1. Introduzione

Il calcolo di un integrale doppio $\iint_S f(x,y)dx\,dy$, come del resto anche quello degli integrali in una dimensione, consiste nella capacitá di conoscere il limite delle somme

$$\lim \sum_{i,k} f(x_i, y_k) A(S_{h,k}) = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy \tag{1}$$

essendo gli $S_{h,k}$ una partizione di S in insiemi di diametro via via piú piccolo.
Una prima risposta é stata trovata, nel caso S dominio normale rispetto a uno degli assi, nelle formule di riduzione.
Il cambiamento di coordinate é un altro approccio, analogo a quello giá incontrato nel caso unidimensionale

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

sotto il nome di *integrazione per sostituzione*

Cambiare le coordinate significa scegliere

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \qquad X = \Phi(u,v)$$

ovvero, in forma vettoriale $X = \Phi(u,v)$ con requisiti naturali per le due funzioni φ, ψ:

- regolaritá almeno C^2,
- invertibilitá,

- determinante jacobiano

$$J(u,v) = \det \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Per ogni addendo della (1) riesca

- $(x,y) \in S \;\Leftrightarrow\; (u,v) \in \Omega$
- $(x,y) \in S_{i,k} \;\Leftrightarrow\; (u,v) \in \Omega_{i,k}$
- $(x_i, y_k) = (\varphi(u_i, v_k), \psi(u_i, v_k))$

La somma (1) si traduce quindi in

$$\sum_{i,k} f(\varphi(u_i, v_k), \psi(u_i, v_k)) A(S_{i,k}) \tag{2}$$

Supponiamo di aver dimostrato che

$$A(S_{h,k}) = \iint_{\Omega_{h,k}} |J(u,v)|\, du\, dv \tag{3}$$

espressione che, per il teorema della media, suggerisce l'approssimazione

$$A(S_{h,k}) \simeq |J(u_h, v_k)|\, A(\Omega_{h,k}) \tag{4}$$

e quindi consente di approssimare la (2) con

$$\sum_{i,k} f(\varphi(u_i, v_k), \psi(u_i, v_k)) |J(u_i, v_k)|\, A(\Omega_{i,k}) \tag{5}$$

Tenuto conto che

$$\lim \sum_{i,k} f(\varphi(u_i, v_k), \psi(u_i, v_k)) |J(u_i, v_k)|\, A(\Omega_{i,k}) =$$

$$= \iint_{\Omega} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|\, du\, dv$$

si ha quindi

$$\iint_S f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|\, du\, dv \tag{6}$$

Utilitá (possibili) della (6):

- L'insieme Ω potrebbe essere un dominio normale del piano (u,v) allora al secondo integrale si applicherebbero le formule di riduzione e quindi la (6) é una formula utile !
- La funzione integranda che interviene a secondo membro

  $$f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|$$

  potrebbe essere *piú facile* della $f(x,y)$ che compare a primo membro, e quindi il secondo integrale *piú facile* !

La dimostrazione

La validitá della (6) dipende da due prove fondamentali:

- la validitá della formula delle aree (3)
$$A(S_{h,k}) = \iint_{\Omega_{h,k}} |J(u,v)|\, du\, dv$$
- la stima dell'errore collegato all'approssimazione (4)
$$A(S_{h,k}) \simeq |J(u_h, v_k)|\, A(\Omega_{h,k})$$
si noti infatti che, anche se l'errore collegato a tale approssimazione é piccolo esso viene ripetuto sui tanti addendi della somma integrale (1)

  Ad esempio detto n il numero di addendi della (1) l'errore di approssimazione (4) dovrebbe risultare, per essere tollerabile, $\mathcal{O}(1/n^{1+\alpha}), \quad \alpha > 0$.

2. La formula per l'area

2.1. Trasformazioni affini.

Teorema 2.1. *Sia E un insieme limitato e misurabile del piano e sia $\Phi(E)$ la sua immagine tramite la trasformazione affine*
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \xi$$
di matrice A.
L'immagine $\Phi(E)$ è un insieme misurabile del piano e si ha
$$\text{Area}(\Phi[E]) = |\det A| \text{Area}(E)\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per semplicitá che $\xi = 0$ e E sia il triangolo di vertici $(0,0), \quad (h,0), \quad (0,k)$.
Detta
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
la matrice che determina la trasformazione, l'immagine $\Phi(E)$ é il triangolo di vertici
$$(0,0), \quad (ah, ch), \quad (bk, dk)$$
la cui Area$(\Phi(E))$ é espressa, com'é noto, dal determinante
$$\left| \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ ah & ch & 1 \\ bk & dk & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| \frac{1}{2} |h\, k| = |\det(A)|\ \text{Area}(E)$$

$\square$

2.2. Trasformazioni generali. Ogni trasformazione $X = \Phi(u, v)$ si approssima, localmente con una trasformazione affine:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \approx$$

$$\approx \begin{cases} x = \varphi(u_0, v_0) + \varphi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \varphi_v(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y = \psi(u_0, v_0) + \psi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \psi_v(u_0, v_0)(v - v_0) \end{cases}$$

Indicata con $X = \widetilde{\Phi}(u, v)$ l'approssimazione suggerita si ha, detto ℓ il diametro dell'insieme E :

$$\begin{array}{ll} Area(\widetilde{\Phi}(E)) & = |D\,\Phi(u_0, v_0)|\, Area(E) \\ |\Phi(u, v) - \widetilde{\Phi}(u, v)| & = \mathcal{O}(\,\ell^2) \\ Area(\widetilde{\Phi}(E)) - Area(\Phi(E)) & = \mathcal{O}(\ell^3) \end{array}$$

Per quanto concerne l'ultima stima si osservi che la differenza simmetrica

$$\triangle = \Big(\Phi(E) - \widetilde{\Phi}(E))\Big) \cup \Big(\widetilde{\Phi}(E) - \Phi(E))\Big)$$

é contenuta in un intorno della frontiera di $\partial(\widetilde{\Phi}(E))$ di spessore $\mathcal{O}(\,\ell^2)$, quindi, tenuto conto che la lunghezza di $\partial(\widetilde{\Phi}(E))$ é $\mathcal{O}(\ell)$ ne segue che

$$Area(\triangle) = \mathcal{O}(\ell^3)$$

Ne segue quindi

$$|Area(\Phi(E) - |D\,\Phi(u_0, v_0)|\, Area(E)| = \mathcal{O}(\ell^3)$$

La stima indicata é importante ai fini della somma:

- se si decompone un insieme del piano in quadretti di lato ℓ si ottiene un numero di addendi $\mathcal{O}(1/\ell^2)$,
- se l'errore nel calcolo dell'area su ognuno é $\mathcal{O}(\ell^3)$
- ne discende che l'errore sull'intera somma é $\mathcal{O}(\ell)$

e quindi ancora infinitesimo con ℓ

TEOREMA 2.2. *Sia E un insieme limitato e misurabile del piano e sia $\Phi(E)$ la sua immagine tramite la trasformazione Φ*
L'immagine $\Phi(E)$ è un insieme misurabile del piano e si ha

$$\text{Area}(\Phi[E]) = \iint_E |\det D\,\Phi(u, v)|\, du\, dv$$

avendo indicato con

$$D\,\Phi(u, v) = \det \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$