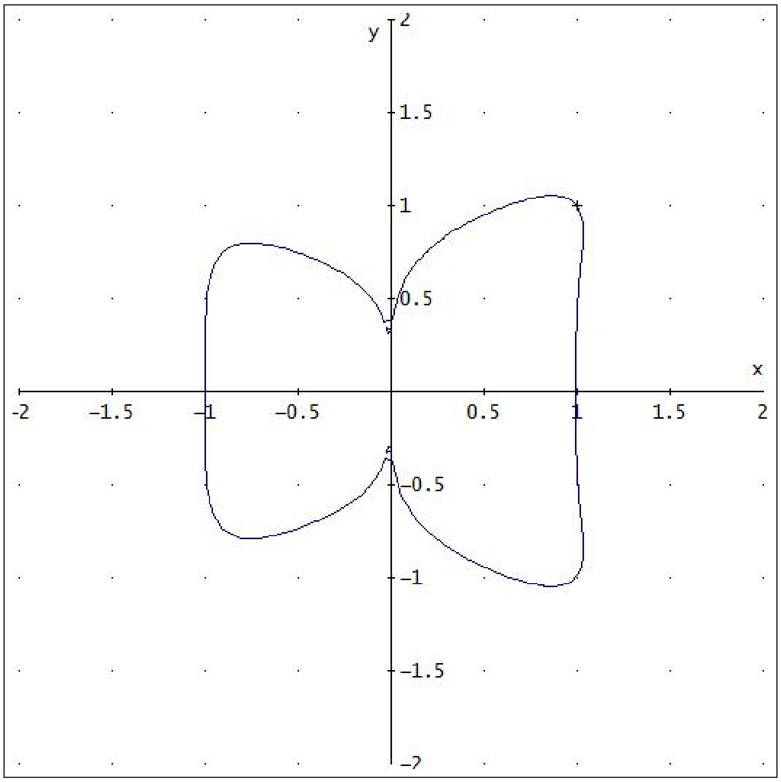


FIGURA 3. $x^8 + y^8 - x^2 - xy^4 = 0$

(1) Z è un insieme chiuso perché insieme di livello della funzione continua g. É inoltre limitato: posto

$$\rho^2 = x^2 + y^2,\ x = \rho\,\cos(\theta),\ \ y = \rho\,\sin(\theta)$$

riesce

$$|g(x,y)| \geq \rho^8(\cos^8(\theta) + \sin^8(\theta)) - \rho^2 - \rho^5$$

Detto $m > 0$ il minimo di $\cos^8(\theta) + \sin^8(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$ si ha

$$|g(x,y)| \geq \rho^8 \left(m - \frac{1}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^3} \right) \quad \to \quad \lim_{(x,y)\to\infty} g(x,y) = +\infty$$

(2)

$$g(\alpha, 0) = 0 \quad \to \quad \alpha^8 - \alpha^2 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \alpha_0 = & 0 \\ \alpha_1 = & -1 \\ \alpha_2 = & 1 \end{cases}$$

(3) Tenuto conto che $g_x(x,y) = 8x^7 - 2x - y^2$ si ha

$$\begin{cases} g_x(0,0) & = & 0 \\ g_x(-1,0) & = & -6 \\ g_x(1,0) & = & 6 \end{cases}$$

Il teorema della funzione implicita garantisce quindi che Z coincide con il grafico di due funzioni $x = h_1(y),\ x = h_2(y)$ in due intorni rispettivamente di

$$P_1 = (-1,0), \quad P_2 = (1,0)$$

(4) Dalla relazione $g(h_j(y),y) \equiv 0$ si ricava per derivazione delle funzioni composte

$$\begin{cases} g_x\, h' + g_y = 0 \\ g_{xx}\, h'^2 + g_{xy} h' + g_x\, h'' + g_{xy}\, h' + g_{yy} = 0 \end{cases}$$

Da cui per $j = 1$ si ha

$$\begin{cases} g_x(-1,0) = -6 \\ g_y(-1,0) = 0 \\ g_{yy}(-1,0) = 2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} h_1'(0) = 0 \\ h_1''(0) = 1/3 \end{cases}$$

Analogamente per $j = 2$ si ha

$$\begin{cases} g_x(1,0) = 6 \\ g_y(1,0) = 0 \\ g_{yy}(1,0) = -2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} h_2'(0) = 0 \\ h_2''(0) = 1/3 \end{cases}$$

(5) La derivata prima nulla e la derivata seconda positiva permettono di dedurre che in $y = 0$ entrambe le funzioni $h_1,\ h_2$ hanno un punto di minimo.

CAPITOLO 52

Esame settembre

ANALISI VETTORIALE
2007-2008
Terzo appello
22 settembre 2008

Soluzioni Esame

3.8. Esercizio.
Assegnati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + ny = \cos(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

- *determinare la successione* $\{y_n(t)\}$ *delle soluzioni,*
- *determinare l'insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ *in cui tale successione é convergente,*
- *verificare se la* $\{y_n(t)\}$ *converge uniformemente nell'intervallo chiuso* $[0, 1]$.

Soluzione:

- – Le soluzioni dell'equazione omogenea sono $v_n(t) = A\, e^{-nt}$,
  – soluzioni u_n della non omogenea si trovano nella forma $\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$, da cui
  $$u_n(t) = \frac{1}{1+n^2} \{\sin(t) + n\cos(t)\}$$
  – tenuto conto della condizione iniziale riesce quindi
  $$y_n(t) = \frac{1}{1+n^2} \left\{(1 + n^2 - n)\, e^{-nt} + \sin(t) + n\cos(t)\right\}$$
- Tenuto conto che se $t < 0$ l'addendo
  $$\frac{1}{1+n^2}(1 + n^2 - n)\, e^{-nt}$$
  diverge mentre gli altri si mantengono limitati si riconosce che per $t < 0$ la successione $\{y_n(t)\}$ non converge.

  Per $t = 0$ tutte le $\{y_n(t)\}$ valgono 1, quindi $0 \in E$.

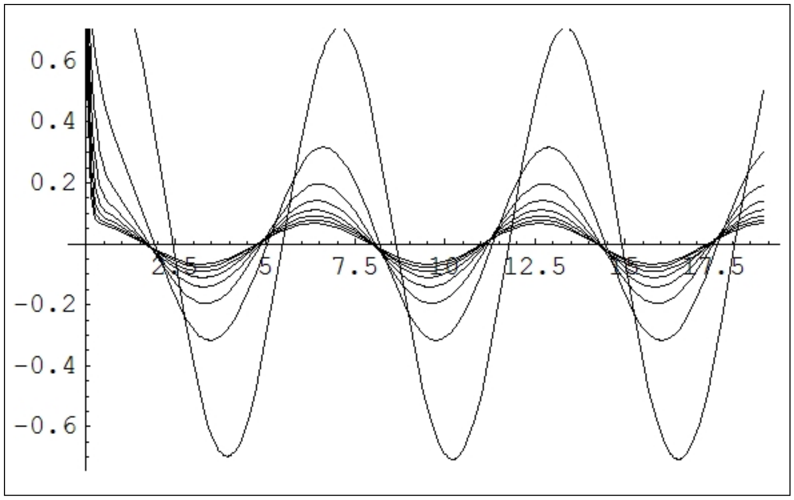


FIGURA 1. La successione $\{y_n(t)\}$ per $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$

Per $t > 0$ tutti gli addendi delle $\{y_n(t)\}$ sono infinitesimi. Pertanto $E = [0, +\infty)$.

- La funzione limite della successione $\{y_n(t)\}$ in $E = [0, +\infty)$ é pertanto
$$g(t) = \begin{cases} 1 & se \quad t = 0 \\ 0 & se \quad t > 0 \end{cases}$$
funzione discontinua in $[0, 1]$.
Quindi la successione di funzioni continue $\{y_n(t)\}$ non converge uniformemente in $[0, 1]$, avendo tenuto presente che, se fosse stata uniformemente convergente il suo limite sarebbe dovuto essere una funzione continua.

3.9. Esercizio.

Sia $\overrightarrow{F}$ il campo vettoriale
$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}\{x,\, y,\, z\}$$

- *Determinare il flusso di $\overrightarrow{F}$ uscente dalla sfera*
$$B := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$
- *Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ di $\overrightarrow{F}$ lungo la semiretta*
$$\mathcal{C}:\ x = t,\ y = t,\ z = t,\ t \in [1, +\infty]$$
- *Calcolare un potenziale di $\overrightarrow{F}$.*

Soluzione:

- Il flusso é il valore dell'integrale superficiale
$$\Phi = \iint_{\partial B} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{n}\, d\,\sigma$$
Tenuto presente che ∂B é la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e che su di essa riesce
$$\overrightarrow{F} = \{x, y, z\}, \quad \overrightarrow{n} = \{x, y, z\}$$
riesce
$$\overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{n} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
si ha quindi
$$\Phi = \iint_{\partial B} d\,\sigma = Area(\partial B) = 4\pi$$
- Il lavoro $\mathcal{L}$ richiesto é l'integrale
$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds$$
Tenuto presente che su $\mathcal{C}$ riesce
$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{3\sqrt{3}t^2}\{1,1,1\}, \quad \overrightarrow{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}, \quad ds = \sqrt{3}\,dt$$
si ha
$$\mathcal{L} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
- Il campo F assegnato coincide, a meno di un fattore costante, con il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme collocata nell'origine come pure coincide con il campo elettrico generato da una carica sempre collocata nell'origine: un potenziale, ben noto, é quindi
$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

3.10. Esercizio.

Assegnata la superfice $\mathcal{S}$ di equazioni parametriche
$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = u\,\cos(v), \\ y = u\,\sin(v), \\ z = 1 - u^2, \end{cases} \qquad u \in [1/2, 1],\ v \in [0, 2\pi]$$

- *Determinare in ogni punto di $\mathcal{S}$ un versore $\overrightarrow{\nu}$ normale alla superfice,*
- *calcolare l'area di $\mathcal{S}$,*

- *calcolare il flusso* Φ_ν *del campo* $\overrightarrow{F} = \{x, y, z\}$ *attraverso* $\mathcal{S}$, *orientata nel verso del versore* $\overrightarrow{\nu}$ *determinato precedentemente.*

Soluzione:

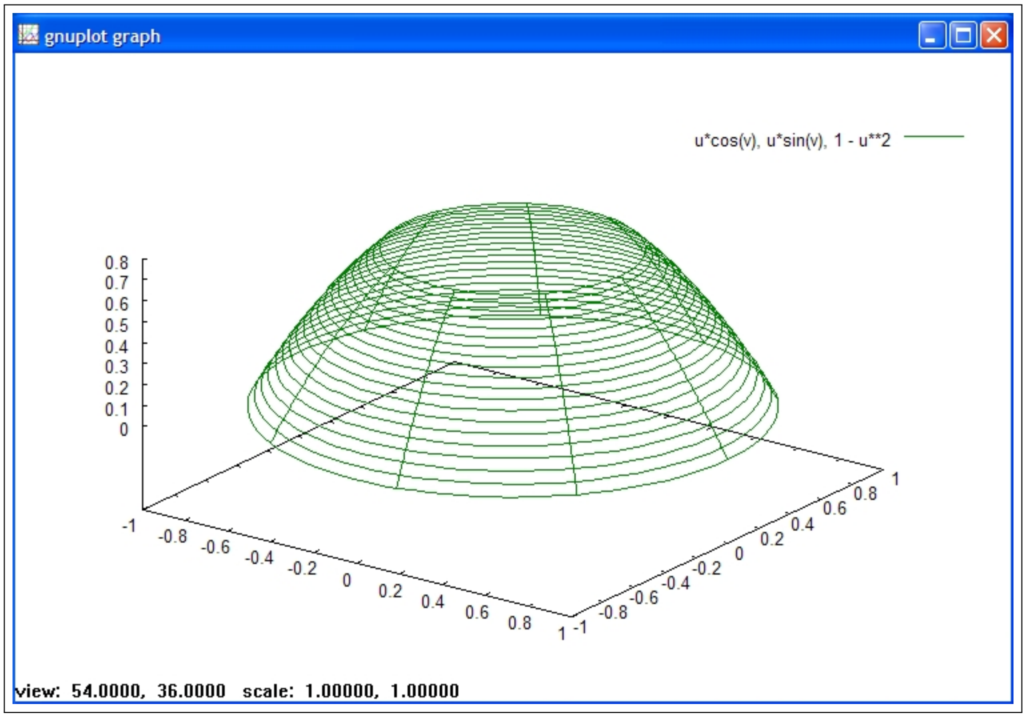


FIGURA 2. La superficie di rotazione $\mathcal{S}$

- Un vettore $\overrightarrow{n}$ normale ad $\mathcal{S}$ si ricava dalla matrice

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & -2u \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \overrightarrow{n} = \{L, M, N\} = \{2u^2\cos(v), 2u^2\sin(v), u\}$$

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{4u^4+u^2}}\{2u^2\cos(v), 2u^2\sin(v), u\}$$

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}}\{2u\cos(v), 2u\sin(v), 1\}$$

- $$Area = \int_0^{2\pi} dv \int_{1/2}^{1} u\sqrt{4u^2+1}\,du = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$$

•

$$Flusso = \int_0^{2\pi} dv \int_{1/2}^1 \{u\, \cos(v), u\, \sin(v), 1-u^2\}.\{2u^2 \cos(v), 2u^2 \sin(v), u\}\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi} dv \int_{1/2}^1 (u^3 + u)\, du = \frac{39}{32}\pi$$

3.11. Esercizio.

Data la funzione $G(x, y) = x - \frac{1}{8}x^4 + x^2y^2$ *sia* Z *il luogo dei suoi zeri. Si verifichi che*

1. Z *non e' limitato,*
2. $(0, 0)$ *e* $(2, 0)$ *appartengono a* Z
3. *si applichi il teorema della funzione implicita in* $(2, 0)$ *scrivendo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

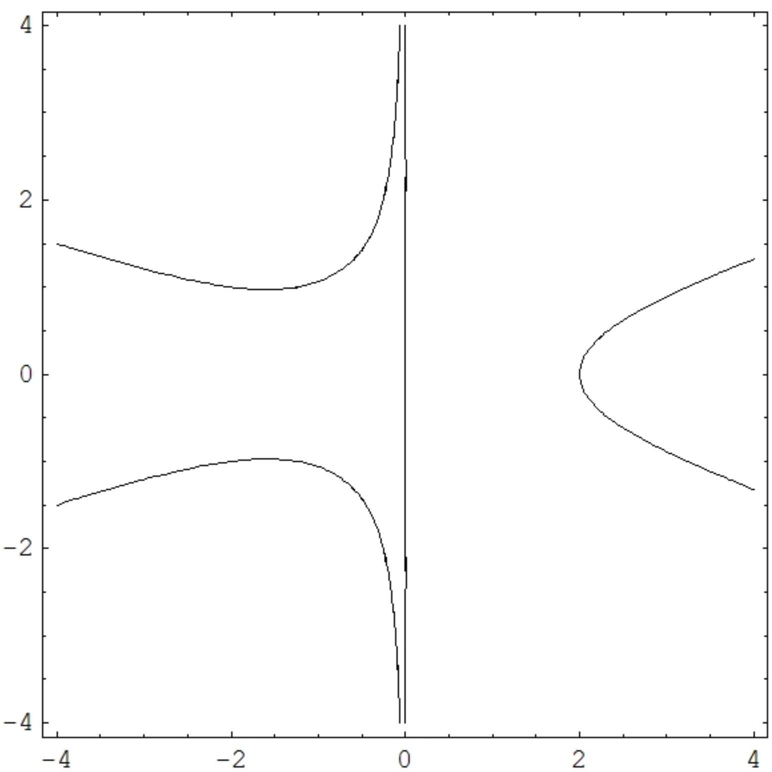


FIGURA 3. Il luogo $Z : G(x, y) = 0$

- Z contiene l'intero asse y di equazione $x = 0$, quindi non é limitato.
- Riesce $G(0,0) = G(2,0) = 0$ quindi i punti indicati appartengono a Z.
- Nel punto $(2,0)$ riesce

$$G(2,0) = 0, \quad G_x(2,0) = -3 \neq 0$$

quindi in un intorno di $(2,0)$ l'insieme Z coincide con il grafico della funzione implicita

$$x = f(y), \quad f(0) = 2$$

$$G[f(y), y] \equiv 0 \to \begin{cases} G_x f'(0) + G_y = 0 \\ G_{xx} f'^2(0) + 2G_{xy} f'(0) + G_x f''(0) + G_{yy} = 0 \end{cases}$$

essendo la funzione G e le sue derivate calcolate nel punto $(2,0)$.

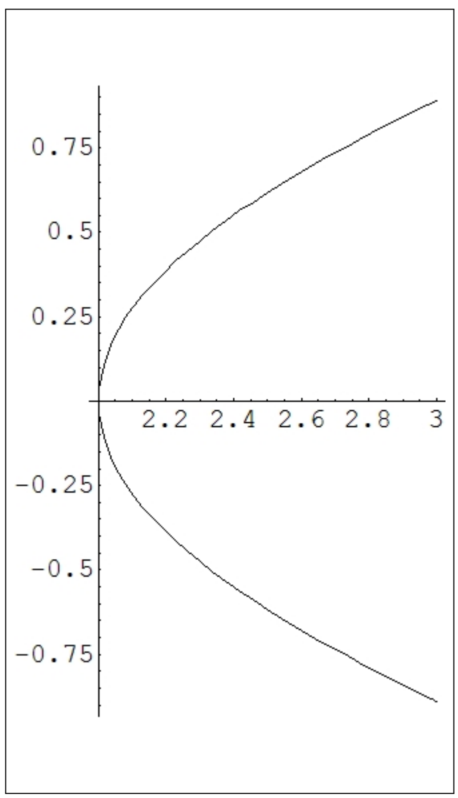


FIGURA 4. Il grafico della $x = f(y)$

Ne segue

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{8}{3}$$

Il polinomio di Taylor richiesto é pertanto

$$P(y) = 2 + \frac{4}{3}y^2$$

vedi grafico in Figura 4.