Integrali impropri in 1 dimensione

1. Dai primi esempi alla definizione

Sappiamo il senso della frase

una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ <u>*limitata*</u> *è integrabile su* (a, b)

vorremmo darle senso anche prescindendo dalle ipotesi

(i) $[a, b]$ intervallo limitato;

(ii) f funzione limitata.

Rimuovendo (i) e/o (ii) si passa da una situazione in cui il grafico di f è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$, ad una in cui il grafico di f è illimitato. Ad esempio, si vorrebbe dare significato a espressioni del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

Esempio 1.1. *Dato* $\alpha > 0$, *consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \in (0, 1].$$

Dato che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty.$$

la funzione f *non è limitata in* $(0, 1]$.

$\forall \varepsilon \in (0, 1)$, *l'integrale definito ha senso e vale:*

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) & \text{se } \alpha \neq 1, \\[2ex] -\ln \varepsilon & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si ottiene inoltre

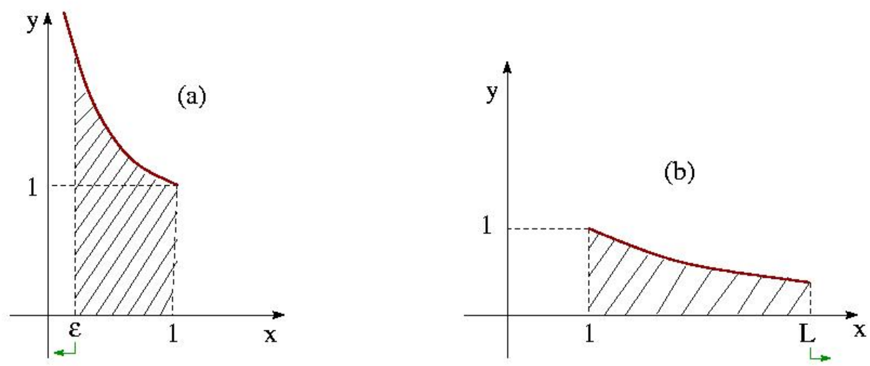

FIGURA 1. L'area della zona tratteggiata è: (a) $\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx$; (b) $\int_1^L x^{-\alpha}\,dx$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \textit{se } \alpha < 1, \\[2ex] +\infty & \textit{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Alla luce di questo risultato, è naturale dire che

la funzione $x^{-\alpha}$ è *integrabile* in $(0, 1]$ se $\alpha < 1$, e non lo è se $\alpha \geq 1$.

ESEMPIO 1.2. *Dato $\alpha > 0$, consideriamo la stessa funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \in [1, +\infty).$$

Anche in questo caso non è possibile definire l'integrale nel senso classico, dato che l'insieme di definizione è un intervallo illimitato. Nello stesso spirito dell'esempio precedente, riconduciamoci ad una situazione in cui l'integrale abbia senso e poi passiamo al limite. Dato $L > 1$,

$$\int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(L^{1-\alpha} - 1\right) & \textit{se } \alpha \neq 1, \\[2ex] \ln L & \textit{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Passando al limite per $L \to +\infty$ (Fig.1(b)),

$$\lim_{L\to +\infty}\int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \textit{se } \alpha > 1, \\[2ex] +\infty & \textit{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Esattamente come nel caso di prima, è naturale affermare che

$x^{-\alpha}$ è integrabile in $[1, +\infty)$ se $\alpha > 1$ e non lo è se $\alpha \leq 1$.

L'idea nella definizione dell'integrale improprio è tutta qui: rincondursi ad un integrale in senso classico e poi passare al limite.

DEFINIZIONE 1.3. *Sia* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *e* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni* $[c, d] \subset (a, b)$.
La funzione f *è* INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN (a, b) *se esiste finito il limite*

$$\lim_{(c,d)\to(a,b)} \int_c^d f(x)\,dx = \ell$$

In tal caso l'integrale improprio di f *in* (a, b) *è dato da*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell$$

Una funzione f *definita in un insieme*

$$A = \cup_{k=1}^n I_k$$

unione finita di intervalli disgiunti é integrabile su A *se é integrabile su ciascuno degli intervalli* I_k.

2. Funzioni positive

Consideriamo una funzione

$$f : [a, +\infty),\ f(x) \geq 0$$

integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
L'esistenza dell'integrale improprio di f in $[a, +\infty)$ é l'esistenza del limite

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L) = \int_a^L f(x)\,dx. \tag{1}$$

Tenuto conto che $f(x) \geq 0$ implica che $\Phi(L)$ è non decrescente vale

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L) = \sup_{L\geq a} \Phi(L).$$

La funzione f è integrabile se e solo se $\sup_{L\geq a} \Phi(L)$ è finito.

Inoltre il valore dell'integrale improprio rappresenta l'area della regione di piano non limitata, che è compresa tra il grafico della funzione f, la semiretta $\{x \geq a,\ y = 0\}$ e il segmento di estremi $(a, 0)$ e $(f(a), 0)$.

Come nel caso delle serie a termini positivi, è possibile introdurre per funzioni positive un *criterio del confronto*, estremamente utile per stabilire se un integrale improprio sia convergente.

Il principio è semplice: se il grafico di una funzione positiva giace sopra quello di una funzione non integrabile, anche lei non è integrabile; se invece giace sotto quello di una funzione integrabile è essa stessa integrabile.
Nell'enunciato che segue b può rappresentare sia un numero reale che il simbolo $+\infty$.

TEOREMA 2.1. *(Criterio del confronto) Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[c, d]$ per ogni $c, d \in (a, b)$ e tali che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Valgono le implicazioni

$$\text{se} \quad \int_a^b f(x)\,dx = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b g(x)\,dx = +\infty;$$

$$\text{se} \quad \int_a^b g(x)\,dx < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$$

Nel secondo caso, vale anche la stima

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

ESEMPIO 2.2.

$$\text{“l'integrale improprio} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \qquad \text{esiste finito.”}$$

Utilizzando il Teorema 2.1 posso comunque giustificare la mia affermazione, infatti:

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \geq 1$$

e dato che la funzione $1/x^2$ è tale che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < +\infty,$$

PROPOSIZIONE 2.3. *(Criterio del confronto asintotico) Siano*

$$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}_+$$

due funzioni integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$.
Allora

- *se*
$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0,$$
le funzioni f e g o sono entrambe integrabili in senso improprio in $[a, b)$ o sono entrambe non integrabili.
- *se*
$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
allora se f non è integrabile, neppure g lo è; se g è integrabile, anche f lo è.
- *se*
$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$
allora se g non è integrabile, neppure f lo è; se f è integrabile, anche g lo è.

DIMOSTRAZIONE. Le dimostrazioni discendono, per confronto dalle seguenti disuguaglianze relative ai tre casi considerati:

-
$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0 \quad \to \quad (\ell - \varepsilon) g(x) < f(x) < (\ell + \varepsilon) g(x)$$
- $f(x) < g(x)$
- $f(x) > g(x)$

□

2.1. Un criterio per le serie.

TEOREMA 2.4. *Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente: posto $a_k = f(k)$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty.$$

Questo criterio integrale è particolarmente utile nella direzione che va dall'esistenza dell'integrale improprio alla convergenza della serie.
Infatti per gli integrali definiti il Teorema Fondamentale del Calcolo permette, in un certo numero di situazioni, il calcolo esplicito.
Lo stesso non è vero per le serie numeriche.

Esempio 2.5.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Si ha

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L\to+\infty} \int_2^{L} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dy}{y} = +\infty,$$

e quindi anche la serie è divergente (come si vede che $1/x \ln x$ è decrescente?).

3. Funzioni di segno qualsiasi

Esempio 3.1. *Consideriamo la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita*

$$f(2n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad e \qquad f(2n+1) = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

e lineare nei tratti intermedi, vedi Figura 2.

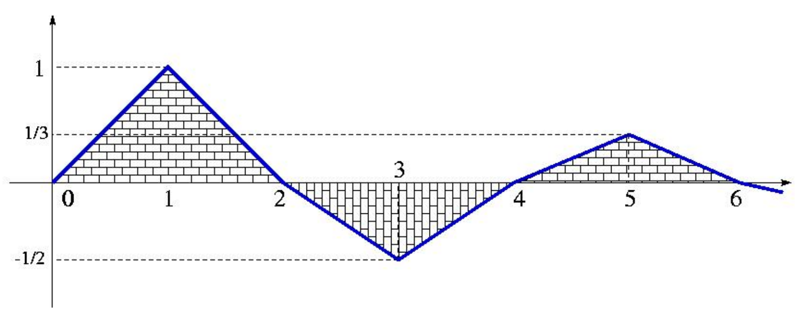

Figura 2.

Riesce

$$\int_{2n}^{2n+2} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\, 2 \cdot f(2n+1) = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Quindi

$$\int_0^{2n+2} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{2k}^{2k+2} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}. \tag{2}$$

serie convergente semplicemente: l'integrale improprio di $f(x)$ è dato dalla somma della serie.

Definizione 3.2. *Una funzione f ammette* integrale improprio assolutamente convergente *se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio.*

TEOREMA 3.3. *Una funzione che ammetta integrale improprio assolutamente convergente ammette integrale improprio.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $\Phi(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ condizione necessaria e sufficiente per dimostrare l'esistenza del

$$\lim_{c \to b^-} \Phi(c)$$

é verificare la condizione di Cauchy $|\Phi(c') - \Phi(c'')| < \varepsilon$: ma dalla maggiorazione del modulo segue

$$|\Phi(c') - \Phi(c'')| < \left| \int_{c'}^{c''} |f(x)| dx \right|$$

da cui l'asserto tenuta presente l'ipotesi che $|f|$ sia dotata di integrale improprio convergente. □

Esattamente come nel caso delle serie, se una funzione f ha integrale improprio assolutamente convergente, allora è integrabile anche in senso improprio.
Inoltre, sempre nel caso di convergenza assoluta, si può calcolare l'integrale seguendo l'ordine che più ci aggrada.
Limitiamoci, per semplicità, al caso di una funzione

$$f \,:\, (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

integrabile in $[a, b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$. Se scegliamo $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ successione di intervalli chiusi e limitati tali che

$$I_n \subset I_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = (0, \infty),$$

allora

$$|f| \text{ integrabile in } (0, \infty) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{I_n} f(x)\,dx = \lim_{L \to +\infty} \int_0^L f(x)\,dx =: \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

E' importante sottolineare ancora una volta che nel caso in cui la funzione $|f|$ <u>non</u> sia integrabile, lo stesso procedimento non dà luogo allo stesso risultato: successioni di intervalli diverse, danno luogo a limiti diversi.

Integrale di Dirichlet. Un esempio di funzione f integrabile in senso improprio, ma non in valore assoluto, è

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad f(0) = 1, \quad x \in (0, \infty).$$

Mostriamo, prima di tutto, che $\dfrac{\sin x}{x}$ *è integrabile in* $[1, \infty)$. Infatti, per ogni $L > 1$,

$$\int_1^L \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_1^L \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^L - \int_1^L \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

L'integrale finale esiste dato che la funzione $\cos x/x^2$ è assolutamente integrabile in $[1, +\infty)$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\lim_{L \to +\infty} \int_1^L \frac{\sin x}{x}\, dx = -\cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Mostriamo ora che $|\sin x|/x$ *non è integrabile in* $[1, \infty)$. Per $k \in \mathbb{N}$, consideriamo l'integrale di $|\sin x|/x$ in $[k\pi, (k+1)\pi]$. Per la monotonìa di $1/x$, vale la stima dal basso

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x\, dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi} \left[\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi)\right] = \frac{(-1)^k \cdot (-1)^k \cdot 2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Sommando su k, si ha

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Dato che la serie armonica è divergente, ne segue che il limite è divergente e quindi la funzione $|\sin x|/x$ non è integrabile in $(0, +\infty)$.

Integrali di Fresnel. Un altro esempio di integrali impropri sono dati dagli *integrali di Fresnel*, che emergono nella teoria della diffrazione della luce:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx.$$

Prendiamo in considerazione l'integrale di $\sin(x^2)$ in $[1, L]$. Utilizzando la sostituzione $t = x^2$ e integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^L \sin(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{d}{dt}(-\cos t)\,dt \\ &= -\frac{\cos\sqrt{L}}{2\sqrt{L}} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dx.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è convergente in valore assoluto, dato che

$$\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e $1/t^{3/2}$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi, passando al limite per $L \to +\infty$, si deduce che la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile in $[1, +\infty)$, quindi anche in $[0, +\infty)$, e vale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx.$$

Un fatto eclatante espresso da questo esempio è che *esistono funzioni* $f = f(x)$ *integrabili in senso improprio in* $(0, \infty)$ *che* <u>*non*</u> *sono infinitesime per* $x \to +\infty$*!* Nel caso in cui $f : [0, +\infty)$ abbia limite <u>diverso da 0</u> per $x \to +\infty$, la funzione non sarà mai integrabile in $(0, \infty)$.