0.1. Un criterio per le serie.

TEOREMA 0.1. *Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente: posto $a_k = f(k)$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

Questo criterio integrale è particolarmente utile nella direzione che va dall'esistenza dell'integrale improprio alla convergenza della serie.
Infatti per gli integrali definiti il Teorema Fondamentale del Calcolo permette, in un certo numero di situazioni, il calcolo esplicito.
Lo stesso non è vero per le serie numeriche.

ESEMPIO 0.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Si ha

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L\to+\infty} \int_2^{L} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dy}{y} = +\infty,$$

e quindi anche la serie è divergente (come si vede che $1/x \ln x$ è decrescente?).

1. Funzioni di segno qualsiasi

ESEMPIO 1.1. *Consideriamo la funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita*

$$f(2n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad e \qquad f(2n+1) = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

e lineare nei tratti intermedi, vedi Figura 1.
Riesce

$$\int_{2n}^{2n+2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,2 \cdot f(2n+1) = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

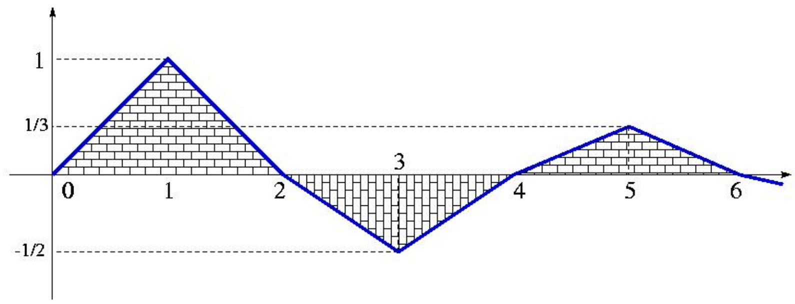

FIGURA 1.

Quindi

$$\int_0^{2n+2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{2k}^{2k+2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}. \tag{1}$$

serie convergente semplicemente: l'integrale improprio di $f(x)$ è dato dalla somma della serie.

DEFINIZIONE 1.2. *Una funzione f ammette* INTEGRALE IMPROPRIO ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE *se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio.*

TEOREMA 1.3. *Una funzione che ammetta integrale improprio assolutamente convergente ammette integrale improprio.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $\Phi(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ condizione necessaria e sufficiente per dimostrare l'esistenza del

$$\lim_{c \to b^-} \Phi(c)$$

é verificare la condizione di Cauchy $|\Phi(c') - \Phi(c'')| < \varepsilon$: ma dalla maggiorazione del modulo segue

$$|\Phi(c') - \Phi(c'')| < \left| \int_{c'}^{c''} |f(x)| dx \right|$$

da cui l'asserto tenuta presente l'ipotesi che $|f|$ sia dotata di integrale improprio convergente. $\square$

Esattamente come nel caso delle serie, se una funzione f ha integrale improprio assolutamente convergente, allora è integrabile anche in senso improprio.
Inoltre, sempre nel caso di convergenza assoluta, si può calcolare l'integrale seguendo l'ordine che più ci aggrada.

Limitiamoci, per semplicità, al caso di una funzione

$$f\,:\,(0,\infty)\to\mathbb{R}$$

integrabile in $[a,b]$ per ogni $0<a<b<+\infty$. Se scegliamo $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ successione di intervalli chiusi e limitati tali che

$$I_n\subset I_{n+1}\quad\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad \text{e}\qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n=(0,\infty),$$

allora

$$|f| \text{ integrabile in } (0,\infty)\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{I_n} f(x)\,dx=\lim_{L\to+\infty}\int_0^L f(x)\,dx=:\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

E' importante sottolineare ancora una volta che nel caso in cui la funzione $|f|$ <u>non</u> sia integrabile, lo stesso procedimento non dà luogo allo stesso risultato: successioni di intervalli diverse, danno luogo a limiti diversi.

Integrale di Dirichlet. Un esempio di funzione f integrabile in senso improprio, ma non in valore assoluto, è

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad f(0)=1,\quad x\in(0,\infty).$$

Mostriamo, prima di tutto, che $\dfrac{\sin x}{x}$ *è integrabile in* $[1,\infty)$. Infatti, per ogni $L>1$,

$$\int_1^L\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_1^L\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^L-\int_1^L\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

L'integrale finale esiste dato che la funzione $\cos x/x^2$ è assolutamente integrabile in $[1,+\infty)$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

Quindi

$$\lim_{L\to+\infty}\int_1^L\frac{\sin x}{x}\,dx=-\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Mostriamo ora che $|\sin x|/x$ *non è integrabile in* $[1,\infty)$. Per $k\in\mathbb{N}$, consideriamo l'integrale di $|\sin x|/x$ in $[k\pi,(k+1)\pi]$. Per la monotonìa di $1/x$, vale la stima dal basso

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\ge\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin x\,dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\left[\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi)\right] = \frac{(-1)^k \cdot (-1)^k \cdot 2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Sommando su k, si ha

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Dato che la serie armonica è divergente, ne segue che il limite è divergente e quindi la funzione $|\sin x|/x$ non è integrabile in $(0, +\infty)$.

Integrali di Fresnel. Un altro esempio di integrali impropri sono dati dagli *integrali di Fresnel*, che emergono nella teoria della diffrazione della luce:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx.$$

Prendiamo in considerazione l'integrale di $\sin(x^2)$ in $[1, L]$. Utilizzando la sostituzione $t = x^2$ e integrando per parti,

$$\int_1^L \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{d}{dt}(-\cos t)\,dt$$

$$= -\frac{\cos\sqrt{L}}{2\sqrt{L}} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dx.$$

L'ultimo integrale è convergente in valore assoluto, dato che

$$\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e $1/t^{3/2}$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi, passando al limite per $L \to +\infty$, si deduce che la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile in $[1, +\infty)$, quindi anche in $[0, +\infty)$, e vale

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx.$$

Un fatto eclatante espresso da questo esempio è che *esistono funzioni $f = f(x)$ integrabili in senso improprio in $(0, \infty)$ che <u>non</u> sono infinitesime per $x \to +\infty$!* Nel caso in cui $f : [0, +\infty)$ abbia limite <u>diverso da 0</u> per $x \to +\infty$, la funzione non sarà mai integrabile in $(0, \infty)$.