1. Cambiamenti di coordinate affini

Esempio 1.1. *Si debba calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

essendo D il parallelogramma di vertici

$$(0,0), \quad (2,0), \quad (3,3), \quad (1,3)$$

nel quale é possibile riconoscere, vedi Figura 1, l'immagine del quadrato Q di vertici opposti $(0,0), \quad (1,1)$ *tramite la trasformazione affine*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Riesce pertanto

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \iint_Q [(2u+v)+(3v)] \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} dudv =$$

$$= 6 \int_0^1 du \int_0^1 (2u+4v)\,dv = 18$$

Osservazione 1.2. *Cosa si sarebbe potuto dire del valore del precedente integrale doppio pensando di servirsi del Teorema della Media ?*

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = (\xi+\eta) Area(D) = 6(\xi+\eta)$$

e quale punto piú candidabile del centro $(1.5,\, 1.5)$ *del parallelogramma D dal momento che la funzione integranda é lineare ?*

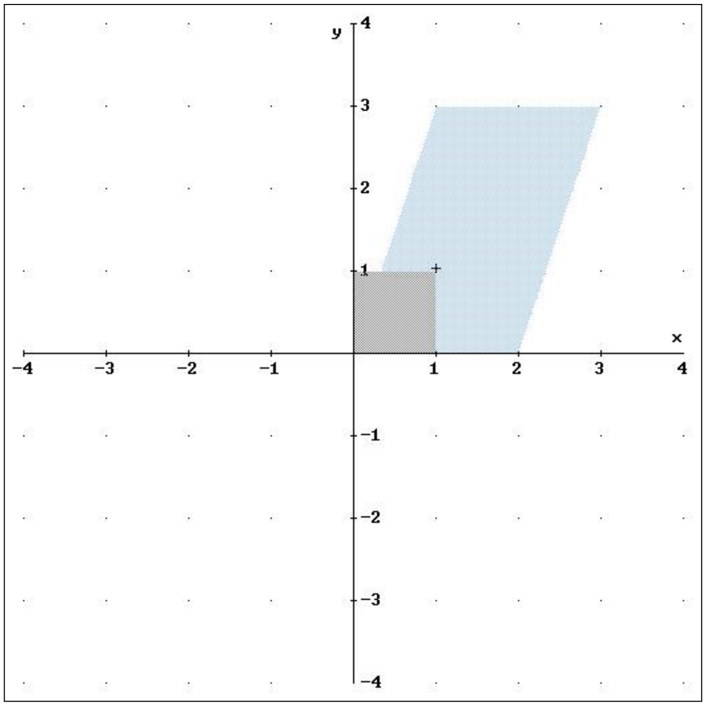

FIGURA 1. Il parallelogramma D e il quadrato Q

Infatti

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = 18 = 6(1.5\,+\,1.5)$$

ESEMPIO 1.3. **Utilitá di un cambio di coordinate affini.**
Si debba calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2} dxdy, \qquad D = \{(x,y) : 0 \le x+y \le 1, 0 \le x-y \le 1\}$$

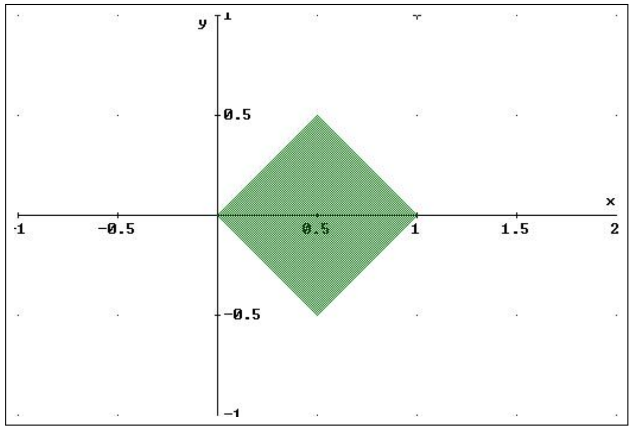

FIGURA 2. Il dominio D

La funzione integranda é positiva e quindi l'integrale richiesto rappresenta il volume del solido

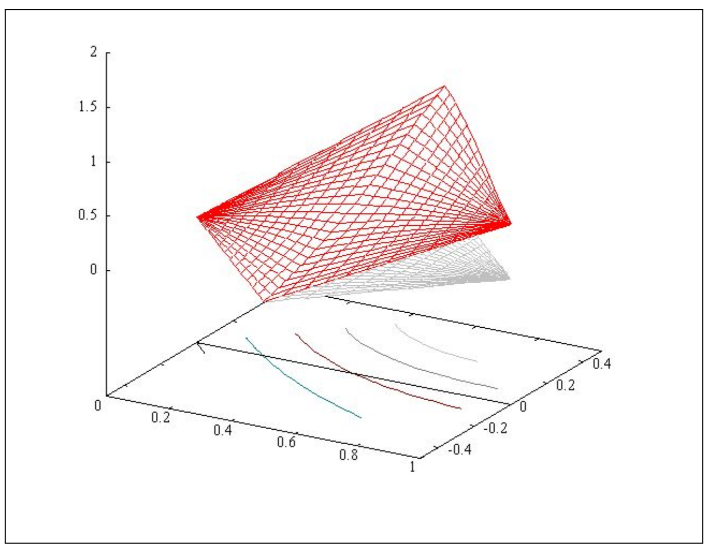

FIGURA 3. Il volume del solido: dal piano grigio, $z = 0$ alla cupola grafico in rosso, il tutto disegnato in corrispondenza ai punti $(x, y) \in D$.

Consideriamo la trasformazione affine $\Phi(u, v)$

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} x = & \frac{1}{2}(u+v) \\ y = & \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \qquad \Phi([0,1]\times[0,1]) = D$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e l'inversa

$$\Phi^{-1}(x,y) = \begin{cases} u = & x+y \\ v = & x-y \end{cases}, \quad \Phi^{-1}(D) = [0,1]\times[0,1] \subseteq R^2_{u,v}$$

Riesce inoltre

$$\det D\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

La formula del cambiamento di coordinate é la seguente

$$\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{u}{1+v^2}\left|D\Phi(u,v)\right| dudv =$$
$$= \frac{1}{2}\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{u}{1+v^2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+v^2}dv \int_0^1 udu =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+v^2}dv = \frac{\pi}{16}$$

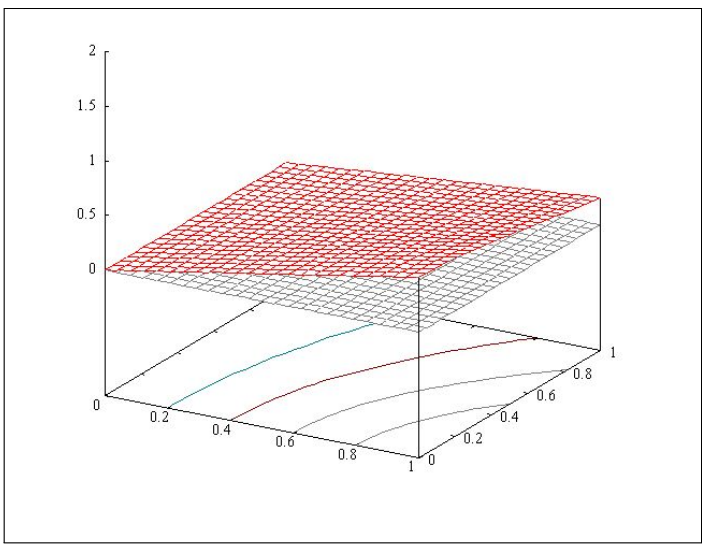

FIGURA 4. Il grafico della $\frac{1}{2}\frac{u}{1+v^2}$, $\quad u \in [0,1], v \in [0,1]$ e il piano $z = 0$ in grigio.

2. Le coordinate polari

Siano $0 \le r < R$ e $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, sia Q il rettangolo

$$Q = [r,R]\times[\alpha,\beta]$$

e si indichi con (ρ, θ) i punti di Q.
Si consideri la funzione

$$\Phi : R^2 \to R^2 : \Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \end{cases} .$$

L'immagine di Q tramite Φ risulta essere l'intersezione della corona circolare di raggio interno r e raggio esterno R con l'angolo di apertura $\alpha - \beta$: se $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$, l'immagine di Q è la corona anzidetta, se inoltre $r = 0$, l'immagine è il disco di centro l'origine e raggio R.

Calcoliamo l'area dell'immagine $\Phi(Q)$ usando la formula (**??**) :

$$\text{Area}(\Phi(Q)) = \int_{\Phi(Q)} dxdy = \int_Q |\det D\Phi(\rho, \theta)| d\rho d\theta =$$

$$\int_\alpha^\beta \int_r^R |\det D\Phi(\rho, \theta)| d\rho d\theta .$$

La matrice jacobiana e il suo determinante sono, nel caso delle coordinate polari,

$$D\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(\rho, \theta) = \rho$$

quindi

$$\text{Area}(\Phi(Q)) = \int_\alpha^\beta \int_r^R \rho d\rho d\theta = \frac{R^2 - r^2}{2}(\beta - \alpha) .$$

Si ritrova, per $r \to 0$ l'area del cerchio

$$\lim_{r\to 0^+} \lim_{\alpha \to 0^+} \lim_{\beta \to 2\pi^-} \frac{R^2 - r^2}{2}(\beta - \alpha) = \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2 . \tag{1}$$

Osservazione 2.1. *I risultati ottenuti sono corretti anche se per giustificare la (1) non basta la nostra formula dell'area perché la funzione Φ non soddisfa le ipotesi del teorema per $\rho = 0$: si perde l'invertibilitá. Infatti il segmento verticale $\{0\} \times [0, 2\pi]$ ha come immagine un solo punto, l'origine.*
In altre parole la funzione Φ non è iniettiva.
Il problema può essere rimosso, contentiamoci di averlo segnalato.

2.1. Integrazione in coordinate polari.

Proposizione 2.2. *Sia F una funzione continua sul disco chiuso di raggio $R > 0$ centrato in $(0,0)$. Allora*

$$\int_{B(0,R)} F(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^R F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \right]. \tag{2}$$

Esempio 2.3. *Calcolare l'integrale doppio seguente:*

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy, \quad D : x^2+y^2 \leq 1$$

- *si sostituisce ad x e ad y rispettivamente $\rho\,\cos(\theta)$ e $\rho\,\sin(\theta)$*
- *si sostituisce al blocco $dx\,dy$ il blocco $\rho\, d\rho\, d\theta$*
- *si estende l'integrale doppio in ρ e θ alla regione Q tale che*

$$(\rho,\theta) \in Q \Leftrightarrow (x,y) \in D$$

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \;=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\;\rho\, d\rho$$

$$= 2\,\pi\,\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\; 2\;\rho\; d\rho = 2\pi\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

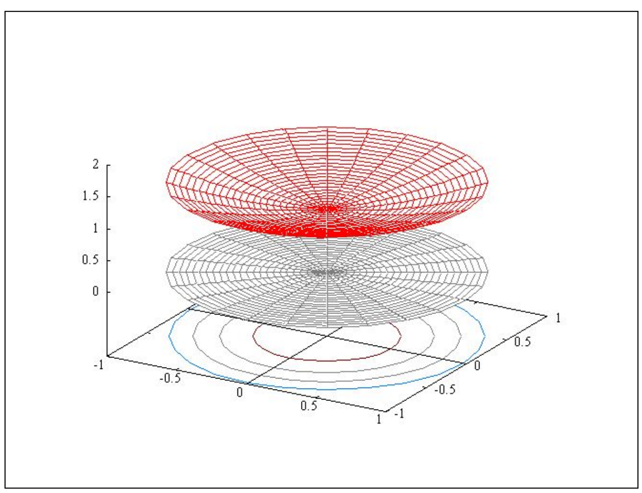

Figura 5. L'integrale $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$ rappresenta il volume tra il piano $z=0$ in grigio e il grafico di $\sqrt{1+x^2+y^2}$, $\quad x^2+y^2 \leq 1$ in rosso.

3. Cambiamenti di coordinate in integrali tripli

L'algoritmo di sostituzione delle coordinate negli integrali doppi si estende in modo del tutto analogo al caso di integrali tripli.
Siano

$$\begin{cases} x = & \varphi(u,v,w), \\ y = & \psi(u,v,w), \\ z = & \chi(u,v,w) \end{cases}$$

gli elementi della trasformazione Φ che si intende adottare, funzioni regolari e invertibili, l'integrale

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

si trasforma al modo seguente

- si sostituiscono nella funzione integranda f le x, y e z con le corrispondenti $\varphi(u,v,w)$,$\psi(u,v,w)$ e $\chi(u,v,w)$
- si sostituisce il blocco $dx\,dy\,dz$ con

  $$\det|D\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

  essendo

  $$\det D\Phi(u,v,w) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix}$$

- Si calcola l'integrale

$$\iiint_Q f\left[\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\right] |\det D\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

  essendo Q tale che

  $$(u,v,w) \in Q \Leftrightarrow (x,y,z) \in D$$

Tenere sempre presente che lo scopo del cambiamento di coordinate é quello di approdare con esso ad un integrale che presenti minori difficoltá di quello originale.

3.1. Coordinate sferiche. In questo caso la trasformazione Φ é definita come segue

$$\Phi = \Phi(\rho,\phi,\theta) = \begin{cases} x = \rho\cos\phi\sin\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi].$$

La matrice Jacobiana è la seguente:

$$D\Phi(\rho,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana è

$$\rho^2\sin(\theta).$$

3.2. La sfera. Applichiamo le coordinate sferiche per calcolare il volume della sfera $B(0,R)$ di centro l'origine e raggio R

$$\text{Volume}(B(0,R)) = \iiint\limits_{B(0,R)} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{Q} \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi,$$

dove $Q = [0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$.

$$\text{Volume}(B(0,R)) = \int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$