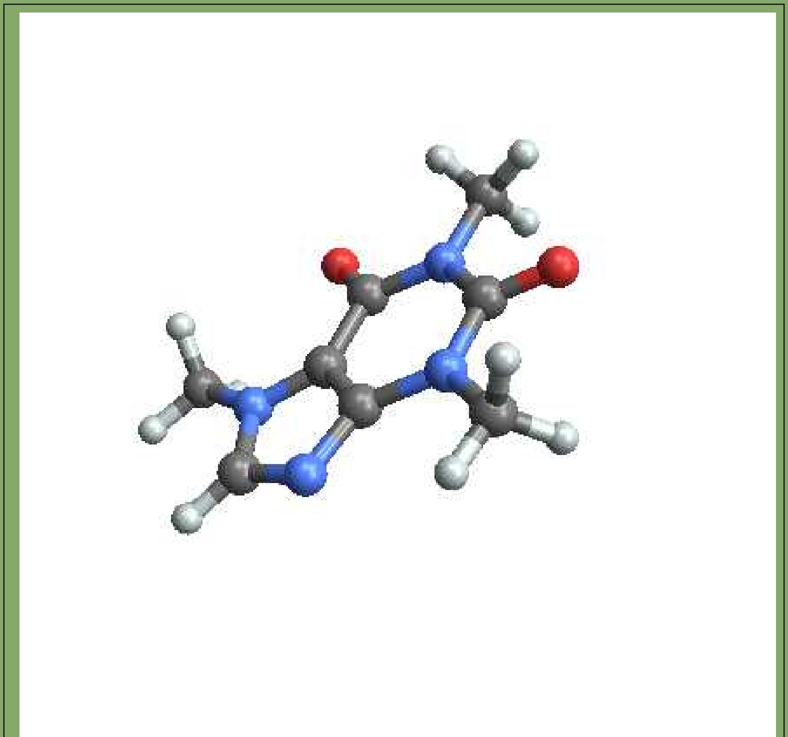
UNIVERSITÀ SAPIENZA

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Istituzioni di Matematica I
Esercizi



2017 - 2018

Il volume raccoglie parte
degli Esercizi
per i corsi di

Istituzioni di Matematica

Laurea in Chimica

tenuti negli anni accademici
2015-2016
2016-2017
2017-2018
dai colleghi
C.Cassisa , L.Lamberti, C.Mascia, V. Nesi,
L.Orsina, A.Terracina,

alla *Sapienza* di Roma

L'immagine
di copertina è stata prodotta da
Mathematica
con il comando
`ChemicalData["Caffeine", "MoleculePlot"]`
Dispense scritte in LaTeX

Ultima revisione:
10 settembre 2019

Indice

1

1. Numeri 1
2. Piano cartesiano 7
3. Vettori 11
4. Sistemi lineari e matrici 14
5. Geometria analitica in $\mathbb{R}^3$ 23
6. Esponenziali, logaritmi, goniometriche 26
7. I numeri complessi 31
8. Le successioni 37
9. La statistica 49
10. Calcolo combinatorio 53
11. La probabilita 56
12. Catene di Markov 65
13. Limiti di funzioni 68
14. Continuità 76
15. Le derivate 81
16. I teoremi del calcolo 105
17. Le funzioni convesse 109
18. Il teorema di Cauchy e la regola di Hopital 111
19. Programmazione lineare 115
20. I polinomi di Taylor 118
21. Modelli analitici fondamentali 127
22. Integrazione 130
23. Metodi di Integrazione 136
24. Integrali impropri 145
25. Le Serie 148
26. Equazioni differenziali di primo ordine 152
27. Equazioni differenziali di secondo ordine 154

Indice analitico 159

1. Numeri

ESERCIZIO : 1.1. *Provare per induzione che* $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$.

Soluzione:

La formula proposta nell'esercizio contiene un parametro $n \in \mathbb{N}$: si tratta quindi di una famiglia (infinita) di formule

- quella per $n=0$,
- quella per $n=1$,
- ecc. ecc.

Provare la validitá di tutte tali formule *per induzione* significa:

- provare che la prima, quella per $n=0$, è vera,
- provare che se è vera la formula per un ***qualsiasi*** grado n è, di conseguenza, vera anche quella per il grado $n+1$ successivo.

Il *meccanismo dell'induzione* conduce quindi ovviamente a che

- essendo vera la prima formula è vera anche la seconda,
- essendo vera la seconda formula è vera anche la terza,
- ecc. ecc.

fino a riconoscere che sono sicuramente vere tutte:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1=(n+1)^2+2n+3=[(n+1)+1]^2.$$

ESERCIZIO : 1.2. *Usando il postulato di Archimede*[1] *verificare che per ogni* $x>0$ *esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $0<1/n<x$.

[1] Vedi http://nsa.mateweb.eu/eudosso_archimede.html

Soluzione:

Essendo $x > 0$
$$0 < \frac{1}{n} < x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < n$$
La seconda disuguaglianza equivale al fatto che $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente.

ESERCIZIO : 1.3. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ provare che*

- *$n^2 - n$ è divisibile per 2,*
- *$n^3 - n$ è divisibile per 3.*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^4 - n$ è divisibile per 4 ?

Soluzione:

- $n^2 - n = n(n-1)$ si esprime come il prodotto di due numeri consecutivi, quindi prodotto di un numero pari per un numero dispari: prodotto quindi pari.
- $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)\,n\,(n+1)$ si esprime come prodotto di tre numeri consecutivi. Comunque si prendano tre numeri consecutivi uno di essi è multiplo di 3.
  Quindi tale prodotto è divisibile per 3.
- $n^4 - n$ non è sempre divisibile per 4, basta provare $n = 2 :\ n^4 - n = 14$ numero non divisibile per 4.

ESERCIZIO : 1.4. *Provare che per ogni naturale $n = 1, 2, \dots$ riesce*
$$2^n \geq 1 + n, \quad e \quad 2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.$$
Quale delle due disuguaglianze implica l'altra ?

Soluzione:

È noto che $\forall h > 0$ si ha $(1+h)^n > 1 + nh$, basta allora scegliere $h = 1$ per ottenere che
$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$$

La seconda disuguaglianza si può provare per induzione:

- per $n=1$ la disuguaglianza $2^1 \geq 1+1$ è vera,
- supponiamo che la $2^n \geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2}$ sia vera per n,
- proviamo che allora è di conseguenza vera per $n+1$

Verifichiamo direttamente il conto

$$2^{n+1} = 2\,.\,2^n \geq 2\left(1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right) = 2+2n+n(n-1) = 1+(n+1)+n^2$$

Tenuto conto che

$$\forall n \geq 1: \;\; n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

si ha

$$2^{n+1} \geq 1+(n+1)+\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$$

che è la disuguaglianza da riconoscere per l'ordine $n+1$.

La seconda disuguaglianza implica $\forall n > 1$ la prima:

$$2^n \geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad 2^n \geq 1+n$$

OSSERVAZIONE 1.1. *La seconda disuguaglianza si ottiene anche ricordando lo sviluppo del binomio*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

con coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Presi $a=1$ e $b=1$ si ottiene infatti

$$2^n = (1+1)^n = 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+1 \geq 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2} = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}$$

ESERCIZIO : 1.5. *Riconosciuto che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono irrazionali, provare che sono irrazionali anche*

$$2\sqrt{2},\; 1+\sqrt{3},\; \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Soluzione:

$$2\sqrt{2} = \frac{p}{q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} = \frac{p}{2q}$$

$$1+\sqrt{3} = \frac{p}{q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2=\left(\frac{p}{q}\right)^2+3-2\frac{p}{q}\sqrt{3}$$

da cui si ha

$$2\frac{p}{q}\sqrt{3}=\left(\frac{p}{q}\right)^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2+1}{2\frac{p}{q}}=\frac{p^2+q^2}{2pq}$$

ovvero si ricaverebbe la razionalità di $\sqrt{3}$, contro l'asserto che tale numero reale è irrazionale.

ESERCIZIO : 1.6. *Assegnati gli intervalli $A=[-3,5]$ e $B=[0,10]$ determinare il minimo e il massimo per $A\cup B$ e per $A\cap B$*

Soluzione:

$$\begin{aligned} A\cup B=[-3,\,10]: &\quad \min(A)=-3, \quad \max(A)=10 \\ A\cap B=[0,\,5]: &\quad \min(B)=0, \quad \max(B)=5 \end{aligned}$$

ESERCIZIO : 1.7. *Assegnati gli intervalli $A=[-3,5]$ e $B=[0,10]$ determinare il minimo e il massimo per $A\cup B$ e per $A\cap B$*

Soluzione:

$$\begin{aligned} A\cup B=[-3,\,10]: &\quad \min(A)=-3, \quad \max(A)=10 \\ A\cap B=[0,\,5]: &\quad \min(B)=0, \quad \max(B)=5 \end{aligned}$$

ESERCIZIO : 1.8. *Sia $E:=\{x\in\mathbb{R}:\ 1\leq|x|\leq 2\}$: determinare tre numeri x_1,x_2,x_3 due appartenenti ad E e uno non appartenente.*
Se $a,b\in E$ dove varia $\dfrac{a+b}{2}$?

Soluzione:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 \le |x| & : & (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \\ |x| \le 2 & : & [-2,2] \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad E = [-2,-1] \cup [1,2]$$

I punti $x_1 = -1.5,\ x_2 = 1.5$ appartengono ad E mentre il punto $x_3 = 3 \notin E$.

Presi due numeri a e b il numero $(a+b)/2$ è il punto medio:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a,b \in [-2,-1] & \rightarrow & \frac{a+b}{2} \in [-2,-1] \\ a,b \in [1,2] & \rightarrow & \frac{a+b}{2} \in [1,2] \end{array}\right.$$

Se invece $a \in [-2,-1]$, e $b \in [1,2]$ allora

$$-2+1 \le a+b \le -1+2 \quad \rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Da cui

$$\left\{\begin{array}{l} a \in E \\ b \in E \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \in [-2,-1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup [1,2]$$

ESERCIZIO : 1.9. *Determinare le soluzioni delle seguenti due disuguaglianze*

$$x - 2|x| + 2 > 0, \qquad \left\{\begin{array}{l} |x| \le 2 \\ |x-1| \le 1 \end{array}\right.$$

Soluzione:

Prima disuguaglianza:

$$x - 2|x| + 2 > 0 \rightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} x + 2x + 2 > 0 \\ x < 0 \end{array}\right.\right) \cup \left(\left\{\begin{array}{l} x - 2x + 2 > 0 \\ x > 0 \end{array}\right.\right)$$

$$x - 2|x| + 2 > 0 \rightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} 3x > -2 \\ x < 0 \end{array}\right.\right) \cup \left(\left\{\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 0 \end{array}\right.\right)$$

$$x - 2|x| + 2 > 0 \rightarrow x \in (-2/3,\, 0] \cup [0,\, 2)$$

Seconda disuguaglianza:

$$\left\{\begin{array}{l} |x| \le 2 \\ |x-1| \le 1 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -2 \le x \le 2 \\ 0 \le x \le 2 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad 0 \le x \le 2$$

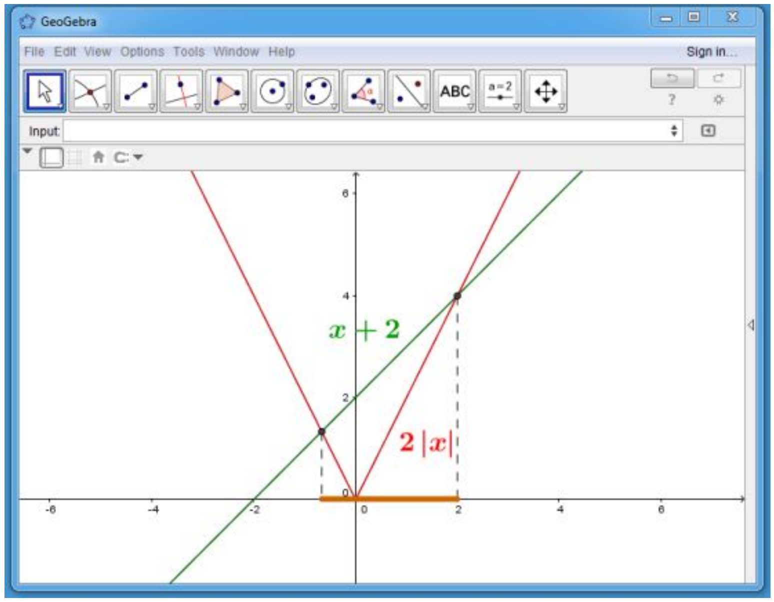


FIGURA 1. $x+2 > 2|x|$

ESERCIZIO : 1.10. *Per quali $x, y \in R$ vale la relazione $|x+y| = |x|+|y|$?*

Soluzione:

La relazione vale per

- $x \geq 0,\ y \geq 0,$
- $x \leq 0,\ y \leq 0.$

Mentre non vale se x ed y sono uno positivo e uno negativo: vedi, ad esempio

$$x = 2, \quad y = -1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |x+y| & = 1 \\ |x|+|y| & = 3 \end{cases}$$

2. Piano cartesiano

ESERCIZIO : 2.1. *Assegnati i punti del piano $A=(0,0)$, $B=(3,4)$, $C=(6,0)$:*

- *disegnare il triangolo T del piano da essi determinato,*
- *determinare il perimetro e l'area di T,*
- *determinare le equazioni delle tre rette cui appartengono i lati di T,*
- *determinare i tre semipiani la cui intersezione è il triangolo T.*

Soluzione:

Perimetro e area:

$$\overline{AB}=5, \quad \overline{AC}=6, \quad \overline{BC}=5, \quad \text{perimetro}=16, \quad \text{area}=\sqrt{8\times3\times2\times3}=12$$

L'area è stata dedotta dai lati e dal semiperimetro usando la formula di Erone, vedi
https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Erone

Rette dei lati:

$$y=0, \quad y=\frac{4}{3}x, \quad y=-\frac{4}{3}(x-6)$$

Semipiani la cui intersezione costituisce il triangolo:

$$(y\geq 0)\cap\left(y\leq\frac{4}{3}x\right)\cap\left(y\leq-\frac{4}{3}(x-6)\right)$$

ESERCIZIO : 2.2. *Determinare il dominio del piano determinato dalle limitazioni*

$$|x|<2,\ |y|<3,\ |x|+|y|<4.$$

Soluzione:

Le prime due limitazioni

$$|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2, \qquad |y|<3 \Leftrightarrow -3<y<3$$

determinano il rettangolo

$$[-2,\,2]\times[-3,\,3]$$

La terza limitazione, simmetrica rispetto ai due assi, determina il quadrato di vertici

$$(4,0), \quad (0,4), \quad (-4,0), \quad (0,-4)$$

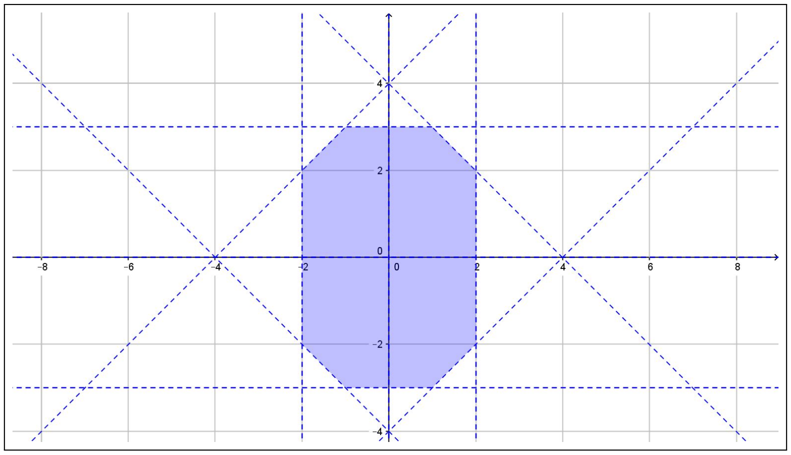


FIGURA 2. $|x| < 2,\ |y| < 3,\ |x| + |y| < 4.$

Il dominio definito dalle tre limitazioni è pertanto l'intersezione del rettangolo e del quadrato: l'ottagono (non regolare) di vertici

$$(2,2), \quad (1,3), \quad (-1,3), \quad (-2,2), \quad (-2,-2), \quad (-1,-3), \quad (1,-3), \quad (2,-2)$$

ESERCIZIO : 2.3. *Determinare i domini di definizione delle funzioni:*

$$\sqrt{9-(x+1)^2-(y-2)^2}, \quad \log(1-|x|-|y|), \quad e^{3x^2-2y^2}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

Soluzione:

$$\left\{ \begin{array}{l|l|l} \sqrt{9-(x+1)^2-(y-2)^2} & 9-(x+1)^2-(y-2)^2 \geq 0 & (x+1)^2+(y-2)^2 \leq 9 \\ \log(1-|x|-|y|) & 1-|x|-|y| > 0 & |x|+|y| < 1 \\ e^{3x^2-2y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \\ \frac{1}{x^2+y^2-1} & x^2+y^2 \neq 1 & \end{array} \right.$$

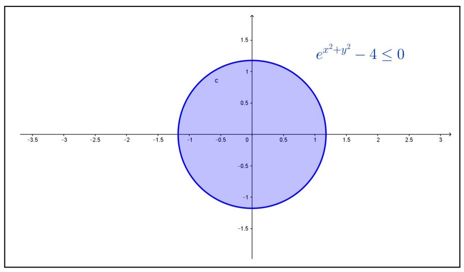
Un cerchio di centro $(-1,2)$ e raggio 3 inclusa la circonferenza che lo delimita per la prima funzione, un quadrato di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ esclusi i lati per la seconda, tutto il piano per la terza e il piano privato della circonferenza di centro l'origine e raggio 1 per la quarta.

ESERCIZIO : 2.4. *Posto $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 4$ determinare*

- *l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza $f(x,y) \leq 0$,*
- *l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza $|f(x,y)| \leq 2$,*

- *la linea di livello $f(x,y) = e - 4$.*

Soluzione:



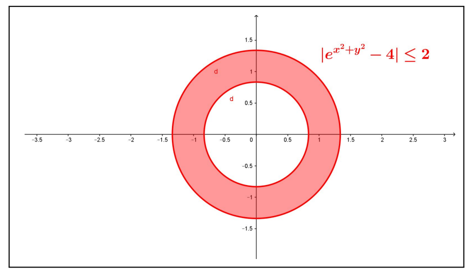


FIGURA 3. $f(x,y) \leq 0$, $|f(x,y)| \leq 2$

$$f(x,y) \leq 0 \quad \to \quad e^{x^2+y^2} \leq 4 \quad \to \quad x^2+y^2 \leq \log(4) \approx 1,38$$

$$|f(x,y)| \leq 2 \quad \to \quad -2 \leq e^{x^2+y^2} - 4 \leq 2 \quad \to \quad 2 \leq e^{x^2+y^2} \leq 6 \quad \to \quad \log(2) \leq x^2+y^2 \leq \log(6)$$

$$f(x,y) = e - 4 \quad \to \quad e^{x^2+y^2} = e \quad \to \quad x^2+y^2 = 1$$

ESERCIZIO : 2.5. *Assegnato l'insieme del piano $A := \left\{(x,y) |\ 9x^2+4y^2 \leq 36\right\}$*

- *esaminare se A è contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = 6$,*
- *determinare un cerchio di centro l'origine che sia interamente contenuto in A,*
- *determinare la distanza massima che possono avere due punti P e Q appartenenti ad A.*

Soluzione:

Tenuto conto che

$$4(x^2+y^2) \leq 9x^2+4y^2$$

riesce di conseguenza

$$(x,y) \in A \quad \to \quad x^2+y^2 \leq \frac{36}{4} = 9$$

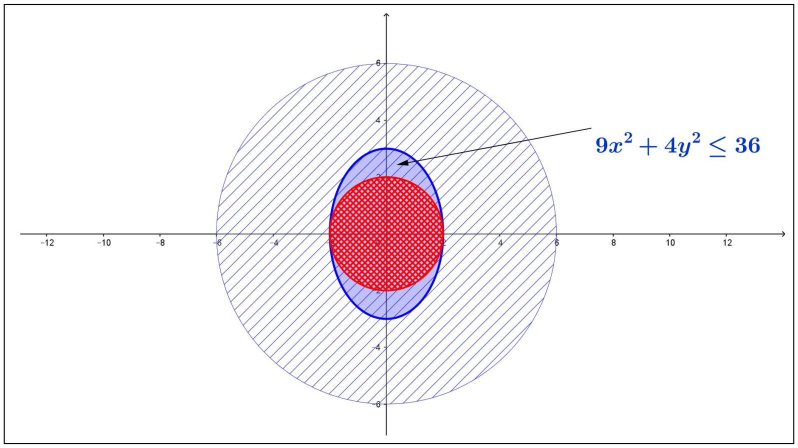


FIGURA 4. $A := \left\{(x,y) |\ 9x^2 + 4y^2 \leq 36\right\}$

ovvero detto C il cerchio di centro l'origine e raggio $r = 3$, $\quad x^2 + y^2 \leq 9$ si ha

$$P \in A \quad \to \quad P \in C, \qquad A \subset C$$

Analogamente si ha

$$9x^2 + 4y^2 \leq 9(x^2 + y^2)$$

da cui

$$x^2 + y^2 \leq \frac{36}{9} = 4 \quad \to \quad 9(x^2 + y^2) \leq 36 \quad \to \quad 9x^2 + 4y^2 \leq 36$$

In altri termini l'insieme A assegnato contiene il cerchio di centro l'origine e raggio $r_1 = 2$ ed è contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $r_2 = 3$.

Ricordando un minimo di geometria analitica si riconosce che l'insieme A è racchiuso dall'ellisse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, ellisse di semiassi 2 e 3.

3. Vettori

ESERCIZIO : 3.1. *Assegnati i due vettori $u = (1,2)$ e $v = (3,-5)$ determinare:*

- *i versori ad essi associati,*
- *l'angolo da essi formato,*
- *α e β tali che $\alpha u + \beta v$ sia ortogonale a v.*

Soluzione:

I versori u_0, v_0 associati si ottengono dividendo u e v per le loro norme

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{1+4}}(1,2), \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{9+25}}(3,-5)$$

da cui

$$u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad v_0 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$$

L'angolo tra u e v (o lo stesso tra u_0 e v_0) si ricava dal prodotto scalare

$$(u,v) = \|u\|\,\|v\|\cos(\theta) \quad \to \quad \cos(\theta) = \frac{-7}{\sqrt{5}\sqrt{34}}$$

$$\cos(\theta) \approx -0,537 \quad \to \quad \theta \approx 2,137$$

che, pensato in gradi, rappresenta l'angolo ottuso di circa $122°$

La costruzione di un vettore $\alpha u + \beta v$ ortogonale a v conduce alla condizione

$$(\alpha u + \beta v, v) = 0 \quad \to \quad \alpha(u,v) + \beta(v,v) = 0 \quad \to \quad -7\alpha + 34\beta = 0$$

condizione certo soddisfatta da infinite coppie, tra le quali, ad esempio

$$\alpha = 34, \qquad \beta = 7$$

.

ESERCIZIO : 3.2. *Assegnati i due vettori $u = (1,2)$ e $v = (3,4)$ determinare:*

- *un terzo vettore w tale che $u + v + w = 0$*
- *l'area del triangolo di lati u, v e w,*
- *l'area del triangolo di lati $2u$, $2v$ e $2w$.*

Soluzione:

$$u + v + w = 0 \quad \to \quad w = -(u+v) = -(4,6)$$

Il triangolo ha vertici $(0,0), (1,2), (3,4)$ la nota formula dell'area è

$$Area = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = 1$$

L'altro triangolo, misure raddoppiate, avrà area *quadruplicata*, e quindi area 4.

ESERCIZIO : 3.3. *Assegnati tre vettori* $u = (6, -4, 2)$, $v = (2, -6, 10)$, $w = (8, -10, 12)$ *esaminare:*

- *se sono linearmente indipendenti,*
- *se determinano un triangolo rettangolo.*

Soluzione:

Per decidere se sono linearmente indipendenti basta calcolare il determinante della matrice da essi formata

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -4 & -6 & 2 \\ 8 & -10 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

da cui segue che *sono linearmente dipendenti*.

Per decidere se il triangolo di vertici $u = (6, -4, 2)$, $v = (2, -6, 10)$, $w = (8, -10, 12)$ sia rettangolo basta controllare l'identità di Pitagora

$$\|v-w\|^2 = 56, \quad \|v-u\|^2 = 84, \quad \|u-w\|^2 = 140 \quad \to \quad \|v-w\|^2 + \|v-u\|^2 = \|u-w\|^2$$

che riconosce che il triangolo è rettangolo.

Era altrettanto possibile verificare l'ortogonalità dei due lati $u - v$ e $v - w$.

ESERCIZIO : 3.4. *Assegnati tre vettori*

$$v_1 = (9, 12, 20), \quad v_2 = (15, 36, 52), \quad v_3 = (24, 45, 68)$$

- *costruire i tre vettori*

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \frac{(u_1, v_2)}{\|u_1\|^2} u_1, \quad u_3 = v_3 - \frac{(u_1, v_3)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{(u_2, v_3)}{\|u_2\|^2} u_2$$

- *verificare che i tre nuovi vettori* u_1, u_2, u_3 *sono ortogonali tra loro,*
- *verificare che* $\mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\}$

Soluzione:

$$\begin{cases} u_1 = \{9, 12, 20\} \\ u_2 = \left\{-\frac{5088}{625}, \frac{3216}{625}, \frac{72}{125}\right\} \\ u_3 = \left\{\frac{12}{101}, \frac{21}{101}, -\frac{18}{101}\right\} \end{cases}$$

$$(u_1, u_2) = (u_1, u_3) = (u_2, u_3) = 0$$

Tenuto conto che

$$u_1 \in \mathscr{L}\{v_1\}, \quad u_2 \in \mathscr{L}\{v_1, v_2\}, \quad u_3 \in \mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\}$$

ne segue che

$$\mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\}$$

Tenuto conto inoltre che

$$\begin{array}{l} v_1 \in \mathscr{L}\{u_1\} \subset \mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\} \\ v_2 \in \mathscr{L}\{u_1, u_2\} \subset \mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\} \\ v_3 \in \mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\} \end{array}$$

riesce anche

$$\mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\}$$

dalle due inclusioni osservate la coincidenza

$$\mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathscr{L}\{u_1, u_2, u_3\}$$

(vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Ortogonalizzazione_di_Gram-Schmidt)

4. Sistemi lineari e matrici

ESERCIZIO : 4.1. *Sia A la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

e siano $u = (1,0)$ e $v = (1,1)$ due vettori assegnati:

- *calcolare l'area del parallelogramma determinato dai due vettori u e v,*
- *calcolare i due vettori $A\,u$ e $A\,v$, e calcolare l'area del parallelogramma da essi determinato,*
- *calcolare il determinante di A.*

Soluzione:

Il parallelogramma formato da u e da v, base 1 e altezza 1, ha ovviamente area $\mathscr{A}_1 = 1$.

I trasformati sono

$$A\,u = (1,1), \quad A\,v = (3,-3)$$

si tratta di due vettori ortogonali fra loro, quindi il parallelogramma che essi determinano è un rettangolo di lati

$$\|A\,u\| = \sqrt{2}, \quad \|A\,v\| = 3\sqrt{2}$$

e quindi di area $\mathscr{A}_2 = 6$.

Si ha $\det(A) = -6$: non è un caso che

$$\mathscr{A}_2 = |\det(A)|\;\mathscr{A}_1$$

ESERCIZIO : 4.2. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{pmatrix},$$

Calcolare

- $\det(A)$
- $\det(B)$
- $\det(A\,B)$

Soluzione:

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \det(A\,.\,B) = -23$$

.... non è un caso: è il teorema di Binet,

$$\det(A\,.\,B) = \det(A)\,.\,\det(B).$$

ESERCIZIO : 4.3. *Sia A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -14 \end{pmatrix}$$

provare che per ogni vettore $b \in \mathbb{R}^3$ esiste ed è unico $u \in \mathbb{R}^3$ tale che $A\,u = b$.

Soluzione:

L'esercizio equivale a riconoscere che il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x+2y-3z & = b_1 \\ 3x-y+5z & = b_2 \\ 4x+y-14z & = b_3 \end{cases}$$

ha soluzione qualunque siano i termini noti (b_1, b_2, b_3).

Il teorema di Cramer stabilisce che tale risolubilità è garantita se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero.

Questo effettivamente accade

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -14 \end{vmatrix} = 112 \neq 0$$

ESERCIZIO : 4.4. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

Calcolare

- *le matrici inverse A^{-1} e B^{-1}*
- *la matrice prodotto $C = A\,B$*
- *la matrice prodotto $D = B^{-1}\,A^{-1}$*
- *le matrici prodotto $C\,D,\ \ D\,C$.*

Soluzione:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad A^{-1}\quad=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}\quad=\quad\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&5\\3&4\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad B^{-1}\quad=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}4&-5\\-3&2\end{pmatrix}\quad=\quad\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}4&-5\\-3&2\end{pmatrix}$$

$$C=A\,.\,B=\begin{pmatrix}5&9\\18&31\end{pmatrix}\qquad D=B^{-1}\,.\,A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{31}{7}&\frac{9}{7}\\\frac{18}{7}&-\frac{5}{7}\end{pmatrix}$$

$$C\,.\,D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad D\,.\,C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ESERCIZIO : 4.5. *Sia*

$$A=\begin{pmatrix}37&13\\42&53\end{pmatrix}$$

calcolare il determinante della matrice A^{-1}.

Soluzione:

Si ha

$$\det(A)=1415\neq 0$$

Quindi esiste la matrice inversa A^{-1} e, per il teorema di Binet

$$1=\det(A\,.\,A^{-1})=\det(A)\,.\,\det(A^{-1})\quad\rightarrow\quad\det(A^{-1})=\frac{1}{1415}$$

ESERCIZIO : 4.6. *Determinare con le formule di Cramer il valore della seconda incognita, y nel sistema*

$$\begin{cases}x+2y+3z&=10\\x+4y+9z&=10\\x+8y+27z&=10\end{cases}$$

Soluzione:

Dette A_1,A_2,A_3 le colonne della matrice A dei coefficienti e B la colonna dei termini noti le formule di Cramer producono

$$y=\frac{\det(\{A_1,B,A_3\})}{\det(\{A_1,A_2,A_3\})}=\frac{\begin{vmatrix}1&10&3\\1&10&9\\1&10&27\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{vmatrix}}=\frac{10\begin{vmatrix}1&1&3\\1&1&9\\1&1&27\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{vmatrix}}=0$$

avendo osservato che il determinante a numeratore è sicuramente nullo per via delle due colonne uguali.

ESERCIZIO : 4.7. *Determinare una matrice che trasformi il quadrato di estremi* $(0,0)$ *e* $(2,2)$ *nel parallelogramma di vertici* $(0,0)$, $(3,0)$, $(5,2)$, $(2,2)$.

Soluzione: Indichiamo con $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la generica matrice e imponiamo le condizioni

$$(2.0) \to (3,0) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2c \end{pmatrix} \quad \to \quad a = 3/2,\ c = 0$$

$$(0,2) \to (2,2) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 2d \end{pmatrix} \quad \to \quad b = 1,\ d = 1$$

La matrice trovata

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trasforma *necessariamente* anche il vertice $(2,2)$ del quadrato in $(5,2)$.

ESERCIZIO : 4.8. *Determinare tre matrici diverse che abbiano tutte e tre i due autovalori* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = 5$.

Soluzione: Una matrice che abbia tali autovalori è certamente la matrice diagonale

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

essi sono le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$.

Le matrici $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ che abbiano gli stessi autovalori devono avere un'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

con $a + d = 8$ e $ad - bc = 15$: possibili scelte sono, ad esempio

$$\begin{cases} a = 10 & d = -2 & b = -1 & c = 35 \\ a = 10 & d = -2 & b = 35 & c = -1 \end{cases}$$

$$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 35 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{C} = \begin{pmatrix} 10 & 35 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO : 4.9. *Assegnate le due matrici diagonali*

$$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare le figure del piano in cui le due matrici trasformano il cerchio di centro l'origine e raggio 1*, e le loro aree.*

Soluzione: Le due matrici, entrambe diagonali, deformano le figure con dilatazioni secondo le direzioni dei due assi:

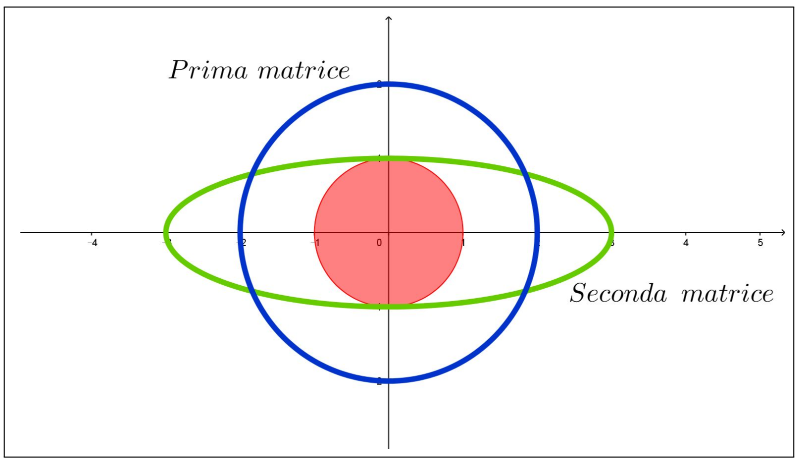


FIGURA 5. Trasformare un cerchio con due matrici diagonali

- la prima esegue il raddoppio nella direzione x e un raddoppio e un ribaltamento secondo la direzione y, la figura trasformata è ancora un cerchio di centro l'origine ma di raggio 2, quindi l'area è quadruplicata,
- la seconda triplica nella direzione dell'asse x ed esegue un semplice ribaltamento secondo la direzione y, la figura trasformata è un'ellisse di semiasse x 3 e semiasse y 1, l'area è triplicata.

Si ricordi infatti che il determinante della matrice rappresenta il fattore di trasformazione delle aree.

ESERCIZIO : 4.10. *Assegnata la matrice a determinante nullo*

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

calcolare, servendosi del Teorema di Hamilton-Cayley le matrici $A^2,\ A^3, \dots A^5$.

Soluzione: Il teorema di Hamilton-Cayley afferma che la ogni matrice soddisfa la sua stessa equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

equazione che nel caso della matrice assegnata si riduce a

$$A^2 = 10A$$

La relazione ottenuta implica anche

$$A^3 = 10A^2 = 10^2A, \qquad A^4 = 10A^3 = 10^2A^2 = 10^3A, \quad \dots$$

Si capisce quindi che in generale

$$A^k = 10^{k-1}A$$

ESERCIZIO : 4.11. *Sia A una matrice 3×3 assegnata e sia A^T la sua trasposta: riconoscere che $C = A + A^T$ è una matrice simmetrica.*

Soluzione:

Siano, ad esempio $a_{2,3}$ e $a_{3,2}$ gli elementi di A rispettivamente nella seconda riga e terza colonna e nella terza riga e seconda colonna.

Viceversa gli stessi numeri $a_{3,2}$ e $a_{2,3}$ sono gli elementi di A^T rispettivamente nella seconda riga e terza colonna e nella terza riga e seconda colonna.

Pertanto detti $c_{i,j}$ gli elementi di $C = A + A^T$ riesce

$$c_{2,3} = a_{2,3} + a_{3,2}, \quad c_{3,2} = a_{3,2} + a_{2,3}$$

da cui si riconosce la simmetria

$$c_{2,3} = c_{3,2}$$

Ragionamento analogo per ogni altro elemento $c_{i,j}$.

ESERCIZIO : 4.12. *Sia A la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e siano $u = (1,2)$ e $v = (3,-1)$ due vettori assegnati:

- *calcolare il prodotto scalare $(A\,u,\,v)$*
- *calcolare il prodotto scalare $(u,\,A^T\,v)$*
- *calcolare la differenza $(A\,u,\,v) - (u,\,A^T\,v)$*

Ovviamente A^T è la matrice trasposta di A.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$\begin{cases} A\,u & = (11,11) & \to & (A\,u, v) & = (11,11).(3,-1) & = 22 \\ A^T\,v & = (0,11) & \to & (u, A^T\,v) & = (1,2).(0,11) & = 22 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 4.13. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- *calcolare le matrici prodotto $A\,B$ e $A\,C$*
- *calcolare la matrice prodotto $A\,D$*

Soluzione:

$$A\,.\,B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A\,.\,C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A\,.\,D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alcune sorprese:

- $A\,.\,B = A\,.\,C$ eppure $A \neq 0,\ B \neq C$, quindi per il prodotto di matrici non vale in generale la semplificazione usuale
$$\rho \neq 0,\ \rho a = \rho b \quad \to \quad a = b$$
- $A \neq 0,\ D \neq 0$ eppure $A\,.\,D = 0$, quindi per il prodotto di matrici non vale in generale la conclusione usuale
$$a\,b = 0 \quad \to \quad a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0$$

Certo la matrice A qualche difetto ce l'ha: il determinante nullo....

ESERCIZIO : 4.14. *Sia A la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- *determinare gli autovalori di A,*
- *determinare i corrispondenti autovettori.*

Soluzione:

L'equazione caratteristica determina gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = & -3 \\ \lambda_2 = & 3 \end{cases}$$

L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = -3$ è qualunque soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x+5y & = -3x \\ x-2y & = -3y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x+5y & = 0 \\ x+y & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad t(1,-1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ è qualunque soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x+5y & = 3x \\ x-2y & = 3y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -x+5y & = 0 \\ x-5y & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad t(5,1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

I due autovettori $(1,-1)$, $(5,1)$ sono linearmente indipendenti, quindi la matrice A è diagonalizzabile.

ESERCIZIO : 4.15. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare

- *gli autovalori di A,*
- *i corrispondenti autovettori,*
- *riconoscere che gli autovettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.*

Soluzione:

Gli autovalori di A sono le radici dell'equazione caratteristica

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante con la regola di Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4-\lambda & 0 & 1 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & -2 & 1-\lambda \\ -2 & 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \end{array}\right. = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = & 1 \\ \lambda_2 = & 2 \\ \lambda_3 = & 3 \end{cases}$$

Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} 4x+0y+1z & = x \\ -2x+1y+0z & = y \\ -2x+0y+1z & = z \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+0y+1z & = 2x \\ -2x+1y+0z & = 2y \\ -2x+0y+1z & = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+0y+1z & = 3x \\ -2x+1y+0z & = 3y \\ -2x+0y+1z & = 3z \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 3x+z &= 0 \\ -2x &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+z &= 0 \\ -2x-y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z &= 0 \\ -2x-2y &= 0 \end{cases}$$

Gli autovettori, cioè le soluzioni dei tre sistemi sono rispettivamente

$$t(0,1,0), \quad t(1,-2,-2), \quad t(1,-1,-1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

I vettori $(0,1,0), \quad (1,-2,-2), \quad (1,-1,-1)$ sono linearmente indipendenti: basta infatti osservare che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

per concludere, in base alle formule di Cramer che l'unica combinazione lineare che dia il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli.

5. Geometria analitica in $\mathbb{R}^3$

ESERCIZIO : 5.1. *Assegnati i due vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1,2,3)$ e $v = (4,5,6)$*

- *determinare il prodotto vettoriale $c = u \wedge v$*
- *scrivere l'equazione del piano p per $P_0 = (0,0,0)$ ortogonale a c,*
- *scrivere le equazioni parametriche della retta r per P_0 parallela a u.*
- *verificare che r è contenuta nel piano p*

Soluzione:

$$c = u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -3\,i + 6\,j - 3\,k = (-3,6,-3)$$

Il piano per $P_0 = (0,0,0)$ ha pertanto equazione

$$-3x + 6y - 3z = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + z = 0$$

Le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nell'equazione del piano le espressioni parametriche indicate

$$(-3t) - 2(6t) + (-3t) = 0$$

si riconosce che tutti i punti della retta hanno coordinate che soddisfano l'equazione del piano, ovvero che tutta la retta è contenuta nel piano.

OSSERVAZIONE 5.1. *Tenuto conto che il punto P_0 appartiene al piano e alla retta r, per concludere che la retta giacesse interamente nel piano sarebbe bastato trovare un altro punto della retta che appartenesse anch'egli al piano.*

ESERCIZIO : 5.2. *Calcolare il volume del parallelepipedo che ha un vertice in $O = (0,0,0)$ e gli altri tre vertici ad esso adiacenti nei punti*

$$A = (2,0,-1), \quad B = (1,3,1), \quad C = (1,1,2)$$

Calcolare inoltre le aree delle tre facce contenenti rispettivamente i punti

$$\{O,A,B\}, \quad \{O,A,C\}, \quad \{O,B,C\}$$

Soluzione:

Il volume del parallelepipedo determinato da tre vettori dello spazio corrisponde al significato geometrico del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Le aree delle tre facce corrispondono ai moduli dei prodotti vettoriali

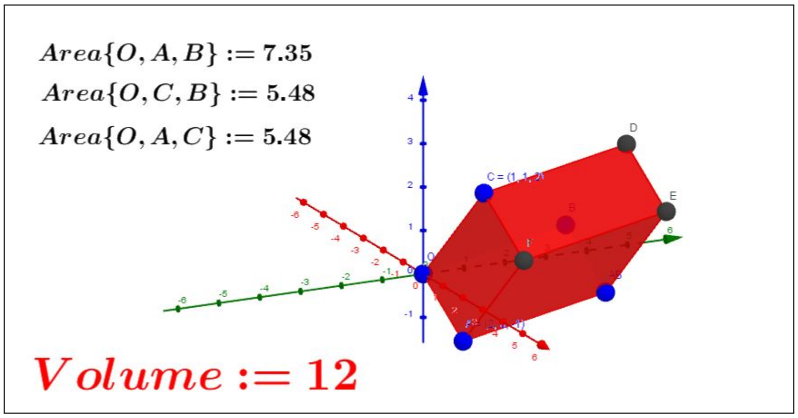


FIGURA 6. Parallelepipedo determinato da tre vettori

$$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right|, \quad \left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}\right|, \quad \left|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\right|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} & = & (3, -3, 6) & \to & \sqrt{54} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} & = & (1, -5, 2) & \to & \sqrt{30} \\ \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} & = & (5, -1, -2) & \to & \sqrt{30} \end{cases}$$

ESERCIZIO : 5.3. *Determinare i coefficienti a, b, c, d tali che il piano $ax + by + cz + d = 0$ passi per i punti $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,2)$, $C = (1,2,3)$.*

Soluzione:

Le coordinate dei tre punti assegnati devono soddisfare l'equazione del piano: da questo discende il sistema lineare di tre equazioni nelle quattro incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} 0a & +0b & +0c & +d & = 0 \\ 0a & +1b & +2c & +d & = 0 \\ 1a & +2b & +3c & +d & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} d & = 0 \\ b + 2c & = 0 \\ a + 2b + 3c & = 0 \end{cases}$$

Il sistema non determina i quattro numeri, i quali sono ovviamente determinati a meno di un fattore di proporzionalità : una quaterna soluzione è ad esempio

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1, \quad d = 0$$

Il piano è pertanto, cambiando (anche se non serve) tutti i segni,

$$x - 2y + z = 0$$

ESERCIZIO : 5.4. *Siano r_1 ed r_2 le rette di equazioni parametriche rispettivamente*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}s \\ y = 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \qquad \forall t,\, s \in \mathbb{R}$$

verificare che sono incidenti e determinare le coordinate del loro punto di intersezione.

Soluzione:

Dire che le due rette sono incidenti vuol dire che hanno un punto in comune: cioè esiste un t e un s tali che

$$\begin{cases} 1 + 2t &= -\frac{1}{2}s \\ 3 - t &= 2s \\ -t &= -1 + s \end{cases} \quad \to \quad t = -1, \quad s = 2$$

Il punto comune alle due rette è $(-1, 4, 1)$.

6. Esponenziali, logaritmi, goniometriche

ESERCIZIO : 6.1. *Si dica se le funzioni* $2^{-x}+3$, $\log_{10}(x^2+2)$ *sono iniettive e, in caso, si determinino le loro funzioni inverse.*

Soluzione:

La prima funzione $f(x) = 2^{-x}+3$ è monotona strettamente decrescente, quindi è iniettiva.

L'equazione

$$2^{-x}+3 = h \;\Leftrightarrow\; 2^{-x} = h-3$$

ha soluzione se $h-3>0$ cioè se $h>3$.

$$2^{-x} = h-3 \;\Leftrightarrow\; \log(2^{-x}) = \log(h-3) \;\Leftrightarrow\; -x\log(2) = \log(h-3)$$

da cui l'espressione dell'inversa:

$$\forall h>3: \; f^{-1}: \; h \mapsto -\frac{\log(h-3)}{\log(2)}$$

Verifichiamo, ad esempio,

$$f: 1 \mapsto \frac{1}{2}+3 = \frac{7}{2}, \qquad f^{-1}: \; \frac{7}{2} \mapsto -\frac{\log(7/2-3)}{\log(2)} = 1$$

La seconda funzione $g(x) = \log_{10}(x^2+2)$, per via di quel quadrato x^2 non è iniettiva: è evidente che, ad esempio, $g(-1) = \log_{10}(1+2) = g(1)$.

ESERCIZIO : 6.2. *Detta* $f(x) = \log_{10}(x)+1$, *disegnare il grafico delle* $f(x)$, $f(x)^+$, $|f(x)|$, *essendo* $f(x)^+$ *la parte positiva di* $f(x)$.

Soluzione:

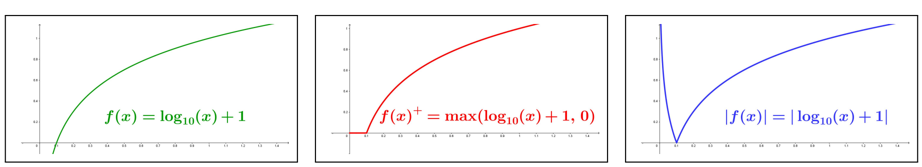


FIGURA 7. $f(x) = \log_{10}(x)+1$, $f(x)^+$, $|f(x)|$

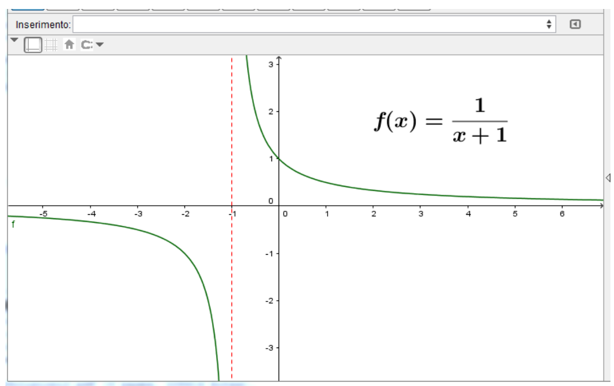
ESERCIZIO : 6.3. *Per ciascuna delle seguenti funzioni*

$$a(x) := \frac{1}{x+1}\,,\ b(x) := \sqrt{4-x},\ c(x) := |x| - x,\ d(x) := \cos(2x)\,,\ f(x) := \min\{0, \cos x\}\,,$$

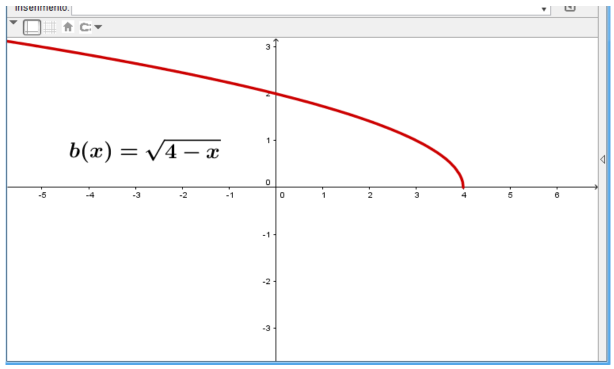
- *determinare il dominio di definizione;*
- *disegnarne approssimativamente il grafico;*
- *dire se si tratta di funzione periodica.*

Soluzione:

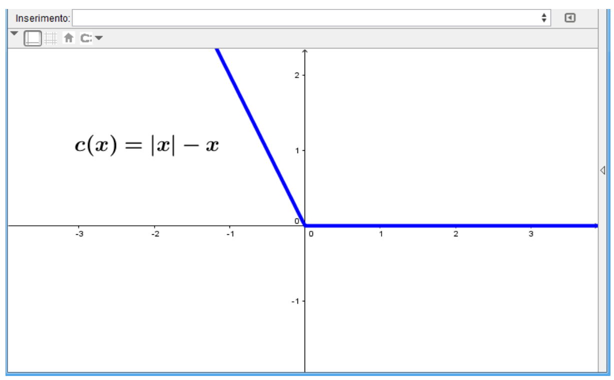
(1) $a(x) := \frac{1}{x+1}, \quad D = \{x \neq -1\}$, non periodica:



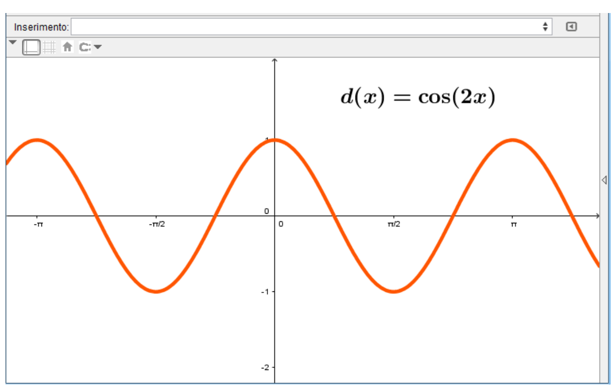
(2) $b(x) := \sqrt{4-x}, \quad D = \{x \leq 4\}$, non periodica :



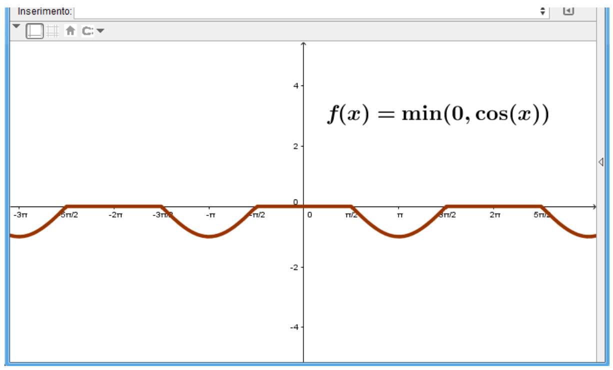
(3) $c(x) := |x| - x, \quad D = \mathbb{R}$, non periodica



(4) $d(x) := \cos(2x), \quad D = \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = \pi$



(5) $f(x) := \min\{0, \cos x\}, \quad D = \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$



ESERCIZIO : 6.4. *Determinare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti*

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}, \qquad \frac{10^x}{2\cos x - 1}, \quad \frac{10^x}{\cos x - 2}$$

$$\frac{1}{|x+6|\sqrt{x^2+2x-15}}, \quad \sin(\pi x^2), \quad \tan(\pi x^2)$$

Soluzione: L'insieme di definizione della funzione f è l'insieme dei numeri sui quali il calcolo $f(x)$ è eseguibile: così, ad esempio, se $f(x)$ include frazioni l'insieme di definizione non dovrá contenere alcun numero sul quale qualcuno dei denominatori presenti si annulli.

Analogamente se $f(x)$ include radici quadrate l'insieme di definizione non dovrá contenere alcun numero sul quale qualcuno dei radicandi sia negativo.

$\dfrac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}$	$\to x^4-5x^2+4 \neq 0$	$\to (x \neq \pm 2) \cap (x \neq \pm 1)$
$\dfrac{10^x}{2\cos x-1}$	$\to 2\cos x - 1 \neq 0$	$\to x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\, k = 0, \pm 1, , ...$
$\dfrac{10^x}{\cos x-2}$	$\to \cos x - 2 \neq 0$	$\to x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\lvert x+6\rvert\sqrt{x^2+2x-15}}$	$\to \lvert x+6\rvert\sqrt{x^2+2x-15} \neq 0$	$\to (x \neq -6) \cap \{(x \leq -5) \cup (x \geq 3)\}$
$\sin(\pi x^2)$	$\to x \in \mathbb{R}$	
$\tan(\pi x^2)$	$\to x^2 \neq \frac{2k+1}{2}$	$\to x \neq \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}}, k = 0, 1, 2, ...$

7. I numeri complessi

ESERCIZIO : 7.1. *Assegnati i numeri complessi*
$z_1 = \log(3) + i\pi/4$ *e* $z_2 = -\log(3) + i\pi/4$,

- *disegnare sul piano* z_1 *e* z_2,
- *determinare i numeri complessi* $w_1 = e^{z_1}$, $w_2 = e^{z_2}$
- *determinare moduli e argomenti di* w_1 *e* w_2,

Soluzione:

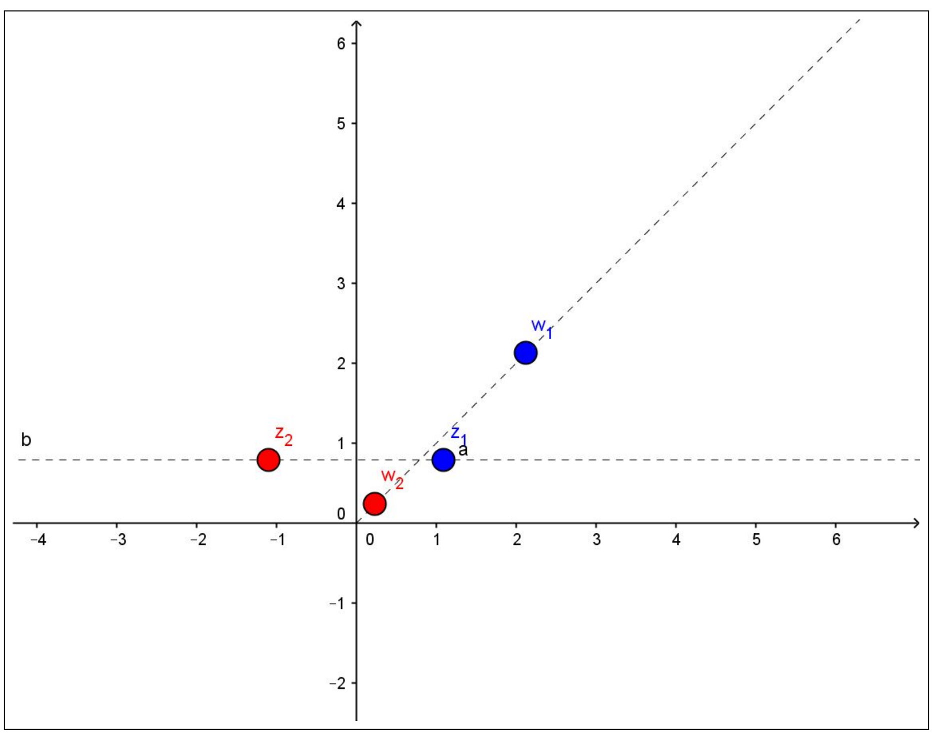


FIGURA 8. $z_1 = \log(3) + i\pi/4$, $z_2 = -\log(3) + i\pi/4$, $w_1 = e^{z_1}$, $w_2 = e^{z_2}$

$$
\begin{array}{llll}
w_1 & = e^{\log(3)+i\pi/4} & = 3\,e^{i\pi/4} & = 3\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\
w_2 & = e^{-\log(3)+i\pi/4} & = 1/3\,e^{i\pi/4} & = 1/3\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\
|w_1| & = 3, & |w_2| & = 1/3 \\
arg(w_1) & = arg(w_2) & = \pi/4 &
\end{array}
$$

ESERCIZIO : 7.2. *Assegnati i due numeri complessi*
$z_1 = 4+3i$ *e* $z_2 = -3+4i$

- *disegnarli sul piano,*
- *determinare i loro moduli* $|z_1|,\ |z_2|$
- *disegnare i loro coniugati* $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$
- *determinare* $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ 1/z_2,\ z_1/z_2$ *e disegnare sul piano i risultati ottenuti.*

Soluzione:

I due numeri z_1 e z_2 sono assegnati in *forma cartesiana*, la forma piú adatta ad eseguire somme e sottrazioni.

Per eseguire moltiplicazioni e divisioni è quasi sempre vantaggiosa la *forma polare* che si serve di *modulo* e di *argomento*.

La forma polare è particolarmente vantaggiosa se scritta con la notazione esponenziale

$$z = |z|\,e^{i\arg(z)}$$

Naturalmente si passa da una forma all'altra con semplici operazioni goniometriche

$$4+3i = 5\,e^{i\arg(4+3i)}, \quad -3+4i = 5\,e^{i\arg(-3+4i)}$$

$$\begin{cases} 4+3i+(-3+4i) & = & 1+7i \\ 4+3i-(-3+4i) & = & 7-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4+3i).(-3+4i) & = & -24+7i \\ \dfrac{1}{-3+4i} & = & \dfrac{-3-4i}{5} \\ \dfrac{4+3i}{-3+4i} = \dfrac{(4+3i)(-3-4i)}{5} & = & -5i \end{cases}$$

$$\begin{cases} |4+3i| & = & \sqrt{4^2+3^2} = 5 \\ |-3+4i| & = & \sqrt{3^2+4^2} = 5 \\ \overline{4+3i} & = & 4-3i \\ \overline{-3+4i} & = & -3-4i \end{cases}$$

ESERCIZIO : 7.3. *Assegnata la successione di punti del piano*

$$\left\{ P_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right),\ n = 1,2,\dots \right\}$$

- *esaminare se costituisca un insieme limitato del piano,*
- *determinare il suo limite,*
- *detti z_n i numeri complessi* $\quad z_n = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n+1}{n} i \quad$ *determinare il* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Soluzione:

Un insieme E del piano $\mathbb{R}^2$ è limitato se i due insiemi X delle coordinate x dei punti di E e l'insieme Y delle coordinate y dei punti di E sono limitati in $\mathbb{R}$: nel nostro caso

$$X = \left\{ x = \tfrac{n}{n+1}, \quad n = 1,2,\dots \right\} \quad \to \quad 0 < x < 1,$$

$$Y = \left\{ y = \tfrac{n+1}{n}, \quad n = 1,2,\dots \right\} \quad \to \quad 0 < x \leq 2$$

quindi l'insieme $E = \left\{ P_n = \left(\dfrac{n}{n+1}, \dfrac{n+1}{n} \right),\ n = 1,2,\dots \right\}$ è limitato.

Se $P_n = (x_n, y_n)$ allora

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

è quindi evidente che

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (1,1)$$

Se $z_n = x_n + i\,y_n$ allora

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\,b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

quindi, in conseguenza di quanto giá osservato sopra,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 + i$$

ESERCIZIO : 7.4. *Siano $w_1 = 16$, $w_2 = -16$, $w_3 = 81\,i$: determinare, e disegnare sul piano complesso, tutte le soluzioni z delle equazioni*

$$z^2 = w_i, \quad z^3 = w_i, \quad z^4 = w_i, \qquad i = 1,2,3$$

(ovvero determinare le radici quadrate, terze e quarte dei numeri complessi w_i $i = 1,2,3$ assegnati)

Soluzione:

Le radici $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$, si disegnano facilmente:

- sono n numeri complessi distinti,
- hanno come modulo la radice $n-$esima (aritmetica positiva) del modulo di z,
- hanno come argomenti gli argomenti di z divisi per n (se ne creano n distinti),
- costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati.

$$\boxed{z = |z|\, e^{i(\vartheta + 2k\pi)} \qquad \to \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}}$$

$$\boxed{z^2 = 2^4, \quad z^3 = 2^4, \quad z^4 = 2^4}$$

$$\sqrt{16} = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases} \qquad \sqrt[3]{16} = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}e^{0i} & = \quad 2\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(0+2\pi/3)\,i} & = \quad 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(0+4\pi/3)\,i} & = \quad 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \qquad \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2 \\ 2i \\ -2 \\ -2i \end{cases}$$

$$\boxed{z^2 = -2^4, \quad z^3 = -2^4, \quad z^4 = -2^4}$$

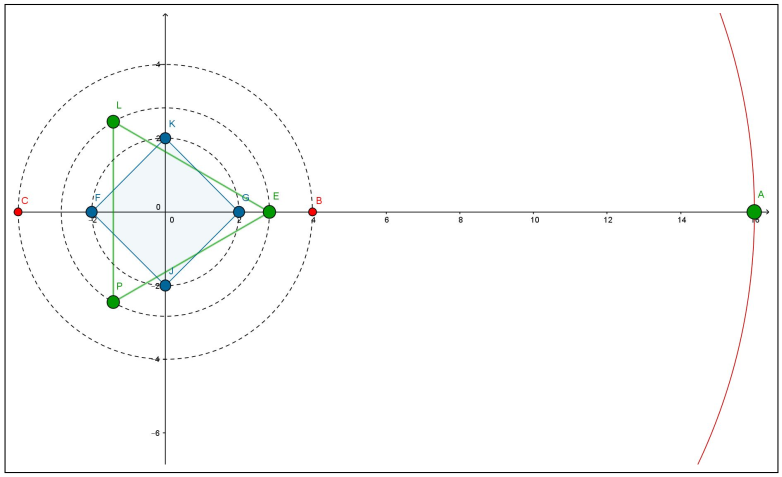


FIGURA 9. $z^2 = 2^4, \quad z^3 = 2^4, \quad z^4 = 2^4$

$$\sqrt{-16} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases} \quad \sqrt[3]{-16} = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3)\,i} & = & 2\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3+2\pi/3)\,i} & = & -2\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3+4\pi/3)\,i} & = & 2\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\,e^{(\pi/4)\,i} & = & (1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+2\,\pi/4)\,i} & = & (-1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+4\,\pi/4)\,i} & = & (-1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+6\,\pi/4)\,i} & = & (-1-i)\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\boxed{z^2 = 3^4\,i, \quad z^3 = 3^4\,i, \quad z^4 = 3^4\,i}$$

$$\sqrt{3^4\,i} = \begin{cases} 3^2 e^{i\,pi/4} & = & 9\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ 3^2 e^{i\,(pi/4+2\pi/2)} & = & 9\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad \sqrt[3]{3^4\,i} = \begin{cases} 3\,\sqrt[3]{3}e^{i\,\pi/6} & = & 3\,\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ 3\,\sqrt[3]{3}e^{i(\,\pi/6+2\pi/3)} & = & 3\,\sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ 3\,\sqrt[3]{3}e^{i(\,\pi/6+4\pi/3)} & = & 3\,\sqrt[3]{3}\,(-i) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{3^4\, i}\begin{cases} 3\,e^{i\pi/8} & = \quad 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i(\pi/8+2\pi/4)} & = \quad 3\left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i(\pi/8+4\pi/4)} & = \quad 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i(\pi/8+6\pi/4)} & = \quad 3\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \end{cases}$$

8. Le successioni

ESERCIZIO : 8.1. *Mostrare* **usando la definizione** *la validità di*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n}=0,$$

Soluzione:

L'esercizio richiede di provare che comunque si prenda $\varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che

$$\left|\frac{n+2}{n^2+3n}-0\right|<\varepsilon$$

per tutti gli $n > n_\varepsilon$.

Studiamo per quali n è soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{n+2}{n^2+3n}<\varepsilon$$

Ci sono due strade:

- quella algebrica standard $n+2<\varepsilon n^2+3\,\varepsilon\, n$,
- quella di valutare quanto sia grande il numero $\dfrac{n+2}{n^2+3n}$ tramite qualche sua evidente stima.

La prima strada conduce alla disuguaglianza

$$\varepsilon n^2+(3\,\varepsilon-1\,)n-2>0 \quad\to\quad n>\frac{1-3\varepsilon+\sqrt{(1-3\varepsilon)^2+8\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

La parte intera della frazione a destra fornisce il valore soglia n_ε cercato.

La seconda strada si basa sulla catena di evidenti disuguaglianze seguenti

$$\frac{n+2}{n^2+3n}<\frac{n+2}{n^2}<\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}$$

dalla quale è evidente che

$$\frac{3}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}<n$$

e quindi anche

$$n>\frac{1}{\varepsilon}\quad\to\quad\frac{n+2}{n^2+3n}<\varepsilon$$

OSSERVAZIONE 8.1. *Si noti come nella definizione di limite si chieda l'esistenza di*

"un n_ε"

intendendo ovviamente che se c'è una soglia utile saranno utili anche tutte quelle maggiori....

Nell'esercizio considerato probabilmente la soglia ottenuta con la prima strada è più bassa di quella indicata nella seconda.

Un problema che si potrebbe ulteriormente considerare potrebbe essere quello di determinare per ogni $\varepsilon > 0$ la soglia n_ε più bassa, la migliore...

ESERCIZIO : 8.2. *(impegnativo) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:*

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{{a_n}^2}{4}$$

(1) *Verificare che $\forall n > 1 : \; a_n \geq 1$;*
(2) *dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} - a_n \geq 0$ (cioè che la successione è crescente) ;*
(3) *dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \leq 2$;*
(4) *controllare che se esiste il limite di a_n e vale ℓ, allora $\ell = 1 + \ell^2/4$;*
(5) *calcolare il limite di a_n.*

Soluzione:

Verificare che $\forall n > 1 : \; a_n \geq 1$

è ovvio dal momento che i termini della successione si esprimono con

$$a_{n+1} = 1 + \frac{{a_n}^2}{4}$$

somme di 1 più un quadrato, quindi 1 più un addendo non negativo.

$\forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} - a_n \geq 0$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{a_n^2}{4} - 2\,\frac{a_n}{2} = \left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2$$

Quindi $a_{n+1} - a_n$ coincide con un quadrato, quindi è non negativo.

$\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \leq 2$

è evidente che

$$a_n \leq 2 \quad \to \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \leq 1 + 1 = 2$$

Quindi dal momento che $a_1 \leq 2$ ne segue che

$$a_2 \leq 2, \quad a_3 \leq 2, \quad a_4 \leq 2, \ldots$$

$\boxed{\ell = 1 + \ell^2/4}$

Aver accertato che la successione a_n è crescente e limitata implica che sia convergente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \ell^2, \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n^2}{4}\right) = 1+\ell^2/4$$

Da cui non puó che essere

$$\ell = 1 + \frac{\ell^2}{4}$$

$\boxed{\text{Calcolare il limite di } a_n}$

La relazione $\ell = 1 + \dfrac{\ell^2}{4}$ osservata implica

$$\ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \quad \to \quad \ell = 2$$

ESERCIZIO : 8.3. *Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:*

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot a_n + 1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Soluzione:

La prima successione prodotto $n \cdot a_n$ puó non avere limite: ad esempio se $a_n = (-1)^n$ la successione prodotto diventa

$$-1, \quad 2, \quad -3, \quad 4, \ldots$$

La seconda successione è necessariamente convergente a 0: infatti se $|a_n| \leq M$ si ha

$$0 \leq \left|\frac{n\cdot a_n + 1}{n^2+2}\right| \leq \frac{M\cdot n + 1}{n^2+2}$$

con il terzo membro convergente a zero.

La terza successione, quoziente $\frac{n^3}{a_n}$ puó non avere limite: ad esempio se $a_n = (-1)^n$ la successione quoziente diventa

$$-1, \quad 2^3, \quad -3^3, \quad 4^3, \ldots$$

ESERCIZIO : 8.4. *Siano* $a_n = \dfrac{\cos(n^2)}{1+n^2}$, $\quad b_n = (-1)^n(n^2-n)$, $\quad c_n = n - \sqrt{1+n^2}$ *dire se esistono i limiti e calcolarli.*

Soluzione:

$$\boxed{a_n = \frac{\cos(n^2)}{1+n^2}} \qquad |a_n| \le \frac{1}{1+n^2} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2)}{1+n^2} = 0$$

$$\boxed{b_n = (-1)^n(n^2-n)} \qquad \lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} (n^2-n) = +\infty$$

Quindi b_n non è limitata, quindi non è convergente.

Per via dell'alternanza del segno, il fattore $(-1)^n$, la successione b_n non è nè divergente positivamente nè divergente negativamente: b_n non è regolare.

$\boxed{c_n = n - \sqrt{1+n^2}} \qquad |c_n| = \left| \dfrac{(n-\sqrt{1+n^2})(n+\sqrt{1+n^2})}{n+\sqrt{1+n^2}} \right| = \dfrac{1}{n+\sqrt{1+n^2}} \le \dfrac{1}{n}$ disuguaglianza che prova che

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

ESERCIZIO : 8.5. *Dire se le successioni:* $a_n = 3^n + n$, $b_n = 2^{-n} - 3$, $c_n = n^2 - 5n$ *sono monotone e calcolarne il limite.*

Soluzione:

$\boxed{a_n = 3^n + n}$ $\quad a_n$ somma di due successioni 3^n e n entrambe crescenti è di conseguenza crescente.

Osservato che $a_n \ge n$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

$\boxed{b_n = 2^{-n} - 3}$ $\quad b_n$ somma di due successioni 2^{-n} e -3 entrambe decrescenti è di conseguenza decrescente.

Osservato che $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -3$$

$$\boxed{c_n = n^2 - 5n} \qquad n^2 - 5n = n(n-5): \ \forall n > 5 : n(n-5) \ge n$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

ESERCIZIO : 8.6. *Dire se le successioni:* $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, $b_n = |n - n^2|$, $c_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ *sono limitate e calcolarne il limite.*

Soluzione:

$\boxed{a_n = \dfrac{2^n}{n}}$ Si noti[2] che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\right)\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 2\,\dfrac{n}{n+1}$

Tenuto conto che $\forall n > 1 : \dfrac{n}{n+1} \geq \dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{4}{3}$ da cui

$$\forall n > 1 : a_{n+1} \geq \frac{4}{3} a_n \quad \rightarrow \quad a_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a_2$$

Tenuto conto che essendo $\dfrac{4}{3} > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a_2 = +\infty$$

si ha di conseguenza anche

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$$

La tabella seguente illustra i primi valori coinvolti nella successionme studiata:

n	2^n	n	$\frac{2^n}{n}$
1	2	1	2.0000
2	4	2	2.0000
3	8	3	2.6667
4	16	4	4.0000
5	32	5	6.4000
6	64	6	10.667
7	128	7	18.286
8	256	8	32.000
9	512	9	56.889
10	1024	10	102.40
11	2048	11	186.18
12	4096	12	341.33
13	8192	13	630.15
14	16384	14	1170.3
15	32768	15	2184.5

[2] Vedi Lamberti, Mascia *Dispense*, Corollario 2.6, pag.58

Si vede bene che sia il numeratore che il denominatore aumentano al crescere di n ma il numeratore 2^n cresce molto più del denominatore.

$\boxed{b_n = |n - n^2|}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq 0 \quad \rightarrow \quad b_n = n^2 - n = n(n-1)$ da cui

$$\forall n > 1 : b_n \geq n \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

$\boxed{c_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}}$ $\quad \forall n \geq 1 : \; \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$

Tenuto conto che $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}+1) = +\infty \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

La c_n, la terza delle tre successioni assegnate è l'unica limitata.

ESERCIZIO : 8.7. *Siano* $a_n = \dfrac{n^4+n^2+n}{1+2n^4}$, $\qquad b_n = 2^n - n, \qquad c_n = \dfrac{n}{\log_{10}(n)}$ *dire se esistono i limiti e calcolarli.*

Soluzione:

$\boxed{a_n = \dfrac{n^4+n^2+n}{1+2n^4}}$ $\quad a_n = \dfrac{1+1/n^2+1/n^3}{1/n^4+2}$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+1/n^2+1/n^3\right) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1/n^4+2\right) = 2$$

si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+n}{1+2n^4} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{b_n = 2^n - n}$ $\quad b_n = 2^n\left(1 - \dfrac{n}{2^n}\right) = 2^n\left(1 - \dfrac{1}{\frac{2^n}{n}}\right) \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$\boxed{c_n = \dfrac{n}{\log_{10}(n)}}$ $\quad \forall n\, \exists m : \; 10^{m-1} \leq n \leq 10^m \Leftrightarrow m-1 \leq \log_{10} n \leq m$ ne segue che

$$\frac{10^{m-1}}{m} \leq \frac{n}{\log_{10}(n)} \leq \frac{10^m}{m-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{10}\left(\frac{10^m}{m}\right) \leq \frac{n}{\log_{10}(n)} \leq 10\left(\frac{10^{m-1}}{m-1}\right)$$

Tenuto conto che $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{10^m}{m}\right) = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_{10}(n)} = +\infty$$

La tabella seguente illustra i primi valori coinvolti nella successionme studiata:

n	$\log_{10}(n)$	$\frac{n}{\log_{10}(n)}$
2	0.30103	6.6439
3	0.47712	6.2877
4	0.60206	6.6439
5	0.69897	7.1534
6	0.77815	7.7106
7	0.84510	8.2831
8	0.90309	8.8585
9	0.95424	9.4316
10	1.0000	10.000
11	1.0414	10.563
12	1.0792	11.120
13	1.1139	11.670
14	1.1461	12.215
15	1.1761	12.754

$\boxed{b_n = 2^n - n}$ $\quad b_n = 2^n\left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 2^n\left(1 - \frac{1}{2^n/n}\right)$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n/n = +\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n/n}\right) = 1$$

ne segue

$$\lim_{n\to\infty}(2^n - n) = +\infty$$

ESERCIZIO : 8.8. *Sia a_n una successione convergente al numero reale L. Fare un esempio di un caso in cui $1/a_n$ non tende ad $1/L$.*

Soluzione:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} a_n = L\right\} \text{ AND } \{L \neq 0\} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$$

Quindi l'unica possibilità è quella di $L = 0$.

Esempi:

- $\{a_n = 1/n\}$ la successione $\{1/a_n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ diverge a $+\infty$,
- $\{a_n = (-1)^n/n\}$ la successione $\{1/a_n\} = \{-1, 2, -3, 4, \dots\}$ non è neanche regolare.

ESERCIZIO : 8.9. *Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} na_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n+1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Soluzione:

Sia $\forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \leq M$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}}$$

$$\left|\frac{a_n}{n+1}\right| \leq M\frac{1}{n+1} \quad \to \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_n}$$

L'ipotesi $\{a_n\}$ limitata non consente di prevedere nulla sulla $\{n\,a_n\}$:

- se ad esempio fosse $a_n = (-1)^n$ la successione $\{n\,a_n\}$ sarebbe non regolare,
- se ad esempio fosse $a_n = 1/n$ la successione $\{n\,a_n\}$, fatta di tutti 1 sarebbe convergente a 1
- se ad esempio fosse $a_n = 1/n^2$ la successione $\{n\,a_n\}$ sarebbe convergente a zero.
- ecc. ecc.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,a_n+1}{n^2+2}}$$

$$\left|\frac{n\,a_n+1}{n^2+2}\right| \leq \left(\frac{|a_n|}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq \left(\frac{M}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,a_n+1}{n^2+2} = 0$$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}}$

$$\left|\frac{n^3}{a_n}\right| > \frac{n^3}{M}$$

disuguaglianza che implica che $\left\{\left|\frac{n^3}{a_n}\right|\right\}$ è divergente.

ESERCIZIO : 8.10. *Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A\,n + B$. Per quali scelte di A e B, la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna?*

Soluzione:

La monotonia, ovviamente crescente, significa

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2 + A\,n + B \leq (n+1)^2 + A(n+1) + B$$

Si vede che la traslazione $+B$ è ininfluente. Resta il controllo su A

$$n^2 + An \leq n^2 + 2n + 1 + An + A \Leftrightarrow 0 \leq 2n + 1 + A$$

disuguaglianza soddisfatta per $A \geq -1$.

La successione è del resto *definitivamente crescente* qualunque siano A e B: basta pensare al grafico delle parabole $y = x^2 + Ax + B$, grafico definitivamente in salita a destra dell'ascissa del vertice.

ESERCIZIO : 8.11. *Consideriamo la successione definita per ricorrenza:*

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n:$$

- *dire se è crescente,*
- *dire se è limitata,*
- *fornire un'espressione esplicita degli a_n come funzioni di n.*

Soluzione:

- è evidente che la successione è crescente infatti $a_{n+1} = a_n + n \quad \rightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n$,
- è evidente che non è limitata infatti:
  - gli a_n sono positivi ($a_0 = 1 > 0, \quad a_n > 0 \quad \rightarrow \quad a_{n+1} > 0$)
  - $a_{n+1} = a_n + n \quad \rightarrow \quad a_{n+1} \geq n$

  Quindi, essendo $\{a_n\}$ crescente e non limitata è certamente divergente positivamente.

- $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1+1,\ a_3 = 1+1+2,\ a_4 = 1+1+2+3, \dots$

$$\rightarrow \quad a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Essendo ben nota la formula della somma dei naturali da 1 a m

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$

si ha

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

ESERCIZIO : 8.12. *(impegnativo) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:*

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

i. *dimostrare che la successione è a termini positivi;*
ii. *mostrare che la successione è monotona decrescente;*
iii. *calcolare il limite di a_n per $n \to \infty$.*

Soluzione:

- Il primo termine $a_0 = 2$ è maggiore di $\sqrt{2}$: inoltre

$$a_n > \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a_{n+1} > \sqrt{2}$$

Infatti

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0$$

- La successione $\{a_n\}$ è decrescente: infatti $\sqrt{2} < a_1 < a_0$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < a_n \Leftrightarrow \frac{2}{a_n} < a_n \Leftrightarrow 2 < a_n^2$$

- La successione $\{a_n\}$ **limitata e decrescente** è quindi convergente: detto ℓ il suo limite devono riuscire soddisfatte le seguenti proprietà
  - $a_n \geq \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \ell \geq \sqrt{2}$
  - $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$

da cui

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \quad \to \quad \frac{2}{\ell} = \ell \quad \to \quad \ell^2 = 2$$

Sapendo del resto che $\ell \geq \sqrt{2}$ si deduce che

$$\ell = \sqrt{2}$$

ESERCIZIO : 8.13. *(impegnativo) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:*

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2\,a_n + 1.$$

i. *Dimostrare per induzione che la successione è a termini positivi ed è strettamente crescente;*
ii. *dimostrare che la successione a_n è divergente;*
iii. *determinare la forma esplicita di a_n.*

Soluzione:

- La successione è formata da tutti numeri positivi; infatti $a_1 = 1$ è positivo e, se a_n è positivo allora $a_{n+1} = 2a_n + 1 > 1$ è anch'esso positivo.
  è inoltre evidente che, essendo tutti gli a_n positivi riesce anche
  $$a_{n+1} = 2a_n + 1 > a_n + 1 > a_n$$
  e quindi si tratta di una successione crescente.
- Riesce inoltre $a_n \geq n$ infatti $a_1 \geq 1$ e se $a_n \geq n$ allora $a_{n+1} = 2a_n + 1 \geq 2n + 1 > n + 1$, da cui per induzione è provato che $a_n \geq n$ e quindi che la successione $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty$.
- Consideriamo i primi termini
  $$\begin{array}{lll} a_1 & = 1 & = 1 \\ a_2 & = 2a_1 + 1 & = 2 + 1 \\ a_3 & = 2a_2 + 1 & = 2^2 + 2 + 1 \\ a_4 & = 2a_3 + 1 & = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ \dots & & \\ a_n & = 2a_{n-1} + 1 & = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \end{array}$$
  Per provare che la formula
  $$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$
  sia vera occorre dimostrarla per induzione:
  - per $n = 1$ la formula è giusta,

– se è vera per l'ordine n, cioè se $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ allora

$$a_{n+1} = 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} + 1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

che riconosce come la formula sia valida anche per l'ordine $n+1$ successivo.

Quindi la formula è vera per ogni n.

La formula può essere scritta in modo utile ricordando la nota espressione della somma

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

che nel caso $r = 2$ produce

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

ESERCIZIO : 8.14. *Dati α, β $\in \mathbb{R}$ e detta*

$$a_n = \frac{n^2 + \alpha \log(n)}{2^n + \beta n^2}$$

determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$ e esaminare se tale limite dipende dai valori α e β.

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^2 + \alpha \log(n)}{2^n + \beta n^2} = \frac{1 + \alpha \frac{\log(n)}{n^2}}{\frac{2^n}{n^2} + \beta}$$

è noto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$$

Ne segue pertanto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \alpha \log(n)}{2^n + \beta n^2} = 0$$

indipendentemente da quali siano i valori α e β assegnati.

9. La statistica

ESERCIZIO : 9.1. *Quattro gruppi di studenti, composti da 15, 20, 10 e 18 individui, hanno un'altezza media rispettivamente di 162, 148, 153 e 140 cm. Trovare l'altezza media di tutti gli studenti.*

Soluzione:

Il numero totale di studenti è ;

$$15+20+10+18=63$$

La somma delle altezze è

$$15\times 162+20\times 148+10\times 153+18\times 140=9440$$

L'altezza media è pertanto

$$h=\frac{9440}{63}\approx 149.84$$

ESERCIZIO : 9.2. *Assegnata la lista $a=\{15,14,2,27,13\}$ determinare: la media aritmetica, la mediana, la varianza, la deviazione standard.*

Soluzione:

Media aritmetica: $Av(a)=\frac{1}{5}(15+14+2+27+13)=14.2$

Per conoscere la mediana occorre ordinare i numeri della lista in modo crescente:

$$a=\{2,\ 13,\ 14,\ 15,\ 27\}$$

Risulta quindi mediana = 14.

La varianza rappresenta

$$\frac{1}{5}\left\{(15-14.2)^2+(14-14.2)^2+(2-14.2)^2+(27-14.2)^2+(13-14.2)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\{0.64+0.04+148.84+163.84+1.44\}=62.96$$

La deviazione standard è $\sigma=\sqrt{62.96}=7.93$

ESERCIZIO : 9.3. *Assegnata la lista $a = \{-1,-2,-3,-4,-5\}$ determinare il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ in cui la somma $D(x) = \sum_{1=1}^{5} |a_i - x|$ è minima e calcolare il valore di tale minimo.*

Soluzione:

$$D(x) = |-x-5| + |-x-4| + |-x-3| + |-x-2| + |-x-1|$$

Tenuto presente che

$$\begin{array}{rll} D(x) & = |-x-5| & +|-x-1| \\ & +|-x-4| & +|-x-2| \\ & +|-x-3| & \end{array}$$

Si osserva che

- la somma parziale prima riga è minima per $x \in [-5,-1]$ e vale 4 in tutto l'intervallo,
- la somma parziale seconda riga è minima per $x \in [-4,-2] \subset [-5,-1]$ e vale 2 in tutto l'intervallo,
- l'addendo della terza riga vale 0 per $x = -3$

Quindi la somma $D(x)$ ha minimo per $x = 3$ e tenuto conto che $3 \in [-4,-2] \subset [-5,-1]$ riesce

$$D(3) = 4+2+0 = 6$$

ESERCIZIO : 9.4. *Assegnata la lista $a = \{\, 0.6, 1.2, 0.9, 1.0, 0.6, 0.8 \,\}$ determinare: la media aritmetica $Av(a)$, la media dei quadrati $Av(a^2)$, la varianza, la deviazione standard.*

Soluzione:

$$\begin{cases} Av(a) & = \dfrac{1}{6}\{\, 0.6, 1.2, 0.9, 1.0, 0.6, 0.8 \,\} & = 0.85 \\ Av(a^2) & = \dfrac{1}{6}\{\, 0.6^2, 1.2^2, 0.9^2, 1.0^2, 0.6^2, 0.8^2 \,\} & = 0.768 \\ \text{var}(a) & = \text{Av}(a^2) - (\,\text{Av}(a))^2 = 0.768 - 0.722 & = 0.046 \\ \sigma(a) & = \sqrt{0.046} & = 0.214 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 9.5. *Assegnata la lista* $a := \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, 10 \right\}$ *determinare la media, le frequenze e, con una calcolatrice, la deviazione standard* $\sigma(a)$.

Soluzione:

$$a = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$Av(a) = \frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} \sin(n\pi/6) = \frac{1}{22}$$

Disponendo i valori della lista in ordine crescente

$$a = \left\{ -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$$

si leggono facilmente le frequenze e la mediana:

$$\begin{array}{l} f(-1) = f(-1/2) = f(1) = 1, \\ f(-\sqrt{3}/2) = f(0) = f(1/2) = f(-\sqrt{3}/2) = 2 \\ \text{mediana} = 0 \end{array}$$

La deviazione standard è , per definizione,

$$\sigma(a) = \sqrt{\frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} \left(\sin(n\pi/6) - \frac{1}{22} \right)^2} \approx 0.721569$$

ESERCIZIO : 9.6. *Verificare svolgendo i conti che per ogni* b_1, b_2 *e* b_3 *si ha la disuguaglianza di Jensen*

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + {b_3}^2}{3} \geq \left[\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right]^2$$

è vero che la disuguaglianza di Jensen è equivalente a dire che la varianza di $\{b_1, b_2, b_3\}$ *è non negativa?*

Soluzione:

La disuguaglianza proposta equivale alla

$$3(b_1^2 + b_2^2 + {b_3}^2) \geq (b_1 + b_2 + b_3)^2$$

che svolgendo il quadrato a secondo membro conduce a

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3{}^2 \geq b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3$$

La disuguaglianza è certamente vera tenuto conto che:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha\beta \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2$$

e quindi

$$\begin{array}{l} b_1\, b_2 \leq \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 \\ b_1\, b_3 \leq \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_3^2 \\ b_3\, b_2 \leq \frac{1}{2}b_3^2 + \frac{1}{2}b_2^2 \end{array}$$

da cui sommando si ottiene la

$$b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 \leq b_1^2 + b_2^2 + b_3{}^2$$

La disuguaglianza osservata equivale alla formula della varianza

$$0 \leq \mathrm{var}(\{b_1, b_2, b_3\}) = Av(\{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\}) - (Av(\{b_1, b_2, b_3\}))^2$$

ESERCIZIO : 9.7. *Assegnata la lista* $a = \{1,2,3,4,5\}$ *e detta* $V(x) = \sum_{1=1}^{5}(a_i - x)^2$ *scrivere esplicitamente il polinomio* $V(x)$ *e calcolarne il minimo al variare di* $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

$$V(x) = (x-5)^2 + (x-4)^2 + (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 = 5(11 - 6x + x^2)$$

Tenuto presente che

$$V(x) = 5(x-3)^2 + 10$$

assume il valore minimo 10 in $x_0 = 3$.

Si osservi che $x_0 = 3$ è la media aritmetica dei numeri della lista assegnata.

10. Calcolo combinatorio

ESERCIZIO : 10.1. *Siano $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ due insiemi assegnati:*

- *determinare tutti i sottinsiemi di A formati da due suoi elementi,*
- *determinare tutti i sottinsiemi di B formati da due suoi elementi,*
- *determinare l'insieme delle coppie (a,b) formabili con un elemento di A e uno di B.*

Soluzione: I sottinsiemi di A costituiti da due suoi elementi corrispondono, dato che A ha in tutto 3 elementi, a cancellare uno dei tre elementi e tenere gli altri due

$$\{a_1, a_2\}, \quad \{a_1 a_3\}, \quad \{a_2, a_3\}$$

I sottinsiemi di B formati da due suoi elementi possono formarsi scegliendo un primo elemento fra i 4 disponibili e aggiungendo ad esso un secondo preso tra i tre restanti

$$\begin{array}{lll} \{b_1, b_2\} & \{b_1, b_3\} & \{b_1, b_4\} \\ \{b_2, b_3\} & \{b_2, b_4\} & \\ \{b_3, b_4\} & & \end{array}$$

Si noti come nella seconda riga figurino due soli sottinsiemi invece di 3: non è infatti stato inserito il $\{b_2, b_1\}$ perchè già considerato nella riga precedente.

Analogamente per la terza riga in cui figura un solo sottinsieme.

Le coppie (a,b) sono ovviamente $3 \times 4 = 12$.

ESERCIZIO : 10.2. *Elencare le possibili sequenze di Testa o Croce ottenibili lanciando 3 volte una moneta, o 4 volte un dado.*

Soluzione: Il lancio di una moneta produce, ogni volta, uno dei due simboli

T (testa) o C (croce): le sequenze ottenibili sono pertanto

T	TT	TTT
		TTC
	TC	TCT
		TCC
C	CT	CTT
		CTC
	CC	CCT
		CCC

Le due possibilità al primo lancio diventano quattro possibilità al secondo e $8 = 2^3$ possibilità al terzo.

I quattro lanci del dado produrranno:

- 6 possibili risultati - $\{1,2,3,4,5,6\}$ - al primo lancio,
- 36 possibili sequenze -$\{(1,1),(1,2),\ldots(6,5),(6,6)\}$ - al secondo lancio
- ecc. ecc.

Le possibili sequenze di quattro numeri presi ognuno in $\{1,2,3,4,5,6\}$ saranno ovviamente $6^6 = 46656$.

ESERCIZIO : 10.3. *Determinare le sequenze ottenibili estraendo i primi 5 numeri dal sacchetto dei 90 numeri della Tombola (naturalmente senza reimbussolare i numeri che mano mano vengono estratti)*

Soluzione: Il primo dei 5 estratti è uno dei 90 numeri presenti nel sacchetto, il secondo è uno degli 89 rimasti, il terzo uno degli 88, il quarto uno degli 87 e il quinto uno degli 86 rimasti dopo l'estrazione dei primi quattro. Le sequenze possibili sono pertanto

$$90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 = 5273912160$$

numero che rappresenta le disposizioni di 90 oggetti 5 a 5:

$$D_{90,5} = 90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86$$

ESERCIZIO : 10.4. *Sia $A = \{a, b, c, d\}$:*

- *elencare tutti i sottinsiemi di A composti di 3 elementi,*
- *elencare tutti i sottinsiemi di A composti di 2 elementi.*

Soluzione:

I sottinsiemi composti di 3 elementi sono

$$\{a, b, c, \}, \quad \{a, b, d\}, \quad \{a, c, d\}, \quad \{b, c, d\}$$

quelli composti da 2 elementi sono... di più , per ognuno di tali sottinsiemi

- il primo elemento si può scegliere fra uno dei quattro disponibili in A
- il secondo fra uno dei tre rimasti,

$$\begin{array}{ccc} \{a,b\}, & \{a,c\}, & \{a,d\} \\ & \{b,c\}, & \{b,d\} \\ & & \{c,d\} \end{array}$$

Esistono quindi 6 sottinsiemi diversi:

ESERCIZIO : 10.5. *In quanti modi si possono dividere* 100 *studenti in* 4 *gruppi di* 30, 20, 35, 15 *studenti ciascuno ?*

Soluzione: Tenuta presente la formula delle combinazioni semplici $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ si riconosce che

- il primo gruppo si può formare in $\binom{100}{30} = \dfrac{100!}{30! \times 70!}$ modi,
- il secondo, 20 elementi fra i 70 rimasti, si può formare in $\binom{70}{20} = \dfrac{70!}{20! \times 50!}$ modi,
- il terzo, 35 elementi fra i 50 rimasti, si può formare in $\binom{50}{35} = \dfrac{50!}{35! \times 15!}$ modi,
- l'ultimo, ovviamente si fa in un solo modo, $\binom{15}{15} = 1$, coi 15 rimasti.

Tutti i possibili modi sono pertanto

$$\frac{100!}{30! \times 70!} \times \frac{70!}{20! \times 50!} \times \frac{50!}{35! \times 15!} \times 1 = \frac{100!}{30! \times 20! \times 35! \times 15!}$$

Si tratta di un numero mostruosamente grande, $\approx 10^{55}$.

11. La probabilita

ESERCIZIO : 11.1. *La probabilità che una molecola di massa m in un gas a temperatura T abbia velocità v è data dalla* **distribuzione**[3] **di Maxwell–Boltzmann**

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

dove k è la costante di Boltzmann. Trovare la velocità v_0 di massima probabilità.

Soluzione:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}} \left(\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right)^2}$$

Posto

$$b = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{b}, \quad x = \frac{v}{b}$$

riesce

$$f(x) = ax^2 e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$$

funzione crescente per $x \in [0,1]$ e decrescente per $x > 1$.
Il valore massimo si raggiunge pertanto nel punto stazionario $x_0 = 1$.

La velocità cha ha la probabilitá maggiore è pertanto $|v_0| = b$.

ESERCIZIO : 11.2. *Siano A, B, C tre sottinsiemi dello spazio $\mathscr{E}$ degli eventi prodotti da una certa causa, supponiamo che valgano le probabilità :*

$$p(A) = \frac{1}{2}, \quad p(B) = \frac{1}{3}, \quad p(C) = \frac{1}{4}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Supponiamo inoltre che che $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.
Determinare

$$p\Big[\mathscr{C}(A \cap B)\Big], \quad p\Big[A \cap \mathscr{C}(B)\Big], \quad p\Big[\mathscr{C}(A \cup B)\Big]$$

[3] https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_di_Maxwell-Boltzmann

$$p\left[\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)\right], \quad p\left(A\cup B\cup C\right)$$

Soluzione: Le risposte si ottengono tenendo presenti elementari proprietà insiemistiche e l'additività della probabilità su insiemi disgiunti.

Prima domanda:

$$p\left[\mathscr{C}(A\cap B)\right] = 1 - p(A\cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Seconda domanda:

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap\mathscr{C}(B)) = \quad \rightarrow \quad p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap\mathscr{C}(B)) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + p(A\cap\mathscr{C}(B)) \quad \rightarrow \quad p(A\cap\mathscr{C}(B)) = \frac{1}{3}$$

Terza domanda:

$$p\left[\mathscr{C}(A\cup B)\right] + p(A\cup B) = 1 \quad \rightarrow \quad p\left[\mathscr{C}(A\cup B)\right] = 1 - p(A\cup B)$$
$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad p\left[\mathscr{C}(A\cup B)\right] = \frac{1}{3}$$

Quarta domanda:

$$\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B) = \mathscr{C}(A\cup B) \quad \rightarrow \quad p\left[\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)\right] = \frac{1}{3}$$

Quinta domanda:

$$(A\cup B)\cap C = \emptyset \quad \rightarrow \quad p(A\cup B\cup C) = p(A\cup B) + p(C) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

ESERCIZIO : 11.3. *Una certa causa produca uno spazio $\mathscr{E}$ di 25 possibili equiprobabili risultati, sia A, B, C tre sottinsiemi di $\mathscr{E}$: saputo che valgono le seguenti numerosità*

$$N_A = 10,\ N_B = 15,\ N_C = 8,\ N_{A\cap B} = 5,\ N_{A\cap C} = 3,\ N_{B\cap C} = 5,\ N_{A\cap B\cap C} = 1$$

determinare le probabilità

$$p(A),\ p(A\cap\mathscr{C}B),\ p(\mathscr{C}A\cap B),\ p(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B),\ p(A\cup B\cup C),\ p(\mathscr{C}A)$$

Soluzione:

È ovvio che $N_A = 10 \quad \to \quad p(A) = \frac{10}{25}, \quad p(\mathscr{C}A) = \frac{15}{25}$

Osserrvato che

$$A = (A\cap B) \cup (A\cap\mathscr{C}B) \quad \to \quad p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap\mathscr{C}B)$$

da cui segue

$$\frac{10}{25} = \frac{5}{25} + p(A\cap\mathscr{C}B) \quad \to \quad p(A\cap\mathscr{C}B) = \frac{5}{25}$$

Analogamente

$$B = (B\cap\mathscr{C}A) \cup (B\cap A) \quad \to \quad \frac{15}{25} = p(B\cap\mathscr{C}A) + \frac{5}{25}$$

da cui segue

$$p(B\cap\mathscr{C}A) = \frac{10}{25}$$

Analogamente ancora

$$\mathscr{C}A = (\mathscr{C}A\cap B) \cup (\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B) \quad \to \quad \frac{15}{25} = \frac{10}{25} + p(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B)$$

da cui segue

$$p(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B) = \frac{5}{25}$$

Il calcolo della $p(A\cup B\cup C)$ è leggermente più complesso

$$p(A\cup B\cup C) = p(A\cup B) + p(C) - p((A\cup B)\cap C) = p(A\cup B) + p(C) - p((A\cap C)\cup(B\cap C))$$

ne segue

$$p(A\cup B\cup C) = \Big(p(A) + p(B) - p(A\cap B)\Big) + p(C) - \Big(p(A\cap C) + p(B\cap C) - p(A\cap B\cap C)\Big)$$

da cui

$$p(A\cup B\cup C) = \frac{10}{25} + \frac{15}{25} - p(A\cap B) + \frac{8}{25} - p(A\cap C) - p(B\cap C) + \frac{1}{25}$$

$$p(A\cup B\cup C) = \frac{34}{25} - p(A\cap B) - p(A\cap C) - p(B\cap C) = \frac{21}{25}$$

ESERCIZIO : 11.4. *Vengono lanciati contemporaneamente 5 dadi: calcolate la probabilit'a degli eventi elencati di seguito:*

(1) *tutti i dadi danno punteggi diversi fra loro,*
(2) *due dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri tre danno punteggi tutti diversi,*
(3) *tre dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri due danno due punteggi diversi,*
(4) *quattro dadi danno punteggi uguali fra loro e uno da un punteggio diverso,*
(5) *tutti i dadi danno lo stesso punteggio.*

Soluzione:

Il lancio dei 5 dadi (uguali) produce 5 numeri, ciascuno tra 1 e 6, anche con ripetizione: le combinazioni con ripetizione di 6 numeri 5 a 5 sono

$$CR_{6,5} = \binom{6+5-1}{5} = 252$$

Le cadute che presentano tutti numeri diversi sono le combinazioni semplici di 6 numeri presi 5 a 5

$$C_{6,5} = \binom{6}{5} = 6$$

La probabilità di ottenere 5 numeri tutti diversi è

$$p = \frac{6}{252} = \frac{1}{42} \approx 0,024$$

Le possibilità di vedere una coppia e tre numeri diversi $(a,a),(x,y,z)$ corrispondono al prodotto

$$6 \times \binom{5}{3} = 60$$

La probabilità di ottenere una coppia e tre numeri diversi è

$$p = \frac{60}{252} \approx 0,238$$

Le possibilità di vedere un tris e due numeri diversi $(a,a,a),(x,y)$ corrispondono al prodotto

$$6 \times \binom{5}{2} = 60$$

La probabilità di ottenere un tris e due numeri diversi è

$$p = \frac{60}{252} \approx 0,238$$

Le possibilità di vedere un "poker" e un numero diverso $(a,a,a,a),(x)$ corrispondono al prodotto

$$6 \times \binom{5}{1} = 30$$

La probabilità di ottenere un "poker" e un numero diverso è

$$p = \frac{30}{252} \approx 0,119$$

Le possibilità di vedere cinque numeri uguali (a,a,a,a,a) corrisponde alla scelta di a, un numero fra 6, 6 possibilità . La probabilità di ottenere cinque numeri uguali è

$$p = \frac{5}{252} \approx 0,020$$

ESERCIZIO : 11.5. *Un uomo ha un mazzo di n chiavi, una sola delle quali apre un porta.*
Egli prova le chiavi a caso ad una ad una, escludendo dal mazzo quelle già provate, finchè non trova la chiave giusta.
Determinare la probabilità che la chiave giusta si presenti al $k-$esimo tentativo

Soluzione: La probabilità di provare la chiave giusta al primo tentativo è ovviamente

$$p(1) = \frac{1}{n}$$

mentre la probabilità che la prima chiave scelta non sia quella giusta è $1 - p(1) = \dfrac{n-1}{n}$.

La probabilità di pescare la chiave giusta al secondo tentativo corrisponde ad aver sbagliato il primo tentativo, quello su n chiavi, ed aver indovinato il secondo, quello su $n-1$ chiavi

$$p(2) = \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

mentre la probabilità che anche il secondo tentativo sia andato male è $1 - p(2) = \dfrac{n-2}{n-1}$

Tenuto conto che dopo ogni errore il numero di chiavi da provare si riduce di 1 si ha che

$$p(k) = (1-p(1))\,(1-p(2))\,\ldots(1-p(k-1))$$

da cui

$$p(k) = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k}{n-k+1}\,\frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}$$

Le probabilità sono tutte uguali

$$p(1) = p(2) = \ldots p(n), \qquad \sum_{k=1}^{n} p(k) = 1$$

ESERCIZIO : 11.6. *Una certa causa produca uno spazio $\mathscr{E}$ di 25 possibili equiprobabili risultati, sia A, B, C tre sottinsiemi di $\mathscr{E}$: saputo che valgono le seguenti numerosità*

$$N_A = 10,\ N_B = 15,\ N_C = 8,\ N_{A\cap B} = 5,\ N_{A\cap C} = 3,\ N_{B\cap C} = 5,\ N_{A\cap B\cap C} = 1$$

determinare le probabilità

$$p(A),\ p(A\cap\mathscr{C}B),\ p(\mathscr{C}A\cap B),\ p(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B),\ p(A\cup B\cup C),\ p(\mathscr{C}A)$$

Soluzione:

È ovvio che $N_A = 10 \quad \rightarrow \quad p(A) = \frac{10}{25}, \quad p(\mathscr{C}A) = \frac{15}{25}$

Osserrvato che

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap\mathscr{C}B) \quad \rightarrow \quad p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap\mathscr{C}B)$$

da cui segue

$$\frac{10}{25} = \frac{5}{25} + p(A\cap\mathscr{C}B) \quad \rightarrow \quad p(A\cap\mathscr{C}B) = \frac{5}{25}$$

Analogamente

$$B = (B\cap\mathscr{C}A)\cup(B\cap A) \quad \rightarrow \quad \frac{15}{25} = p(B\cap\mathscr{C}A) + \frac{5}{25}$$

da cui segue

$$p(B\cap\mathscr{C}A) = \frac{10}{25}$$

Analogamente ancora

$$\mathscr{C}A = (\mathscr{C}A\cap B)\cup(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B) \quad \rightarrow \quad \frac{15}{25} = \frac{10}{25} + p(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B)$$

da cui segue

$$p(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B) = \frac{5}{25}$$

Il calcolo della $p(A\cup B\cup C)$ è leggermente più complesso

$$p(A\cup B\cup C) = p(A\cup B) + p(C) - p((A\cup B)\cap C) = p(A\cup B) + p(C) - p((A\cap C)\cup(B\cap C))$$

ne segue

$$p(A\cup B\cup C) = \Big(p(A) + p(B) - p(A\cap B)\Big) + p(C) - \Big(p(A\cap C) + p(B\cap C) - p(A\cap B\cap C)\Big)$$

da cui

$$p(A\cup B\cup C) = \frac{10}{25} + \frac{15}{25} - p(A\cap B) + \frac{8}{25} - p(A\cap C) - p(B\cap C) + \frac{1}{25}$$

$$p(A\cup B\cup C) = \frac{34}{25} - p(A\cap B) - p(A\cap C) - p(B\cap C) = \frac{21}{25}$$

ESERCIZIO : 11.7. *Una popolazione sia formata da un ugual numeri di uomini e di donne: il 5 % degli uomini e in 2.5 % delle donne soffre di daltonisno: qual'è la probabilità che preso casulamente un paziente affetto da tale disturbo si tratti di un uomo.*

Soluzione: Si tratta di un'applicazione del Teorema di Bayes: consideriamo le probabilità

$$p(U) = 0.5, \quad p(D) = 0.5, \quad p(d|U) = 0.05, \quad p(d|D) = 0.025$$

ne segue

$$p(U|d) = \frac{p(d|U)p(U)}{p(d|U)p(U) + p(d|D)p(D)} = \frac{0.05 \times 0.5}{0.05 \times 0.5 + 0.025 \times 0.5} \approx 0.67$$

e, ovviamente $p(D|d) = 1 - p(U|d) \approx 0.33$

ESERCIZIO : 11.8. *Supponiamo che a fronte di una certa malattia il 20 % delle persone sia ricoverato in ospedale. Qual'è la probabilità che almeno 3 di 10 malati vengano ricoverati ?*

Soluzione: Il problema è analogo al Testa/Croce: Testa significhi "ricovero" e Croce "non ricovero". La probabilità di Testa è , in questo caso 0.20 e, ovviamente la probabilità di Croce è 0.80.

Su ogni malato scatta il gioco: se i malati sono 10 il gioco equivale a lanciare la moneta 10 volte.

Detta $p(k)$ la probabilità di avere k Teste è

$$p(k) = \binom{10}{k} (0.20)^k (1 - 0.20)^{10-k}$$

Da cui la probabilità di avere "almeno" 3 ricoveri è

$$1 - p(0) - p(1) - p(2) \approx 0,32$$

ESERCIZIO : 11.9. *Vengono lanciati contemporaneamente 5 dadi: calcolate la probabilit'a degli eventi elencati di seguito:*

(1) *tutti i dadi danno punteggi diversi fra loro,*
(2) *due dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri tre danno punteggi tutti diversi,*
(3) *tre dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri due danno due punteggi diversi,*

(4) *quattro dadi danno punteggi uguali fra loro e uno da un punteggio diverso,*
(5) *tutti i dadi danno lo stesso punteggio.*

Soluzione:

Il lancio dei 5 dadi (uguali) produce 5 numeri, ciascuno tra 1 e 6, anche con ripetizione: le combinazioni con ripetizione di 6 numeri 5 a 5 sono

$$CR_{6,5} = \binom{6+5-1}{5} = 252$$

Le cadute che presentano tutti numeri diversi sono le combinazioni semplici di 6 numeri presi 5 a 5

$$C_{6,5} = \binom{6}{5} = 6$$

La probabilità di ottenere 5 numeri tutti diversi è

$$p = \frac{6}{252} = \frac{1}{42} \approx 0,024$$

Le possibilità di vedere una coppia e tre numeri diversi $(a,a),(x,y,z)$ corrispondono al prodotto

$$6 \times \binom{5}{3} = 60$$

La probabilità di ottenere una coppia e tre numeri diversi è

$$p = \frac{60}{252} \approx 0,238$$

Le possibilità di vedere un tris e due numeri diversi $(a,a,a),(x,y)$ corrispondono al prodotto

$$6 \times \binom{5}{2} = 60$$

La probabilità di ottenere un tris e due numeri diversi è

$$p = \frac{60}{252} \approx 0,238$$

Le possibilità di vedere un "poker" e un numero diverso $(a,a,a,a),(x)$ corrispondono al prodotto

$$6 \times \binom{5}{1} = 30$$

La probabilità di ottenere un "poker" e un numero diverso è

$$p = \frac{30}{252} \approx 0,119$$

Le possibilità di vedere cinque numeri uguali (a,a,a,a,a) corrisponde alla scelta di a, un numero fra 6, 6 possibilità . La probabilità di ottenere cinque numeri uguali è

$$p = \frac{5}{252} \approx 0,020$$

ESERCIZIO : 11.10. *Un apparecchio è prodotto in tre stabilimenti A, B e C, rispettivamente nelle proporzioni del* 50%, 30%, 20%. *Quelli dello stabilimento A hanno la probabilità del* 10% *di essere difettosi, quelli degli stabilimenti B e C del* 15% *e del* 18% *rispettivamente.*
Scelto un pezzo a caso dalla produzione e trovatolo difettoso determinare la probabilità che esso provenga dallo stabilimento C.

Soluzione:

Siano

$$p(d|A) = 10\%,\ p(d|B) = 15\%,\ p(d|C) = 18\%$$

le probabilità di riuscire difettosi essendo stati prodotti ad rispettivi stabilimenti A,B,C.

Il problema richiede $p(C|d)$ valore che la formula di Bayes indica in

$$p(C|d) = \frac{p(d|C)\,p(C)}{p(d|A)\,p(A) + p(d|B)\,p(B) + p(d|C)\,p(C)} =$$
$$= \frac{0.18 \times 0.20}{0.10 \times 0.5 + 0.15 \times 0.30 + 0.18 \times 0.20} \approx 0,274$$

12. Catene di Markov

ESERCIZIO : 12.1. *La pallina di un flipper si può trovare inizialmente in una delle tre posizioni A, B, C: l'evoluzione del gioco segue le seguenti regole:*

- *se la pallina sta in A o in C allora passa con certezza in B,*
- *se sta in B può passare in A o in C o restare in B stesso con uguale probabilità .*

Indicato con X_n il vettore composto dalle probabilità che la pallina stia in una delle tre posizioni al tempo n determinare

- *la matrice P di transizione,*
- *le posizioni X_1, X_2, X_3 dedotte dalla X_0 assegnata.*

Soluzione: La matrice di transizione, matrice 3×3 formata dalle probabilità

$$P = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{BA} & p_{CA} \\ p_{AB} & p_{BB} & p_{CB} \\ p_{AC} & p_{BC} & p_{CC} \end{pmatrix}$$

è la seguente

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

La situazione X_1 è data dal prodotto *riga-colonna*: se, ad esempio $X_0 = \{1,0,0\}$ si ha

$$X_1 = P.X_0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.\{1,0,0\} = \{0,1,0\}$$

I valori successivi $X_2, X_3, \dots$ si deducono con lo stesso procedimento, partendo da X_1, da X_2, ecc.

Oppure si possono preparare le matrici potenza

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{7}{27} & \frac{1}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{13}{27} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

dalle quali

$$X_2 = P^2 . X_0 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \quad X_3 = P^3 . X_0 = \left\{ \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{1}{9} \right\}$$

ESERCIZIO : 12.2. *Una popolazione sia composta da un numero i di individui ed evolva, di giorno in giorno con le seguenti probabilità :*

- *p di aumentare di un'unità ,*
- *r di restare invariata,*
- *q di diminuire di un'unità .*

con la condizione aggiuntiva che $i \in [0,5]$, ovvero che $q_0 = 0,\ p_5 = 0$.
Ovviamente riesca $0 \leq p, r, q \leq 1, \quad p + r + q = 1$.
Determinare

- *il grafo che descrive la catena di Markov di tale sistema aleatorio,*
- *la matrice P di transizione,*
- *la distribuzione X_3 di probabilità relativa al terzo giorno supponendo che si parta da $X_0 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$ e che riescano $p = r = q = 1/3$ negli stati intermedi e $p_0 = r_0 = r_5 = q_5 = 1/2$.*

Soluzione: Il grafo che esprime l'evoluzione del sistema è il seguente:

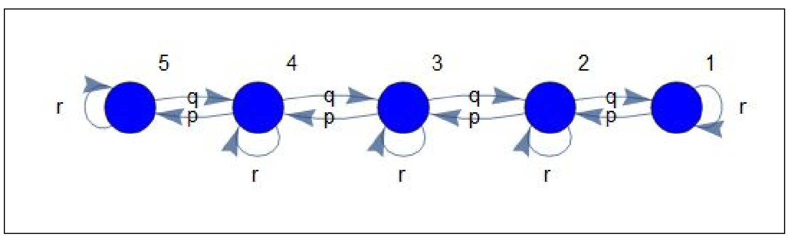


FIGURA 10. L'evoluzione del sistema

La matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le probabilità dei diversi stati in cui il sistema si può trovare partendo dallo stato iniziale $\{1,0,0,0,0\}$ sono

$$X_n = P\,.\,X_{n-1} \quad \to \quad X_n = P^n\,.\,X_0$$

da cui

$$\begin{aligned}
X_0 &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\
X_1 &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\
X_2 &= \begin{Bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\
X_3 &= \begin{Bmatrix} \frac{25}{72} & \frac{29}{72} & \frac{7}{36} & \frac{1}{18} & 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Calcolando, magari con l'ausilio di un computer, le probabilità X_n al crescere di n si assisterebbe ad uno stabilizzarsi degli X_n su

$$\frac{2}{\sqrt{35}}\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right\} \approx \{0.34, 0.51, 0.51, 0.51, 0.34\}$$

È facile riconoscere che $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right\}$ è autovettore di P relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

Naturalmente se $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right\}$ è autovettore di P lo è anche ogni suo multiplo: $\{0.34, 0.51, 0.51, 0.51, 0.34\}$ è semplicvemente il multiplo di tale autovettore di norma 1.

13. Limiti di funzioni

ESERCIZIO : 13.1. *Calcolare, o stabilire se non esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\cos(x)$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2} = 9\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\left(2\,\frac{\sin(2x)}{2x}\right) = -2$$

$$\forall n : \cos(2n\pi) = 1,\ \cos(2n\pi+\pi/2) = 0 \quad \to \quad \lim_{x\to +\infty}\cos(x) \quad non\,esiste$$

ESERCIZIO : 13.2. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti funzioni, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$*

$$\sqrt{x^2-3x}-x, \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \qquad \ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\,.$$

Soluzione:

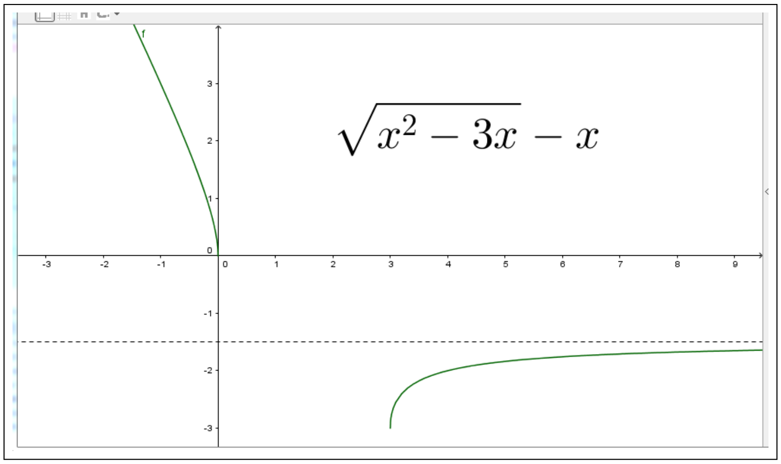


FIGURA 11. $\sqrt{x^2-3x}-x$

$$\sqrt{x^2-3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2-3x}-x)\cdot(\sqrt{x^2-3x}+x)}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}=-3\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}+1}=$$

$$=-3\cdot\frac{1}{\frac{|x|}{x}\sqrt{1-3/x}+1}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}-x=-\frac{3}{2}\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}-x=+\infty\end{cases}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1+4/x^2}}\quad\to\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=1\\\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=-1\end{cases}$$

$$\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)=\ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2+3}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\right)=\ln(2)$$

ESERCIZIO : 13.3. *Calcolare i limiti seguenti :*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{6x},\quad\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)+2x^2}{5x},\quad\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}.$$

Soluzione:

$$\boxed{\frac{\sin(3x)}{6x}}$$

È noto che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad \Leftrightarrow \quad t\approx 0 \quad \to \quad \sin(t)\approx t$$
Quindi
$$x\approx 0 \quad \to \quad 3x\approx 0 \quad \to \quad \sin(3x)\approx 3x \quad \to \quad \frac{\sin(3x)}{6x}\approx\frac{1}{2}$$
Ovvero
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{6x}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{\sin(x)+2x^2}{5x}}$$

$$x\approx 0 \quad \to \quad \sin(x)\approx x \quad \to \quad \frac{\sin(x)+2x^2}{5x}\approx\frac{x+2x^2}{5x}=\frac{1}{5}+\frac{2x}{5}$$
Da cui
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+2x^2}{5x}=\frac{1}{5}$$

$$\boxed{\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}}$$

$$\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}=\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$
da cui
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}=1$$

ESERCIZIO : 13.4. *Sia* $f(x)=\dfrac{\sin^2(x)}{x}$ *:*

- *determinare il dominio, e calcolare i limiti per* $x\to\pm\infty$*,*
- *dire se* f *può essere prolungata per continuità a tutto* $\mathbb{R}$*,*
- *dire se* f *è limitata.*

Soluzione:

Il dominio di $\dfrac{\sin^2(x)}{x}$ è $\mathbb{R}-\{0\}$.

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \quad \to \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Tenuto presente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

la funzione f può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$, ponendo $f(0) = 0$.

Ogni funzione g continua su $\mathbb{R}$ e dotata dei limiti ℓ^+ e ℓ^- finiti sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ è necessariamente limitata. Infatti

- $\exists b: \quad b \leq x \quad \to \quad |g(x)| \leq |\ell^+| + 1$
- $\exists a: \quad x \leq a \quad \to \quad |g(x)| \leq |\ell^-| + 1$
- $\exists m, M : x \in [a,b] \quad \to \quad m \leq g(x) \leq M$

Dalle disuguaglianze indicate segue che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \min(\ell^+ - 1, \ell^- - 1, m) \leq g(x) \leq \max(\ell^+ + 1, \ell^- + 1, M)$$

La funzione f assegnata in questo esercizio, prolungata per continuità su tutto $\mathbb{R}$ è continua e ha limiti nulli per $x \to \pm\infty$,

... quindi è limitata.

ESERCIZIO : 13.5. *Sia $f(x) = 10^{1/x}$:*

- *determinare il dominio di f,*
- *determinare i limiti di f per $x \to \pm\infty$*
- *determinare $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.*

Soluzione:

Il dominio della funzione esponenziale $f(x) = 10^{1/x}$ è determinato dal dominio dell'espressione $1/x$ ad esponente: $x \neq 0$.

Pertanto il dominio di f è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Consideriamo il limite per $x \to +\infty$:qualunque sia la successione x_n divergente in modo crescente a $+\infty$ la successione dei reciproci $1/x_n$ tende in modo decrescente a zero.

Quindi $10^{1/x_n}$ è una successione limitata e decrescente anch'essa: quindi è convergente e sia $\ell \geq 0$ il suo limite.

$$\lim_{n\to\infty} 10^{1/x_n} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \ell^{x_n}$$

- se fosse $0 \leq \ell < 1$ la successione ℓ^{x_n} sarebbe infinitesima,
- se fosse $1 < \ell$ la successione ℓ^{x_n} sarebbe divergente positivamente.

Resta l'unica possibilità, a questo punto obbligata,

$$\ell = 1$$

Il limite per $x \to -\infty$ si riconosce in modo analogo: se x_n è una successione decrescente a $-\infty$ allora la successione dei reciproci $1/x_n$ è crescente a zero.

Quindi la successione $10^{1/x_n}$ è crescente e limitata: sia $\ell \geq 0$ il suo limite. Si escludono le possibilità di $0 \leq \ell < 1$ e quella di $1 < \ell$ con le stesse osservazioni di sopra.

Pertanto si riconosce che

$$\lim_{x \to \pm\infty} 10^{1/x} = 1$$

I limiti

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

permettono di riconoscere, eventualmente giustificando le conclusioni analogamente a quanto fatto sopra per i limiti a $\pm\infty$, che

$$\lim_{x \to 0^-} 10^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} 10^{1/x} = +\infty$$

OSSERVAZIONE 13.1. *Il grafico della $10^{1/x}$ è, in un certo senso riconducibile a quello della semplice $1/x$:*

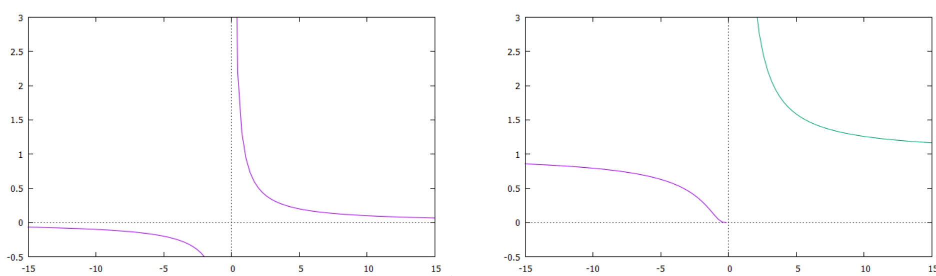


FIGURA 12. Esercizio 5: $1/x, \quad 10^{1/x}$

ESERCIZIO : 13.6. *Sia $f(x) = \log_{10}(1 + x^2)$:*

- *determinare i limiti di f per $x \to \pm\infty$,*
- *dire se l'equazione $f(x) = \lambda$ ha soluzione per ogni $\lambda \geq 0$.*

Soluzione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \qquad \to \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \log_{10}(1+x^2) = +\infty$$

Tenuto conto che

$$f(0) = 0, \lim_{x\to\pm\infty} \log_{10}(1+x^2) = +\infty \quad \to \quad \forall\lambda \in [0,+\infty) \quad \exists c \in \mathbb{R} : f(c) = \lambda$$

La soluzione c dell'equazione è naturalmente scritta con l'algoritmo seguente

$$\log_{10}(1+c^2) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad 1+c^2 = 10^\lambda \quad \Leftrightarrow \quad c = \pm\sqrt{10^\lambda - 1}$$

ESERCIZIO : 13.7. *Sia*

$$f(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}, \quad (x > 0)$$

- *calcolare i limiti* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$,
- *dire se l'equazione* $f(x) = 3$ *ha soluzione,*
- *dire se* f *è limitata inferiormente.*

Soluzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^6}\left(\frac{1}{x^6} - 1\right) \quad \to \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ \\ \lim_{x\to 0^+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

Posto $t = 1/x^6$ l'espressione della f assegnata diventa

$$t^2 - t$$

il valore t per cui $t^2 - t = (t-1/2)^2 - 1/4$ è più basso è $t = 1/2$ e il minimo è $-1/4$.

Si ottiene $t = 1/2$ per $x_0 = \sqrt[6]{2}$: ovvero

$$f(x_0) = -\frac{1}{4} < 3, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad \exists c \in (0, \sqrt[6]{2}) : \ f(c) = 3$$

f è limitata inferiormente: $f(x) \geq -\frac{1}{4}$: l'immagine di f è pertanto l'intervallo $[-1/4, +\infty)$.

ESERCIZIO : 13.8. *(impegnativo) Sia $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ con limiti per $x \to \pm\infty$ entrambi $+\infty$: dimostrare che esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che l'immagine di f è $[m, +\infty)$.*

Soluzione:

La condizione

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad \exists M : \ |x| \geq M \quad \to \quad f(x) \geq 1$$

Sia $m_1 = \min\limits_{-M \leq x \leq M} f(x)$: osserviamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha una delle due possibilità

- o $|x| > M$, e allora $f(x) \geq 1$
- o $|x| \leq M$ e allora $f(x) \geq m_1$

Quindi

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq m = \min\{1, m_1\}$$

ovvero f è limitata inferiormente.

Il valore m_1 è un valore della funzione (è il punto di minimo nell'intervallo $[-M, M]$) quindi se

$$m_1 \leq 1 \quad \to \quad m = m_1, \quad \to \quad m_1 = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

Se invece $1 < m_1$ sia M_1 tale che posto

$$\forall |x| \geq M_1 : \quad f(x) \geq m_1$$

Detto $m_2 = \min\limits_{|x| \leq M_1} f(x)$: tenuto presente che $M \leq M_1$ si ha $m_2 \leq m_1$.

Osserviamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha una delle due possibilità

- o $|x| > M_1$, e allora $f(x) \geq m_1$
- o $|x| \leq M_1$ e allora $f(x) \geq m_2$.

Tenuto presente che $M \leq M_1$ e qui ndi $m_2 \leq m_1$ si ha

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq m_2$$

Tenuto presente (teorema dei valori intermedi) che l'immagine dell'intervallo $\mathbb{R}$ tramite la funzione continua f deve essere un intervallo, l'immagine non può che essere

- nel caso $m_1 \leq 1$ la semiretta $[m_1, +\infty)$,
- nel secondo caso $1 < m_1$ la semiretta $[m_2, +\infty)$

ESERCIZIO : 13.9.

Sia $f(x) = x^2 \sin(1/x)$:

- *dire se è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}$,*
- *calcolare la derivata $f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,*
- *calcolare i limiti di f per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.*

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \sin(1/x) \quad \to \quad |f(x)| \leq x^2 \quad \to \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

La funzione f è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}$ attribuendole il valore 0 nell'origine.

Se $x \neq 0$ si ha, ovviamente $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$.

Per $x = 0$ il rapporto incrementale è

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin(1/h) \quad \to \quad \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \leq |h| \to 0$$

La derivata in $x = 0$ esiste e vale zero.

ESERCIZIO : 13.10.

Sia $f(x) = e^{-(x-1)^2}$:

- *calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$,*
- *calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} x\, f(x)$*
- *calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 f(x)$*

Soluzione:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} x\, f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} x^2 f(x)$$

14. Continuità

ESERCIZIO : 14.1. *In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x = 0$*

$$f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}}$$

Tenuto presente che

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(a(x-2) = -2a = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(2x + x^2 + 6) = 6 \end{cases}$$

la funzione è continua in $x = 0$ se e solo se $-2a = 6$ ovvero $a = -3$. In tutti gli altri punti $x \neq 0$ la funzione è continua perchè coincide con funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$.

$$\boxed{h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}}$$

Tenuto presente che

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

limiti sinistro e destro diversi, si conclude che non esiste alcun valore di a per il quale la funzione $h(x)$ assegnata sia continua.

ESERCIZIO : 14.2. *Dire se le funzioni $f(x) = x^3\, sign(x)$, $\quad g(x) = (x-1)\, sign(x)$ sono continue in $x_0 = 0$.*

Soluzione:

$$\boxed{f(x) = x^3\,\mathrm{sign}(x)}$$

La funzione x^3 è continua in $\mathbb{R}$, la $\text{sign}(x)$ è continua in $\mathbb{R}-\{0\}$: quindi la f prodotto delle due è continua sicuramente dove lo sono entrambi i fattori, quindi in $\mathbb{R}-\{0\}$.

Si ha inoltre

$$|f(x)| = |x|^3 \cdot |\text{sign}(x)| \leq |x|^3 \quad \to \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

cioè la continuità anche in $x_0 = 0$.

$\boxed{g(x) = (x-1)\,\text{sign}(x)}$

Come osservato precedentemente la g prodotto di $(x-1)$ e di $\text{sign}(x)$ è continua sicuramente dove lo sono entrambi i fattori, quindi in $\mathbb{R}-\{0\}$.

Si ha inoltre

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \cdot \lim_{x\to 0^-} \text{sign}(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = -1 \cdot \lim_{x\to 0^+} \text{sign}(x) = -1 \end{cases}$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi quindi la g non è contuna in $x_0 = 0$.

ESERCIZIO : 14.3. *Sia* $f(x) = \dfrac{5x^2}{1+5x^2}$ *:*

- *dire se f è continua in $\mathbb{R}$,*
- *calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$,*
- *dire se l'equazione $f(x) = 1/2$ ha soluzione.*

Soluzione:

La funzione razionale $f(x) = \dfrac{5x^2}{1+5x^2}$ con denominatore $1+5x^2$ sempre diverso da zero è continua in $\mathbb{R}$.

Tenuto conto che

$$f(x) = \frac{5x^2}{1+5x^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{5x^2}}$$

si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

Scelto $\varepsilon = 0.25$ il fatto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ implica che esiste x_0 tale che

$$x_0 \leq x \quad \to \quad f(x) \in [0.75,\, 1.25] \quad \to \quad f(x) \geq 0.75$$

Considerato quindi che

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) \geq 0.75, \quad 1/2 \in [0, 0.75]$$

dal teorema dei valori intermedi si ha

$$\exists c \in [0, 0.75] : \; f(x) = \frac{1}{2}.$$

È evidente del resto che

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ESERCIZIO : 14.4. *Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni* $\sqrt{x^2 - x^3}$, $\quad \mathrm{sgn}(x)$, $\quad x\,\mathrm{sgn}(\sin x)$.

Soluzione:

$\boxed{\sqrt{x^2 - x^3}}$ è definita per $x^2 - x^3 \geq 0$ quindi $x^2(1-x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.
è continua in tutto il suo insieme di definizione.

$\boxed{\mathrm{sgn}(x)}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ ma è continua solo per $x \neq 0$.

$\boxed{x\,\mathrm{sgn}(\sin x)}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ ma è continua solo per $x \neq k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

ESERCIZIO : 14.5. *Dire se* $e^{|x-1|}$ *ammette minimo in* $\mathbb{R}$*, giustificando la risposta.*

Soluzione: Minimo $= 1$ raggiunto per $x = 1$: per tutti gli altri $x \neq 1$ si ha $|x-1| > 0$ e quindi $e^{|x-1|} > 1$.

ESERCIZIO : 14.6. *(impegnativo) Sia* $p(x)$ *un polinomio di grado pari con coefficiente di grado massimo positivo: mostrare che* $p(x)$ *ha minimo.*

Soluzione:

L'affermazione è ben nota se $p(x) = ax^2 + bx + c$: il grafico, essendo $a > 0$, ha la ben nota forma della parabola rivolta verso l'alto. Il minimo è $p(-b/2a)$ ordinata del "*vertice*" della parabola.

In generale se $p(x) = ax^{2m} + \dots$ è di grado pari con $a > 0$ non solo si ha $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$ ma la derivata $p'(x) = 2max^{2m-1} + \dots$ è un polinomio di grado dispari

$$a > 0 \to \lim_{x\to-\infty} p'(x) = -\infty, \ \lim_{x\to+\infty} p'(x) = +\infty$$

Esiste quindi M tale che

$$x \leq -M \to p'(x) < 0, \qquad M \leq x \to p'(x) > 0$$

ne segue pertanto che $p(x)$ è decrescente sull'intervallo $(-\infty, M)$ e crescente su quello $(M, +\infty)$ da cui segue

$$x \leq -M \to p(x) \geq p(-M), \qquad M \leq x \to p(M) \leq p(x)$$

Sia $m = p(x_m)$ il minimo di $p(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $-M \leq x \leq M$: è facile riconoscere che tale valore è il minimo di $p(x)$:

$$\begin{array}{lll} x \leq -M & \to p(-M) & \leq p(x) \\ -M \leq x \leq M & \to p(x_m) & \leq p(x) \\ M \leq x & \to p(M) & \leq p(x) \end{array}$$

Tenuto presente che $p(x_m) \leq p(-M), \ p(x_m) \leq p(M)$ riesce

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ p(x_m) \leq p(x)$$

OSSERVAZIONE 14.1. *Il risultato ottenuto si puè generalizzare ad ogni funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ che diverga a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$: la dimostrazione di tale risultato, meno semplice, si serve del teorema di Bolzano che riconosce la possibilitè di estrarre da ogni successione $\{x_1, x_2, \dots\}$ limitata una sottosuccessione convergente.*

ESERCIZIO : 14.7. *Dire se esistono massimo e minimo della funzione $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ in $[2, 11]$. Cosa si può dire in $\mathbb{R}$? Rispondere alle stesso domande nel caso $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$.*

Soluzione:

$$\boxed{f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2) \text{ in } [2, 11]}$$

La funzione $f(x)$ assegnata, un polinomio, è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2, 11]$, pertanto (Teorema di Weierstrass) esistono sia il minimo che il massimo.

Tenuto presente che

$$f'(x) = 7x^6 - 4\pi x^3 = x^3(7x^3 - 4\pi)$$

è positiva per $x \geq 2$ si riconosce che $f(x)$ è crescente in $[2,11]$ e pertanto

$$\min_{x\in[2,11]} f(x) = f(2), \qquad \max_{x\in[2,11]} f(x) = f(11)$$

Sull'intero R invece il polinomio $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ di grado dispari non ha nè minimo nè massimo come si riconosce tenendo presente che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\boxed{f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77 \text{ in } [2,11]}$

La funzione $f(x)$ assegnata, un polinomio, è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2,11]$, pertanto (Teorema di Weierstrass) esistono sia il minimo che il massimo.

Tenuto presente che

$$f'(x) = 6x^5 - 10\sqrt{2}x^4 = x^4(6x - 10\sqrt{2}), \qquad f'\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right) = 0$$

si riconosce che $f'(x)$ è negativa per $2 < x < \dfrac{10\sqrt{2}}{6}$ e positiva per $\dfrac{10\sqrt{2}}{6} < x < 11$.

Quindi $f(x)$ è decrescente nel primo tratto e crescente nel secondo: si ha pertanto

$$\min_{x\in[2,11]} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$\max_{x\in[2,11]} f(x) = \max\{f(2), f(11)\}$$

Sull'intero R invece il polinomio $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$ di grado pari ha minimo ma non ha massimo come si riconosce tenendo presente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

Tenuto presente che $f'(x)$ è negativa a sinistra di $\dfrac{10\sqrt{2}}{6}$ e positiva a destra, cioè $f(x)$ è decrescente a sinistra di $\dfrac{10\sqrt{2}}{6}$ e crescente a destra, si riconosce che

$$\min_{x\in R} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right)$$

15. Le derivate

ESERCIZIO : 15.1. *Scrivere i rapporti incrementali delle funzioni*

$$r(x) = 1 + x + x^2, \quad g(x) = (1+x^2)^3, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

tra x_0 e $x_0 + h$ essendo $x_0 = 1$ e $h = 2$.

Soluzione:

$$x_0 = 1,\ x_0 + h = 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{r(3)-r(1)}{2} & = \dfrac{13-3}{2} & = 5 \\[2ex] \dfrac{g(3)-g(1)}{2} & = \dfrac{1000-8}{2} & = 496 \\[2ex] \dfrac{f(3)-f(1)}{2} & = \dfrac{0.1-0.5}{2} & = -0.2 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 15.2. *Sia f definita in $\mathbb{R}$ da*

$$f(x) = \begin{cases} ax & se \quad x \le 0 \\ \sin(x) & se \quad 0 < x \end{cases}$$

- *determinare dove f è continua,*
- *scrivere il rapporto incrementale nell'origine,*
- *determinare per quali scelta di a f è derivabile nell'origine.*

Soluzione:

- f è continua nelle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, inoltre tenuto conto che
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$
si riconosce che f è comtinua anche nell'origine. Quindi f è continua in $\mathbb{R}$.
- il rapporto incrementale nell'origine ha espressione diversa a seconda che $h < 0$ o $h > 0$
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{ah}{h} = a & \text{se} \quad h < 0 \\[2ex] \dfrac{\sin(h)}{h} & \text{se} \quad h > 0 \end{cases}$$

- I limiti per $h \to 0^-$ della prima e quello per $h \to 0^+$ della seconda valgono rispettivamente a e 1: pertanto f è derivabile nell'origine se e solo se $a = 1$.

ESERCIZIO : 15.3.

Sia $f(x) = \sqrt{|x-1|}$:

- *determinare il dominio di definizione di f,*
- *determinare l'immagine di f,*
- *determinare l'insieme di derivabilità,*
- *calcolare il limite del rapporto incrementale di f in $x_0 = 1$ da sinistra e da destra.*

Soluzione:

L'espressione sotto radice, un modulo, è sempre maggiore o uguale a zero, quindi la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

L'immagine di f, funzione continua in $\mathbb{R}$ è un intervallo I: tenuto conto che

$$f(x) \geq 0, \quad f(1) = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

si ha $I = [0, +\infty)$.

La funzione f è composta dalla radice quadrata e dal modulo:

- $|x-1|$ è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$
- la radice è derivabile se l'espressione sotto radice è positiva

Quindi f è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{h} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\sqrt{|h|}}{h} = -\infty \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\sqrt{|h|}}{h} = +\infty \end{cases}$$

ESERCIZIO : 15.4.

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ x^2 \left(\ln(|x|) + 1 \right) & se \quad x \neq 0 \end{cases}$$

- *determinare $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$*

- *determinare il rapporto incrementale* $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$, $h \neq 0$
- *dire se* f *è una funzione pari,*
- *calcolare i limiti di* f *per* $x \to \pm\infty$ *e dire se* f *ammette minimo.*

Soluzione:

$f(x)$ è una funzione pari, quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [x^2\,(\ln(x)+1)]$$

Posto

$$x = e^t \quad \to \quad x^2\ln(x) = t\,e^{2t} = \frac{t}{e^{-2t}}$$

si riconosce che

$$0 \approx x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \approx -\infty$$

e quindi

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-2t}} = 0 \quad \to \quad \lim_{x\to 0} [x^2\,(\ln(|x|)+1)] = 0$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2(\ln(1+h)+1)-1}{h} = 3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi esiste il minimo.

ESERCIZIO : 15.5. *Sia* $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$ *definita in* $x \in \mathbb{R}$.

- *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti* $(1, f(1))$ *e* $(-2, f(-2))$.
- *Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico* $(x_0, f(x_0))$*, dire per quali valori* x_0 *la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici* $y = x$ *e* $y = -x$.

Soluzione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

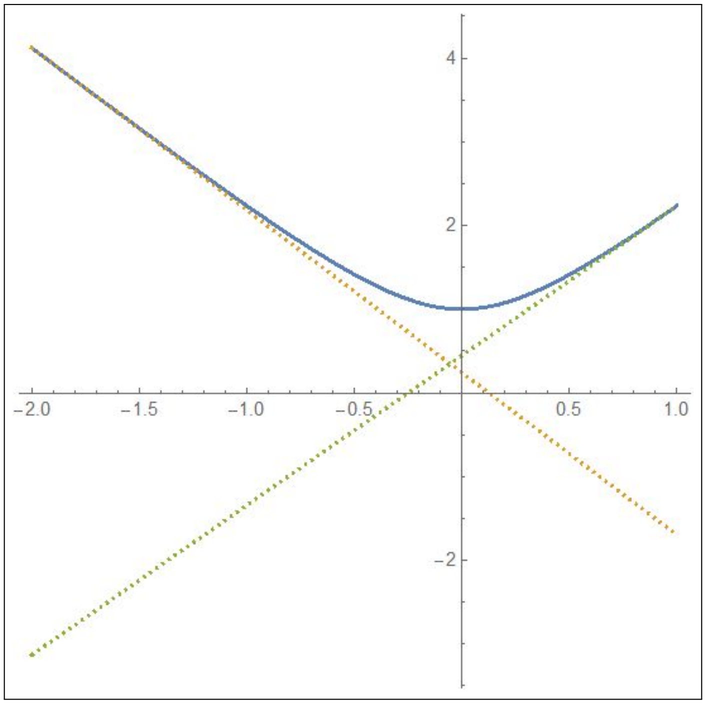


FIGURA 13. Esercizio 9 $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
$\sqrt{1+4x^2}$	$\dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}$	1	$\sqrt{5}$	$\dfrac{8}{2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5} + \dfrac{8}{2\sqrt{5}}(x-1)$
		-2	$\sqrt{17}$	$\dfrac{-16}{2\sqrt{17}}$	$\sqrt{17} + \dfrac{-16}{2\sqrt{17}}(x+2)$

La retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha coefficiente angolare $f'(x_0)$ pertanto:

- retta orizzontale $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \quad \to \quad x_0 = 0$
- retta parallela alla $y = x \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \quad \to \quad x_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
- retta parallela alla $y = -x \Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \quad \to \quad x_0 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

ESERCIZIO : 15.6. *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ *nel punto* $P = (1, f(1))$.

Soluzione:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{2\sqrt{(1+1)^3}}(x-1)$$

da cui

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{8}}(x-1)$$

ESERCIZIO : 15.7. *Utilizzando le regole per prodotto e rapporto, calcolare le derivate prime di*

$$e^x \sin x, \qquad \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad \frac{\cos x}{1+\sin x}, \qquad x \ln x, \qquad x \arctan x.$$

Soluzione:

$$\begin{array}{lll} f(x) = u(x) \cdot v(x) & \rightarrow & f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} & \rightarrow & f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f(x) & \rightarrow & f'(x) \\ e^x \cdot \sin(x) & \rightarrow & e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) \\ \dfrac{x+1}{x^2+1} & \rightarrow & \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ \dfrac{\cos x}{1+\sin(x)} & \rightarrow & \dfrac{(-\sin(x)) \cdot (1+\sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \\ x \ln(x) & \rightarrow & 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} \\ x \arctan(x) & \rightarrow & 1 \cdot \arctan(x) + x \cdot \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

ESERCIZIO : 15.8. *Utilizzando la regole di derivazione di funzione composta, calcolare la derivata prima di*

$$\cos(1-x^2), \qquad \ln(1+e^{x^2}), \qquad \sin(\sqrt{x^2+1}), \qquad \arctan(e^{-x^2}).$$

Soluzione:

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \to & f'(x) \\ \cos(1-x^2) & \to & 2x\sin(1-x^2) \\ \ln(1+e^{x^2}) & \to & \dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} \\ \sin(\sqrt{x^2+1}) & \to & \cos(\sqrt{x^2+1})\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ \arctan(e^{-x^2}) & \to & \dfrac{-2xe^{-x^2}}{1+(e^{-x^2})^2} \end{array}$$

ESERCIZIO : 15.9. *Utilizzando le regole di derivazione, calcolare nell'insieme dove sono definite, le derivate di*

$$x(1-x^2), \quad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \quad \frac{1+\cos^2 x}{2\sin x}, \quad x(\ln x+\sin x), \quad (x^2+1)\arctan x.$$

Soluzione:

$$
\begin{array}{lcr}
f(x) & \to & f'(x) \\
x(1-x^2) & \to & 1\cdot(1-x^2)+x(-2x) \\
\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} & \to & \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})\cdot\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2} \\
 & & = -\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}} \\
\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} & \to & \dfrac{(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2} \\
 & & = -\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \\
\dfrac{1+\cos^2(x)}{2\sin(x)} & \to & \dfrac{-2\cos(x)\sin(x)\cdot(2\sin(x))-(1+\cos^2(x))\cdot(2\cos(x))}{(2\sin(x))^2} \\
x(\ln(x)+\sin(x)) & \to & 1\cdot(\ln(x)+\sin(x))+x\left(\dfrac{1}{x}+\cos(x)\right) \\
(x^2+1)\arctan(x) & \to & 2x\arctan(x)+\dfrac{x^2+1}{1+x^2} \\
 & & = 2x\arctan(x)+1
\end{array}
$$

ESERCIZIO : 15.10. *Dire quale delle seguenti funzioni è derivabile in $x=0$*

$$|x|\,\sin x, \qquad |x|\,(x^2+1), \qquad \sqrt{x}\,\sin x, \qquad (x^2+1)\sqrt{x}.$$

Soluzione:

$$
\begin{array}{llll}
f(x) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & & \to\ f'(0) \\[2ex]
|x|\,\sin x & \dfrac{|h|\sin(h)}{h} & = |h|\cdot\dfrac{\sin(h)}{h} & \to\ 0 \\[2ex]
|x|\,(x^2+1) & \dfrac{|h|(h^2+1)}{h} & = h|h|+\dfrac{|h|}{h} & \to\ \textit{non converge} \\[2ex]
\sqrt{x}\sin x & \dfrac{\sqrt{h}\sin(h)}{h} & = \sqrt{h}\cdot\dfrac{\sin(h)}{h} & \to\ 0 \\[2ex]
(x^2+1)\sqrt{x} & \dfrac{(h^2+1)\sqrt{h}}{h} & = h\sqrt{h}+\dfrac{1}{\sqrt{h}} & \to\ \textit{non converge}
\end{array}
$$

ESERCIZIO : 15.11. *Supponendo κ, T, b costanti assegnate, ricavare dalle seguenti equazioni di stato*

$$pV = \kappa T, \qquad\qquad p(V-nb)-\kappa T = 0$$

il volume V come funzione della pressione p. Usare tali espressioni per determinare le derivate $\dfrac{dV}{dp}$.

Soluzione:

$$
\begin{array}{llll}
pV\ =\ \kappa T & \to\ V=\dfrac{\kappa T}{p} & \to & \dfrac{dV}{dp}=-\dfrac{\kappa T}{p^2} \\[2ex]
p(V-nb)-\kappa T=0 & \to\ V=nb+\dfrac{\kappa T}{p} & \to & \dfrac{dV}{dp}=-\dfrac{\kappa T}{p^2}
\end{array}
$$

ESERCIZIO : 15.12. *Studiare la continuità e derivabilità in $x=0$ delle funzioni*

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0, \end{cases} \qquad e \qquad g(x) := \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

La derivata della funzione g è continua in 0?

Soluzione:

$$
\begin{array}{llll}
f(x) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & & \to \quad f'(0) \\[2ex]
x\sin(1/x) & \dfrac{h\sin(1/h)}{h} & = \sin(1/h) & \to \quad \textit{non converge} \\[2ex]
x^2\sin(1/x) & \dfrac{h^2\sin(1/h)}{h} & = h\sin(1/h) & \to \quad 0
\end{array}
$$

$$
g'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases} \quad \to \quad g'(x) \text{ non è continua in } x = 0
$$

ESERCIZIO : 15.13. *In $x_0 = 0$, studiare la continuità, la derivabilità, l'esistenza della derivata seconda di*

$$
f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}
$$

Soluzione:

$$
\boxed{f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases}}
$$

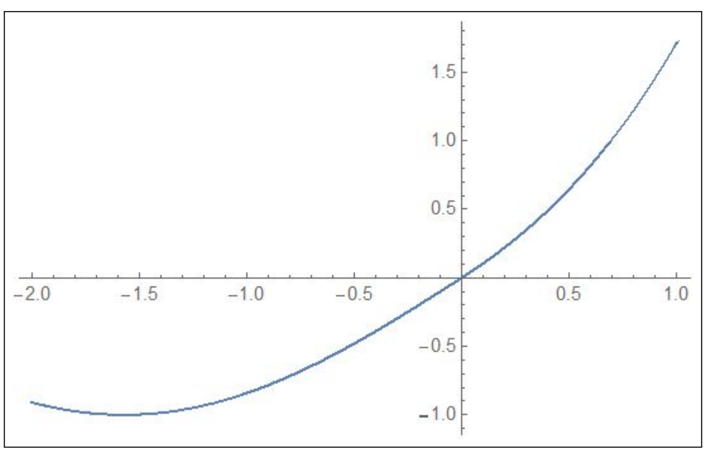


FIGURA 14. Esercizio 8 $f(x)$

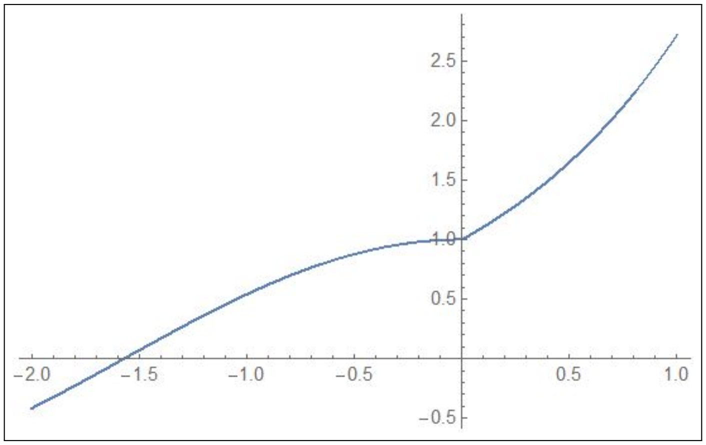


FIGURA 15. Esercizio 8 $f'(x)$

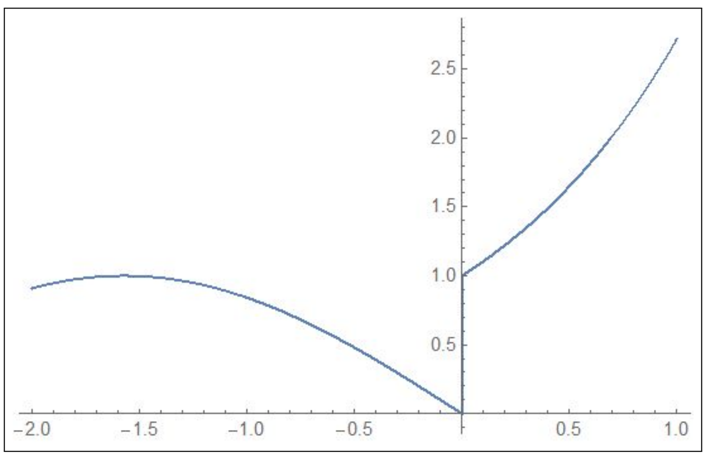


FIGURA 16. Esercizio 8 $f''(x)$

Tenuto conto che

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(h)}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h} = 1 \end{aligned}\right. \quad \to \quad f'(0)=1$$

si riconosce che esiste la derivata prima di $f(x)$ in $x=0$ e quindi, tenuto conto che sia per $x<0$ che per $x>0$ $f(x)$ è ovviamente derivabile si ha che:

$$f'(x) := \begin{cases} \cos(x) & x<0 \\ 1 & x=0 \\ e^x & x>0, \end{cases}$$

Per riconoscere l'esistenza o meno della derivata seconda in $x = 0$ occorre esaminare i due rapporti incrementali

$$\begin{array}{lll} \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{\cos(h)-1}{h}, & \to & 0 \\ \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{e^h-1}{h}, & \to & 1 \end{array}$$

I due limiti sono diversi, quindi la derivata seconda non esiste in $x = 0$.

Ovviamente esiste invece in tutti gli altri punti.

$$\boxed{g(x) := \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}}$$

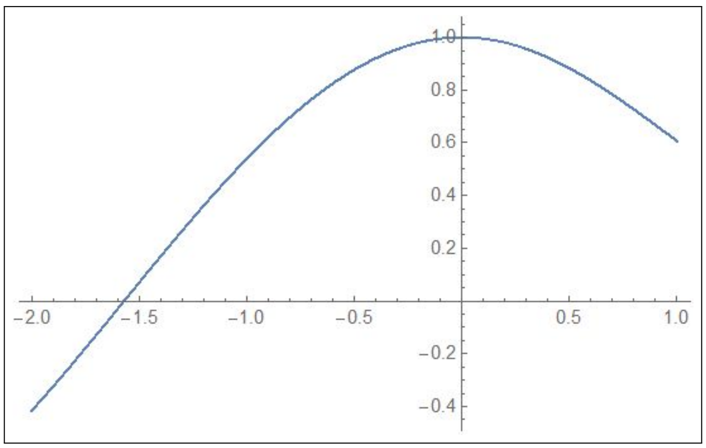


FIGURA 17. Esercizio 8 $g(x)$

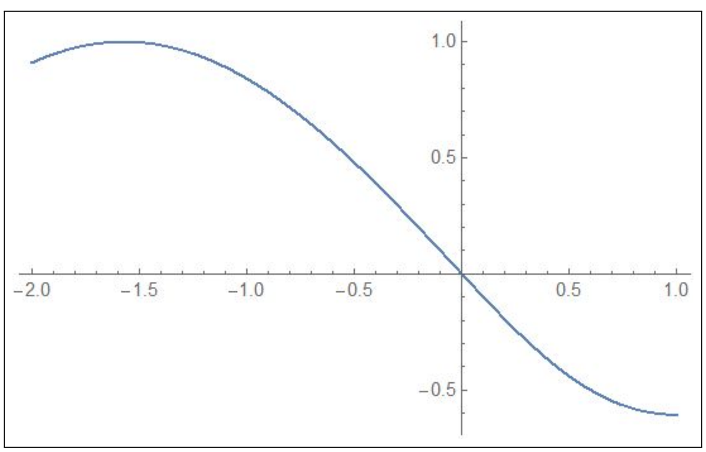


FIGURA 18. Esercizio 8 $g'(x)$

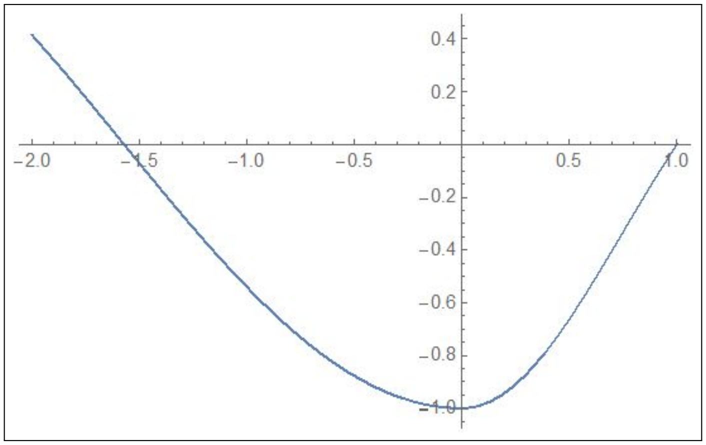


FIGURA 19. Esercizio 8 $g''(x)$

Tenuto conto che

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-h^2/2}-1}{h} = 0 \end{array}\right. \quad \to \quad g'(0)=0$$

si riconosce che esiste la derivata prima di $g(x)$ in $x=0$ e quindi, tenuto conto che sia per $x<0$ che per $x>0$ $g(x)$ ï¿$\frac{1}{2}$ ovviamente derivabile si ha che:

$$g'(x) := \begin{cases} -\sin(x) & x<0 \\ 0 & x=0 \\ -xe^{-x^2/2} & x>0, \end{cases}$$

Per riconoscere l'esistenza o meno della derivata seconda in $x=0$ occorre esaminare i due rapporti incrementali

$$\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-\sin(h)}{h}, \qquad \to \quad -1 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-he^{-h^2/2}}{h}, \qquad \to \quad -1 \end{array}$$

I due limiti sono uguali, quindi la derivata seconda esiste in $x=0$ e vale -1.

Ovviamente esiste invece in tutti gli altri punti.

OSSERVAZIONE 15.1. *Il grafico della funzione $f(x)$ dell'Esercizio 8 appare del tutto regolare: non si notano nè punti angolosi nè cuspidi.*

Nulla lascia presumere la non esistenza della derivata seconda come invece si prevede guardando il grafico di $f'(x)$ che mostra in $x=0$ un punto angoloso, e come si vede, in modo particolarmente esplicito guardando il grafico di $f''(x)$ per $x\neq 0$.

Conclusione: *la nostra sensibilità visiva guardando una curva non distingue eventuali discontinuità a livello di derivata seconda. Una conclusione analoga può farsi pensando alla curvatura: l'occhio non avverte discontinuità della curvatura e non riconosce eventuali irregolarità collegate a tali discontinuità.*

Ben diversa è l'attenzione progettuale nel disegno dei raccordi autostradali, nei quali occorre per motivi di sicurezza, variare le curvature (quindi le derivate seconde) con continuità.

ESERCIZIO : 15.14. *Fissati $a, b > 0$, la funzione $U(R) := aR^{-12} - bR^{-6}$ definita per $R > 0$ prende il nome di* **potenziale di Lennard–Jones**.
Determinare la derivata U', gli intervalli in cui U è monotona, il minimo di U in $(0, +\infty)$.

Soluzione:

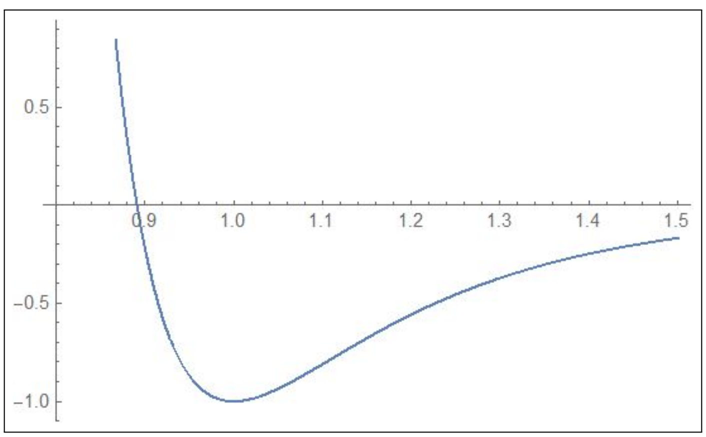


FIGURA 20. Esercizio 10 $U(R) = \frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{R^6}$

$$U'(R) = -12\,a\,R^{-13} + 6\,b\,R^{-7} = \frac{6}{R^7}\left(b - \frac{2a}{R^6}\right)$$

Nell'intervallo $\left(0, \sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}\right)$ la derivata è negativa mentre in $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}, \infty\right)$ è positiva.

Quindi nel primo intervallo $U(R)$ è decrescente e nel secondo è crescente.

Il minimo è raggiunto nel punto $R_0 = \sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}$ e vale $-\dfrac{b^2}{4a}$.

ESERCIZIO : 15.15. *Calcolare le derivate delle funzioni:*

$$f(x) = \sin(x+\pi), \quad g(x) = \tan(x), \quad r(x) = \sqrt{1+x}$$

rispettivamente nei punti π, $\pi/4$, 0.

Soluzione:

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x+\pi) & f'(x) = \cos(x+\pi) & f'(\pi) = 1 \\ g(x) = \tan(x) & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} & g'(\pi/4) = 2 \\ r(x) = \sqrt{1+x} & r'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & r'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO : 15.16. *Dire per quali* $\alpha > 0$ *la funzione* $|x|^\alpha$ *è definita, continua e derivabile in tutto* $\mathbb{R}$ *e calcolare la sua derivata.*

Soluzione:

Poniamo $f(x) = |x|^\alpha$, funzione continua in $\mathbb{R}$.

Per $x > 0$ si ha $f(x) = x^\alpha$ funzione derivabile con derivata $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Per $x < 0$ si ha $|x|^\alpha = f(-x)$ funzione derivabile con derivata

$$(f(-x))' = -f'(-x) = -\alpha\,|-x|^{\alpha-1} = -\alpha\,|x|^{\alpha-1}$$

Le due espressioni, quella per $x > 0$ e quella per $x < 0$ possono riassumersi nell'espressione

Per $x = 0$ il rapprto incrementale di f diventa

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{|h|^\alpha}{h}$$

È evidente che

- se $0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|^\alpha}{h} = -\infty \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|^\alpha}{h} = +\infty \end{cases}$$

  limiti diversi, quindi la derivata non esiste,

- se $\alpha = 1$ la f è la nota funzione $|x|$ che sappiamo non derivabile nell'origine,
- se $1 < \alpha$ riesce
$$\frac{|h|^\alpha}{h} = |h|^{\alpha-1}\frac{|h|}{h} \quad \rightarrow \quad \frac{|h|^\alpha}{h} \leq |h|^{\alpha-1} \quad \rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{|h|^\alpha}{h} = 0$$
derivata esiste ed è nulla nell'origine.

ESERCIZIO : 15.17. *Sia $f(x) = \sin(x)$:*

- *dire dove è definita e continua $|f|^{3/2}$,*
- *dire dove $|f|^{3/2}$ è anche derivabile e calcolare la sua derivata.*

Soluzione:

La funzione $f(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ è la composizione della $g(t) = |t|^{3/2}$ con la $\sin(x)$
$$f(x) = g[\sin(x)]$$
tenuto presente che sia $\sin(x)$ che $g(t)$ sono continue in tutto $\mathbb{R}$ si riconosce che la funzione composta $f(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Le funzioni $\sin(x)$ e $g(t)$ sono entrambe derivabili[4] in tutto $\mathbb{R}$ e pertanto la funzione composta $f(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

L'espressione della derivata è quella offerta dalla regola di derivazione delle funzioni composte:

ESERCIZIO : 15.18. *Sia $f(x) = |1-x^2|^3\,(1+\sin^2(x))$:*

- *posto $g(x) = \ln(f(x)$ scrivere l'espressione di $g(x)$,*
- *calcolare $g'(x)$,*
- *verificare che $f'(x) = g'(x)\cdot f(x)$.*

Soluzione:

Se $a > 0$ e $b > 0$ si ha $\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ pertanto per $x \neq -1, x \neq 1$ si ha
$$g(x) = \ln(f(x)) = \ln(|1-x^2|^3) + \ln(1+\sin^2(x))$$

[4] $|x|^\alpha$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ se $\alpha > 1$ e nel nostro caso $\alpha = 3/2$.

Tenuto conto della formula di derivazione del logaritmo naturale

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

si ha

$$g'(x) = \frac{-6x\,\mathrm{sign}(1-x^2)}{|1-x^2|} + \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x\,\mathrm{sign}(1-x^2)|1-x^2|^2(1+\sin^2(x)) + |1-x^2|^3\,2\sin(x)\cos(x) \\ g'(x)\cdot f(x) &= -6x\,\mathrm{sign}(1-x^2)|1-x^2|^2(1+\sin^2(x)) + |1-x^2|^3\,2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

ESERCIZIO : 15.19.

Dette $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ sia $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$:

- *verificare che F è continua nell'origine,*
- *dimostrare che F non è derivabile in $x_0 = 1$ e in $x_1 = 1$,*
- *calcolare $F'(x)$ per $x \neq 0$ e $x \neq 1$.*

Soluzione:

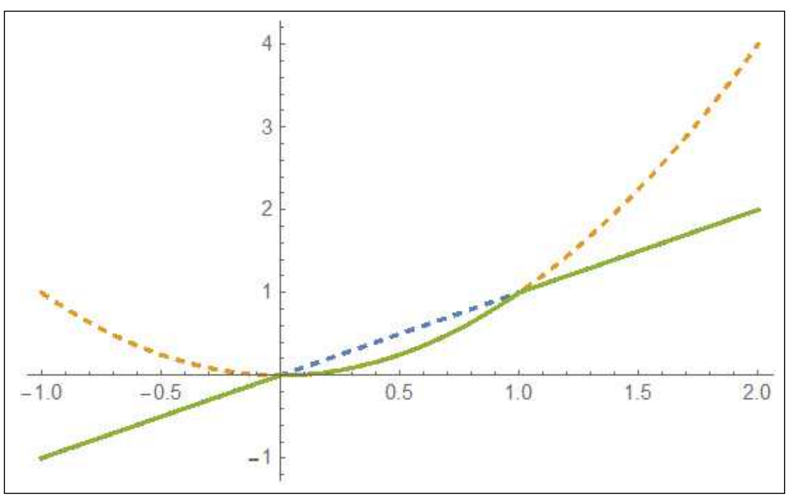


FIGURA 21. $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ sia $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

La continuità è vera in generale.

La derivabilità no perchè ci possono essere punti angolosi.

ESERCIZIO : 15.20. *Sia* $f(x) = x^3 + x + 13$

- *verificare che* $f(x)$ *è strettamente crescente,*
- *determinare l'immagine di* f*,*
- *detta* g *l'inversa di* f*, calcolare* $g(15)$*,*
- *determinare la derivata* $g'(15)$*.*

Soluzione:

- $f(x)$ è strettamente crescente perchè è somma di funzioni x^3 e $x+13$ strettamente crescenti,
- la funzione continua f è definita in $\mathbb{R}$, quindi la sua immagine è un intervallo: tenuto conto che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
si riconosce che l'intervallo immagine è $-\infty, +\infty)$,
- tenuto conto che $f(1) = 15$ si ha $g(15) = 1$,
- la regola di derivazione dell'inversa produce
$$g'(15) = \frac{1}{f'[g(15)]} = \frac{1}{f'[1]} = \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO : 15.21. *Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni negli intervalli indicati*

$$f(x) = \frac{x-x^2}{2+x^2} \quad \textit{in } [0,1] \qquad g(x) = (x^2-1)\,e^x \quad \textit{in } [-1,1] \qquad h(x) = 2x(1-x^2) \quad \textit{in } [0,1].$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) = \frac{x-x^2}{2+x^2} \quad \text{in } [0,1]}$$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(2+x^2)-(x-x^2)(2x)}{(2+x^2)^2} = -\frac{x^2+4x-2}{(2+x^2)^2}$$

Tenuto conto che

$$x^2+4x-2<0 \quad \text{per } -2-\sqrt{6} < x < -2+\sqrt{6} \approx 0,4$$

Quindi

$$f'(x) > 0\ \forall x \in [0, -2+\sqrt{6}), \qquad f'(x) < 0\ \forall x \in (-2+\sqrt{6}, 1]$$

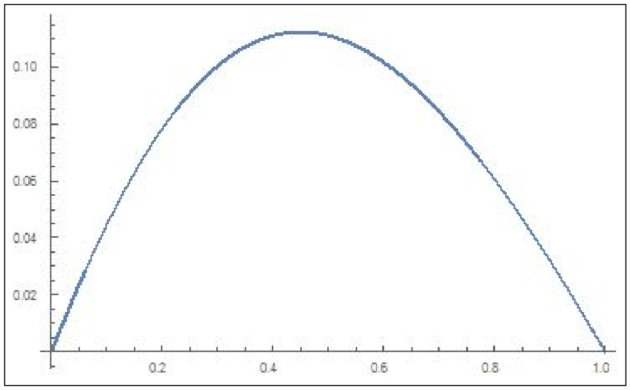


FIGURA 22. $f(x) = \dfrac{x - x^2}{2 + x^2} \quad \text{in } [0,1]$

Pertanto, abbreviando con $\uparrow$, $\downarrow$ le parole *crescente* e *decrescente*,

$$f(x) \uparrow \ \forall x \in [0, -2+\sqrt{6}), \qquad f(x) \downarrow \ \forall x \in (-2+\sqrt{6}, 1]$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f(-2+\sqrt{6}) \approx 0.11, \quad \min_{x\in[0,1]} f(x) = \min\{f(0), f(1)\} = 0$$

$\boxed{g(x) = (x^2-1)\, e^x \quad \text{in } [-1,1]}$

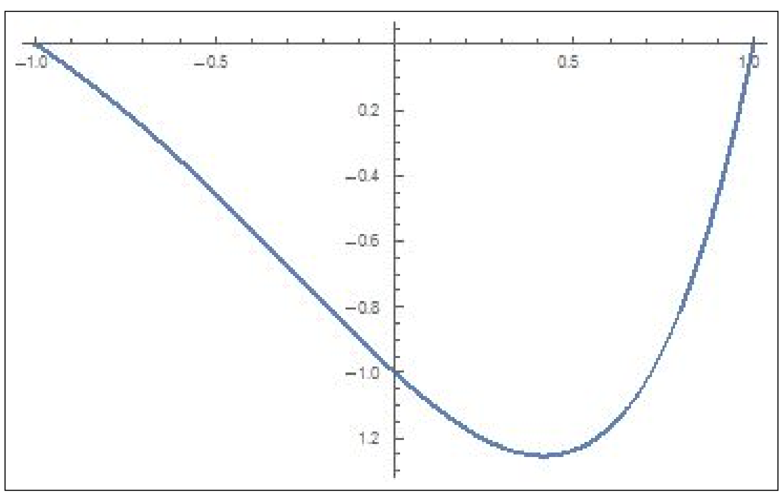


FIGURA 23. $g(x) = (x^2-1)\, e^x \quad \text{in } [-1,1]$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2-1) \cdot e^x \, = \, (x^2+2x-1) \cdot e^x$$

Tenuto conto che

$$\begin{array}{ll} x^2+2x-1>0 & x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},+\infty),\\ x^2+2x-1<0 & x\in(-1-\sqrt{2},\,-1+\sqrt{2}) \end{array}$$

riesce

$$\begin{array}{llllll} x\in[-1,-1+\sqrt{2}) & \to & f'(x)<0 & x\in(-1+\sqrt{2},1] & \to & f'(x)>0\\ x\in[-1,-1+\sqrt{2}) & \to & f(x)\downarrow & x\in(-1+\sqrt{2},1] & \to & f(x)\uparrow \end{array}$$

Quindi

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x)=f(-1+\sqrt{2})\approx -1.25, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x)=\max\{f(-1),f(1)\}=0$$

$$\boxed{h(x)=2x(1-x^2)\quad \text{in } [0,1]}$$

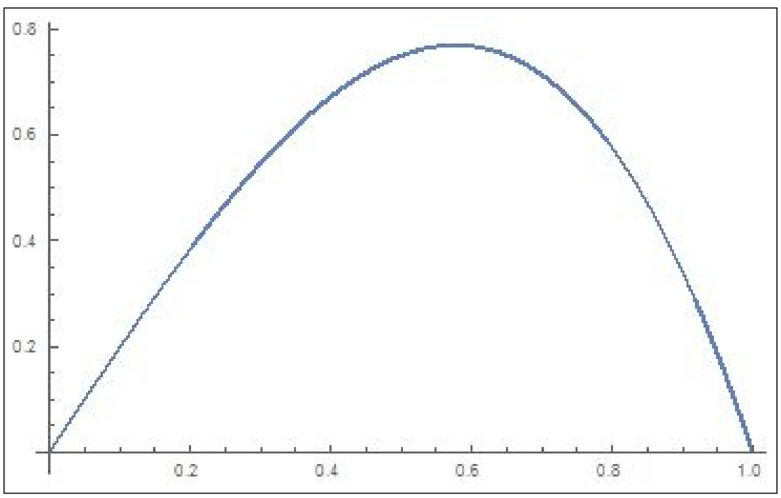


FIGURA 24. $h(x)=2x(1-x^2)\quad$ in $[0,1]$

$$f'(x)=2(1-x^2)+2x(-2x)=2-6x^2$$

Tenuto conto che

$$\begin{array}{ll} 2-6x^2>0 & x\in(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty),\\ 2-6x^2<0 & x\in(-\sqrt{1/3},\,+\sqrt{1/3}) \end{array}$$

riesce

$$\begin{array}{llllll} x\in(-\sqrt{1/3},+\sqrt{1/3}) & \to & f'(x)>0 & x\in(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty) & \to & f'(x)<0\\ x\in(0,\,\sqrt{1/3}) & \to & f(x)\uparrow & x\in(\sqrt{1/3},\,1] & \to & f(x)\downarrow \end{array}$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x)=f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\approx 0.77, \qquad \min_{x\in[0,1]} f(x)=\min\{f(0),\,f(1)\}=0$$

ESERCIZIO : 15.22. *Determinare tra i rettangoli di perimetro p assegnato quello di area massima. Ripetere l'esercizio per i triangoli rettangoli.*

Soluzione:

Rettangolo

Sia $2p > 0$ il perimetro assegnato: i due lati del rettangolo sono pertanto $x \in (0, p)$ e $p - x \in (0, p)$.

L'area è

$$a(x) = x(p-x), \quad \to \quad a'(x) = p - 2x$$

Il massimo si raggiunge evidentemente nel punto $x_0 = p/2$, scelta che indica come tra i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato il quadrato sia quello di area massima.

Triangolo rettangolo

Sia $p > 0$ il perimetro assegnato: i due cateti del triangolo rettangolo siano $x \in [0, p/2]$ ed $y \in [0, p/2]$, il terzo lato, l'ipotenusa, è naturalmente $\sqrt{x^2+y^2}$.

I due valori x ed y non sono indipendenti dal momento che deve valere la relazione pitagorica

$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = p \quad \to \quad y = \frac{p(p-2x)}{2(p-x)}$$

L'area è

$$a(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{px(p-2x)}{4(p-x)} \quad \to \quad a'(x) = \frac{p\left(p^2 - 4px + 2x^2\right)}{4(p-x)^2}$$

$$a'(x) > 0 \; \forall x \in [0, \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) p), \qquad a'(x) < 0 \; \forall x \in [\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) p, \, p/2)$$

Il triangolo rettangolo di perimetro p e area massima è pertanto il triangolo rettangolo isoscele che ha i cateti

$$x_0 = y_0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) p$$

Pertanto

$$\max_{x+y+\sqrt{x^2+y^2}=p} a(x) = a\left(p(1 - 1/\sqrt{2})\right) = \frac{1}{4}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) p^2 \approx 0.043\, p^2$$

ESERCIZIO : 15.23. *Dire per quali $a > 0$, la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-3x^2}}{1+ax}$ non ha nè massimi, nè minimi relativi.*

Soluzione:

Basta studiare per quali $a > 0$ la funzione $f(x)$ non ha punti stazionari:

$$f'(x) = -\frac{e^{-3x^2}\left(6ax^2+a+6x\right)}{(ax+1)^2}$$

è facile riconoscere che

$$6ax^2+a+6x \neq 0 \qquad \forall a > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Pertanto per tali valori la funzione $f(x)$ non ha nè massimi nè minimi relativi.

ESERCIZIO : 15.24. *Individuare il minimo assoluto e tutti i punti di minimo assoluto delle funzioni*

$$f(x) = |x-1|+|x+1|, \qquad g(x) = |x-1|+|x|+|x+1|, \qquad h(x) = \sum_{k=-3}^{3} |x-k|$$

Soluzione:

$\boxed{f(x) = |x-1|+|x+1|}$

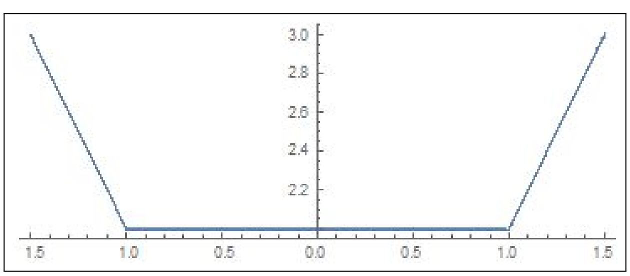


FIGURA 25. Esercizio 7: $f(x) = |x-1|+|x+1|$

I due addendi hanno espressione algebrica diversa a seconda che $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x-x-1 & -2x \quad \text{se}\, x < -1 \\ 1-x+x+1 & 2 \quad\;\; \text{se} -1 < x < 1 \\ x-1+x+1 & 2x \quad\; \text{se}\, 1 < x \end{cases}$$

Quindi il minimo vale 2 ed è assunto in corrispondenza di tutti i punti $x_0 \in [-1,1]$.

$$\boxed{g(x) = |x-1| + |x| + |x+1|}$$

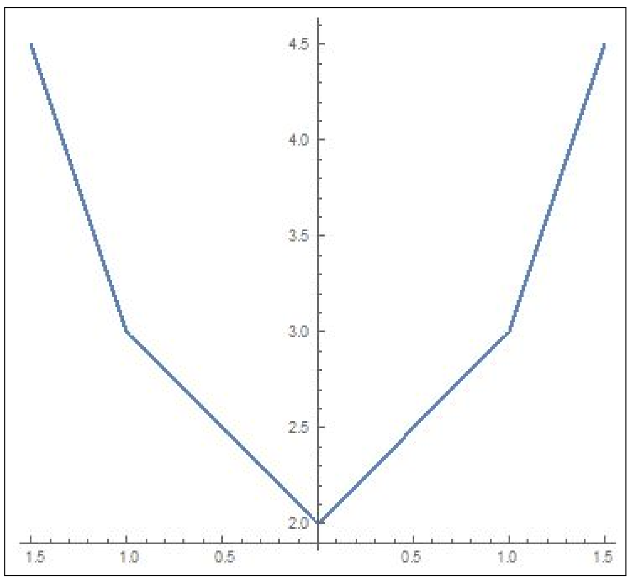


FIGURA 26. Esercizio 7: $\quad g(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$

Tenuto presente che $g(x)$ è continua in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \; g(x) \geq 0$$

si riconosce che esiste $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x)$.

Tenuto presente che $g(x)$ è lineare a tratti si riconosce che i punti di minimo cadono necessariamente nei punti in cui $g(x)$ è non derivabile

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

Pertanto

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) \; = \; \min\{g(-1), g(0), g(1)\} = \min\{3,2,3\} = 2$$

$$\boxed{h(x) = \sum_{k=-3}^{3} |x-k|}$$

Tenuto presente che $h(x)$ è continua in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty, \qquad \forall x\in\mathbb{R}:\ h(x)\geq 0$$

si riconosce che esiste $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} h(x)$.

Tenuto presente che $h(x)$ è lineare a tratti si riconosce che i punti di minimo cadono necessariamente nei punti in cui $h(x)$ è non derivabile

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \cdots \quad x_3 = 3$$

Pertanto

$$\min_{x\in\mathbb{R}} h(x) \;=\; \min\{h(-3),\cdots,h(3)\} = h(0) = 12$$

ESERCIZIO : 15.25. *Dire se $e^{|x-1|}$ ammette minimo in $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.*

Soluzione:

La funzione esponenziale $f(x) = e^{|x-1|}$, continua in $\mathbb{R}$ ha i due limiti per $x\to-\infty$ e $x\to+\infty$ entrambi $+\infty$, quindi come osservato altre volte ammette minimo m e, anzi, la sua immagine è l'intervallo illimitato $[m,+\infty)$.

Il fatto che la funzione $f(x) = e^{|x-1|}$ ammetta minimo in $\mathbb{R}$ è, in questo caso quasi ovvio tenuto conto che:

$$\forall x\in\mathbb{R}: |x-1|\geq 0, \quad \to \quad e^{|x-1|}\geq e^0$$

Quindi $e^0 = 1$ è il minimo e viene raggiunto nel punto $x_0 = 1$.

ESERCIZIO : 15.26.

Dette $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ sia $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$:

- *verificare che F è continua nell'origine,*
- *dimostrare che F non è derivabile in $x_0 = 1$ e in $x_1 = 1$,*
- *calcolare $F'(x)$ per $x\neq 0$ e $x\neq 1$.*

Soluzione:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \quad \to \quad F(0) = 0$$

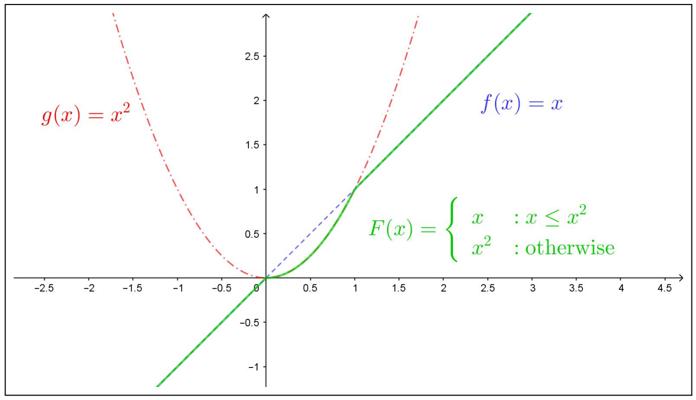


FIGURA 27. $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

$$\begin{cases} x \approx 0 & \to \quad f(0) \approx 0 \\ x \approx 0 & \to \quad g(0) \approx 0 \end{cases} \quad \to \quad x \approx 0 \quad \to \quad F(0) \approx 0 = F(0)$$

Quindi F è continua nell'origine.

$$\begin{cases} x \leq 0 & \to \quad F(x) = g(x) \\ 0 \leq x \leq 1 & \to \quad F(x) = f(x) \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{F(h) - F(0)}{h} = 1 \\ \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F(h) - F(0)}{h} = 0 \end{cases}$$

Quindi F non è derivabile nell'origine.

Nei punti $x \neq 0$ e $x \neq 1$ F è derivabile come segue:

$$\begin{cases} x < 0 & \to \quad F(x) = x \quad F'(x) = 1 \\ 0 < x < 1 & \to \quad F(x) = x^2 \quad F'(x) = 2x \\ 1 < x & \to \quad F(x) = x \quad F'(x) = 1 \end{cases}$$

16. I teoremi del calcolo

ESERCIZIO : 16.1. *Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.*

Soluzione:

Tenuto conto che $f(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e che

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 4) + e^x(2x - 2) = e^x\left\{x^2 + 2\right\} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si riconosce (Teorema di Lagrange) che $f(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO : 16.2. *Dimostrare, usando il Teorema di Lagrange, che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ riesce*

$$\left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| \le |x - y|,$$

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \le |x - y|, \quad \left|e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|x - y|$$

Soluzione:

$\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$	$\sin^2(x) - \sin^2(y) = (x - y)\sin(2\xi)$
$(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) - \arctan(y) = (x - y)\dfrac{1}{1+\xi^2}$
$\left(e^{-x^2/2}\right)' = -x\,e^{-x^2/2}$	$e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2} = (x - y)\left(-\xi\, e^{-\xi^2/2}\right)$

Osservate le seguenti maggiorazioni per le tre derivate prime

$$|\sin(2x)| \le 1, \quad \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \le 1, \quad \left|-x\,e^{-x^2/2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}$$

si riconoscono le tre stime

$$\begin{aligned}
\left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| &\le |x - y|, \\
|\arctan(x) - \arctan(y)| &\le |x - y|, \\
\left|e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2}\right| &\le \frac{1}{\sqrt{e}}\,|x - y|
\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 16.1. *Le stime delle derivate usate, stime che hanno giustificato le stime basate sul Teorema di Lagrange dell'Esercizio indicano che i grafici delle due funzioni* $\sin^2(x)$, $\arctan(x)$,

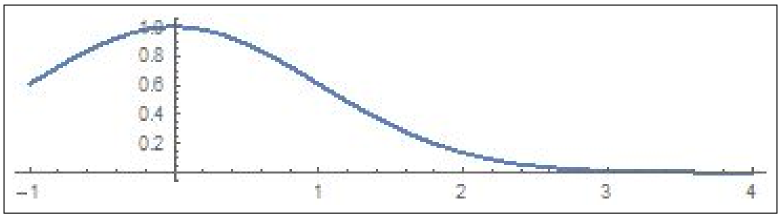


FIGURA 28. $e^{-x^2/2}$

hanno pendenze *limitate a non piú di* 45^0*, mentre la terza* $e^{-x^2/2}$ *ha* pendenze *limitate a non piú di* 30^0.

OSSERVAZIONE 16.2. *La stima* $\left|-xe^{-x^2/2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ *utilizzata sopra non è banale e può essere riconosciuta studiando il grafico della funzione* $f(x) = xe^{-x^2/2}$*:*

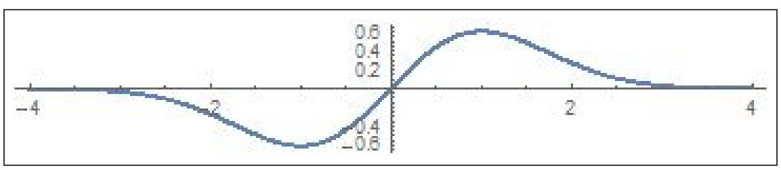


FIGURA 29. $f(x) = xe^{-x^2/2}$

- *si tratta di una funzione dispari,*
- *i limiti per* $x \to \pm\infty$ *sono zero,*
- *la derivata indica che* $f(x)$ *è crescente per* $x \in (-1, 1)$ *e decrescente fuori di tale intervallo,*
- *quindi* $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(-1)$, $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(1)$

Ne segue pertanto $|f(x)| \leq f(1) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

ESERCIZIO : 16.3. *Sia* $f(x) = x^3 - x$ *e sia* $h > 0$ *assegnato: determinare un punto di Lagrange* $\xi \in [0, h]$*, cioè tale che*

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(\xi)$$

Soluzione:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^3-h}{h}=h^2-1$$

Tenuto presente che $f'(x)=3x^2-1$ il punto ξ cercato deve soddisfare l'equazione

$$3\xi^2-1=h^2-1 \quad \to \quad 3\xi^2=h^2 \quad \to \quad \xi=\frac{1}{\sqrt{3}}h\in[0,h]$$

ESERCIZIO : 16.4. *Sia $f(x)=e^x$:*

- *rappresentare, servendosi del teorema di Lagrange, la differenza $e^{1/n}-e^0, \quad n=1,2,\dots,$*
- *riconoscere che $e^{1/n}-1\leq\frac{1}{n}e^{1/n}$*
- *riconoscere che*

$$e^{1/n}\leq\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\frac{n}{n-1}$$

Soluzione:

$$e^b-e^a=e^c(b-a) \quad \to \quad e^{1/n}-e^0=e^c\frac{1}{n}$$

Tenuto conto che e^x è crescente $c\in(0,1/n) \quad \to \quad e^c\leq e^{1/n}$ da cui

$$e^{1/n}-e^0\leq e^{1/n}\frac{1}{n}$$

$$e^{1/n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq 1$$

ovvero

$$e^{1/n}\leq\frac{1}{(1-\frac{1}{n})}=\frac{n}{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$e\leq\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

ESERCIZIO : 16.5. (Impegnativo) *Provare che se*

- *f è continua e dotata di derivate prima e seconda nell'intervallo I,*
- *e si annulla in almeno tre punti distinti di I,*

esiste almeno un punto $c\in I$ in cui riesce $f''(c)=0$.

Soluzione:

Siano $\alpha < \beta < \gamma$ i tre punti di I in cui la funzione si annulla.

Applicando il teorema di Rolle alla f riferendosi all'intervallo $[\alpha, \beta]$, ai cui estremi f prende lo stesso valore, lo zero, si deduce l'esistenza di $a \in [\alpha, \beta] \subset I$ in cui $f'(a) = 0$.

Analogamente riferendosi all'intervallo $[\beta, \gamma]$ si deduce l'esistenza di $b \in [\beta, \gamma] \subset I$ in cui $f'(b) = 0$.

Applicando ora il teorema di Rolle alla f' riferendosi all'intervallo $[a, b]$ f' prende lo stesso valore, lo zero, ai due estremi, si deduce l'esistenza di $c \in [a, b] \subset I$ in cui $f''(c) = 0$.

17. Le funzioni convesse

ESERCIZIO : 17.1. *Sia* $f(x) = x^2 e^{x^2}$ *riconoscere che*

- $f(x)$ *è convessa in* $\mathbb{R}$,
- *esiste il minimo,*
- *si ha* $f(x) \geq e\left(4x-3\right)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$

Soluzione:

Essendo $f(x) \in C^\infty$ per riconoscere la sua convessità basta riconoscere che la derivata seconda sia positiva:

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2}, \quad f''(x) = \left(10x^2 + 4x^4 + 2\right) e^{x^2} > 0$$

Il valotre $f(0) = 0$ è certamente il minimo, tenuto conto che $\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) \geq 0$.

La retta $y = e\left(4x-3\right)$ è la tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x_0 = 1$, infatti

$$f(1) = e, \quad f'(1) = 4e \quad \to \quad y = e + 4e(x-1) = e + 4ex - 4e$$

ed è noto che il grafico delle funzioni convesse si colloca al di sopra delle sue tangenti.

ESERCIZIO : 17.2. *Sia* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} |x-k|$ *provare che*

- $|x|$ *è convessa,*
- $|x-k|$ *è convessa per ogni k,*
- *la somma di due funzioni convesse è convessa,*
- f *è convessa anche per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione:

La convessità di una funzione corrisponde alla convessità dell'insieme del piano delimitato inferiormente dal grafico della funzione.

Tale convessità corrisponde a riconoscere che il grafico relativo all'intervallo $[a,b]$ si trovi al di sotto della corda di estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ovvero

$$\forall t \in [0,1]: \ f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

cioè

$$\left| ta+(1-t)b \right| \leq \left| ta \right| + \left| (1-t)b \right| = t|a| + (1-t)|b|$$

Il caso della funzioni $|x-k|$ è analogo

$$\left| ta+(1-t)b-k \right| = \left| t(a-k)+(1-t)(b-k) \right| \leq \left| t(a-k) \right| + \left| (1-t)(b-k) \right| =$$
$$= t|a-k| + (1-t)|b-k|$$

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono convesse allora

$$\begin{cases} f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \\ g(ta+(1-t)b) \leq tg(a)+(1-t)g(b) \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad f(ta+(1-t)b)+g(ta+(1-t)b) \leq t\Big(f(a)+g(a)\Big)+(1-t)\Big(f(b)+g(b)\Big)$$

Da quanto osservato:

- la convessità di $|x|$ e di $|x-1|$ implica la convessità di $|x|+|x-1|$,
- la convessità di $|x|+|x-1|$ e la convessità di $|x-2|$ implica la convessità di $|x|+|x-1+|x-2|$,
- ecc. ecc.

ESERCIZIO : 17.3.

Sia $f(x) = |x-1| + |x-2|$:

- *elencare i punti nei quali f non è derivabile,*
- *determinare l'espressione della derivata nei punti in cui f è derivabile,*
- *esaminare se f sia convessa.*

Soluzione:

$f(x) = |x-1| + |x-2|$ non è derivabile nei due punti $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x+2-x & \text{se} \quad x<1 & f'(x) = -2 \\ x-1+2-x & \text{se} \quad 1<x<2 & f'(x) = 0 \\ x-1+x-2 & \text{se} \quad 2<x & f'(x) = 2 \end{cases}$$

Se f e g (nel nostro caso $|x-1|$ e $|x-2|$) sono convesse allora è convessa anche $s = f+g$: infatti

$$\begin{cases} f[ta+(1-t)b] \leq tf(a)+(1-t)f(b) \\ g[ta+(1-t)b] \leq tg(a)+(1-t)g(b) \end{cases} \quad \to \quad s[ta+(1-t)b] \leq ts(a)+(1-t)s(b)$$

18. Il teorema di Cauchy e la regola di Hopital

ESERCIZIO : 18.1. *Siano* $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$, $g(x) = 1 + x + x^3$*: stimare, servendosi del teorema di Cauchy, i rapporti*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{f(n+1) - f(n)}{g(n+1) - g(n)}$$

Soluzione:

Le due funzioni sono derivabili, la g a denominatore ha derivata sempre diversa da zero.

Si ha quindi

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{g(n+1) - g(n)} = \frac{f'(n+\theta)}{g'(n+\theta}$$

Tenuto presente che

$$\frac{f'(n+\theta)}{g'(n+\theta} = \frac{6(n+\theta)^2 - 2}{3(n+\theta)^2 + 1} = 2 - \frac{4}{3(n+\theta)^2 + 1}$$

si riconosce che

$$\left| \frac{f(n+1) - f(n)}{g(n+1) - g(n)} - 2 \right| \leq \frac{4}{3(n+\theta)^2 + 1} \leq \frac{4}{3n^2}$$

Relazione che peraltro conferma il noto limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{g(n+1) - g(n)} = 2.$

ESERCIZIO : 18.2. *Assegnata la funzione* $r(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{3x} - 1}$*, determinare*

- $r(x)$, $x > 0$, *servendosi del teorema di Cauchy,*
- *il punto* ξ *del teorema di Cauchy corrispondente a* $x = 1$

Soluzione:

Dette $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = e^{3x} - 1$ si riconosce che $f(0) = g(0) = 0$ e quindi

$$(1) \qquad r(x) = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{e^\xi}{3e^{3\xi}} = \frac{1}{3e^{2\xi}}$$

In corrispondenza a $x = 1$ si ha

$$r(1) = \frac{e-1}{e^3 - 1} = \frac{1}{3e^{2\xi}} \quad \to \quad 3e^{2\xi} = \frac{e^3 - 1}{e - 1}$$

Tenuto conto che $e^3-1=(e-1)(e^2+e+1)$ si ha

$$3e^{2\xi}=e^2+e+1 \quad \to \quad \xi=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+e+1}{3}\right)$$

OSSERVAZIONE 18.1. *La relazione (1) ottenuta dal teorema di Cauchy era ottenibile anche per via algebrica osservando che*

$$\frac{e^x-1}{e^{3x}-1}=\frac{1}{e^{2x}+e^x+1}$$

tenendo conto che, teorema dei valori intermedi,

$$1\le e^{2x}+e^x+1\le 3e^{2x} \quad \to \quad \exists\xi\in(0,x):\ e^{2x}+e^x+1=3e^{2\xi}$$

e quindi

$$\forall x>0,\ \exists\xi\in(0,x): \quad r(x)=\frac{1}{3e^{2\xi}}$$

ESERCIZIO : 18.3. *Valutare, servendosi del teorema di Cauchy, la funzione* $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ *per* $x>0$.

Soluzione:

$$\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\frac{\cos(\xi)}{1}=\cos(\xi)$$

Se ne trae che

$$-1\le\frac{\sin(x)}{x}\le 1$$

ESERCIZIO : 18.4. *(teorico - impegnativo) La funzione* $f(x)$ *verifichi, insieme alla sua derivata, la relazione*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$$

allora riesce anche $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Soluzione:

Tenuto presente che

$$f(x)+f'(x)=\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=\frac{(e^xf(x))'}{(e^x)'}$$

si riconosce, dal teorema di Cauchy, che

$$\frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{e^b - e^a} = f(\xi) + f'(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

Scelto a sufficientemente grande si ha certamente $|f(\xi)+f'(\xi)| \approx 0$ da cui

$$\frac{e^b}{e^b - e^a} f(b) = \left(f(\xi) + f'(\xi) \right) + \frac{e^a}{e^b - e^a} f(a) \approx \frac{e^a}{e^b - e^a} f(a)$$

L'ultimo addendo a secondo membro è infinitesimo al crescere di b quindi sarà infinitesimo anche il primo membro

$$\lim_{b \to +\infty} \left| \frac{e^b}{e^b - e^a} f(b) \right| = 0$$

da cui, tenuto conto che

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{e^b}{e^b - e^a} = 1$$

segue $\lim_{b \to +\infty} f(b) = 0$.

ESERCIZIO : 18.5. *Confrontare l'ordine di infinito per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni*

$$\forall n > 0: \quad \ln(x^n), \quad x^n, \quad e^x, \quad e^{x^n}$$

Soluzione:

Confrontare l'ordine di infinito, cioè valutare la rapidità con cui divergono, significa studiare i limiti dei quozienti, cosa che si ottiene facilmente col teorema di Hopital.

$\boxed{\ln(x^n), \quad x^n}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \,\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Quindi x^n è *un infinito* di ordine superiore a quello di $\ln(x^n)$.

$\boxed{x^n, \quad e^x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \dots \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)\dots x^{(\alpha<0)}}{e^x} = 0$$

Quindi x^n è *un infinito* di ordine inferiore a quello di e^x.

$\boxed{e^{x^n}, \quad e^x}$

In questo caso la regola di Hopital non è utile, mentre invece è facile riconoscere che

$$\frac{e^{x^n}}{e^x} = e^{x^n - x}$$

da cui

$$\begin{array}{lllll} n < 1 & \to & x^n - x \to -\infty & \to & e^{x^n - x} \to 0 \\ n > 1 & \to & x^n - x \to +\infty & \to & e^{x^n - x} \to +\infty \end{array}$$

Da cui e^{x^n} è un infinito minore di quello di e^x se $n < 1$, mentre è un infinito di ordine superiore se $n > 1$.

ESERCIZIO : 18.6. *Calcolare servendosi del Teorema di de l'Hôpital i limiti:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}\right),$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x) + \sin(x)}{2x} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-6xe^{3x^2}}{\sin(2x) + 2xcos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3e^{3x^2}}{\frac{\sin(2x)}{2x} + cos(2x)} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x \cdot \tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/\cos^2(x) - 1}{\tan(x) + x/\cos^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)\sin(x) + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x}}{\cos(x)\frac{\sin(x)}{x} + 1} = 0$$

19. Programmazione lineare

ESERCIZIO : 19.1. *Determinare il minimo della funzione obiettivo*

$$f(x,y) = 90x + 80y$$

sull'insieme determinato dai vincoli:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 60 \\ x + 2y \geq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione:

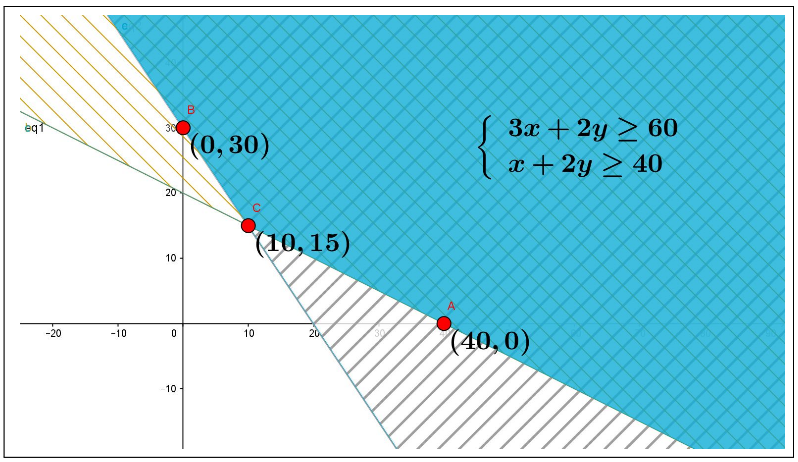


FIGURA 30. minimo di $f(x,y) = 90x + 80y$

Il minimo della funzione obiettivo si raggiunge in uno dei tre vertici del poligono determinato dai vincoli. Pertanto

$$f(40,0) = 3600, \quad f(10,15) = 2100, \quad f(0,30) = 2400$$

ed è quindi il valore 2100 raggiunto nel punto $(10,15)$.

ESERCIZIO : 19.2. *Risolvere graficamente il problema di programmazione lineare:*

$$\begin{cases} \min(150x + 300y) \\ 26x > 13 \\ 2x + y > 4 \\ 3x + 10y > 12 \\ x > 0, \ y > 0 \end{cases}$$

Soluzione: Il minimo non può che essere uno dei due valori in A o in B:

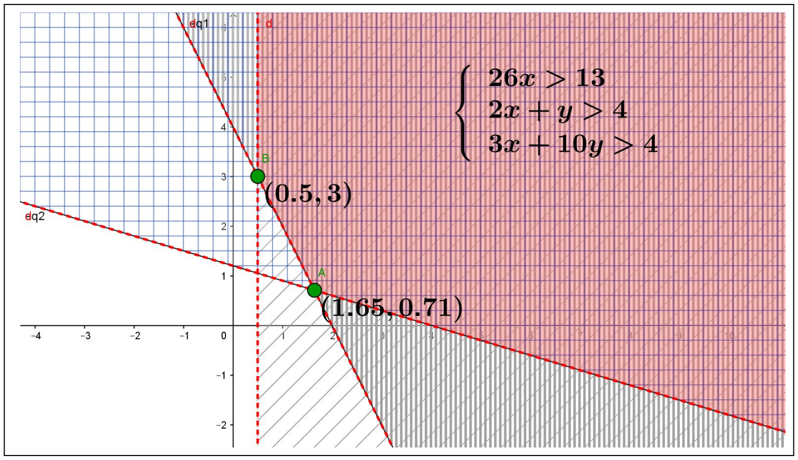


FIGURA 31. $\min(150x + 300y)$

$$\begin{cases} f(0.5,3) & = 975 \\ f(1.65,0.71) & \approx 460 \end{cases} \quad \to \quad \min(150x+300y) \approx 460$$

ESERCIZIO : 19.3. *Determinare il massimo della funzione obiettivo*

$$z = 20x + 12.5y$$

sull'insieme determinato dai vincoli:

$$\begin{cases} 12x + 23y & < 1500 \\ 35x + 20y & < 3150 \\ 40x + 25y & < 2000 \\ 230x + 180y & < 18000 \\ x > 0, \ y > 0 \end{cases}$$

Soluzione:

La funzione obiettivo $z = 20x + 12.5y$ vale k su tutti i punti della retta $20x + 12.5y = k$ disegnata in rosso in figura.

Il massimo della funzione obiettivo viene raggiunto in uno dei quattro vertici della regione vincolare.

È abbastanza evidente che:

- la funzione obiettivo raggiunge il massimo in B e in D,

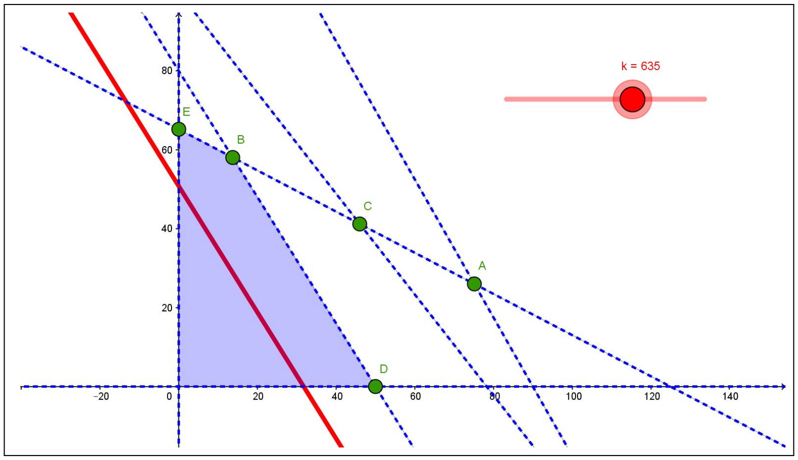


FIGURA 32. $z = 20x + 12.5y$

- il segmento BD appartiene alla retta $40x+25y=200$ ovvero $20x+12.5y=1000$, una delle rette su cui la funzione obiettivo è costante.

Se ne conclude che la funzione obiettivo ha massimo 1000, valore raggiunto su tutti i punti del segmento BD.

20. I polinomi di Taylor

ESERCIZIO : 20.1. *Posto $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ determinare il polinomio*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{[k]}(1)}{k!}(x-1)^k$$

ove con $f^{(0)}(1)$ si intende $f(1)$, con $f^{(1)}(1)$ si intende $f'(1)$, con $f^{(2)}(1)$ si intende $f''(1)$ ecc., e calcolare la differenza $f(x) - P(x)$.

Soluzione:

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 1 & \to \quad f^{(0)}(1) = 7 \\ f^{(1)}(x) = 3x^2 + 10x + 2 & \to \quad f^{(1)}(1) = 15 \\ f^{(2)}(x) = 6x + 10 & \to \quad f^{(2)}(1) = 16 \\ f^{(3)}(x) = 6 & \to \quad f^{(3)}(1) = 6 \\ f^{(4)}(x) = 0 & \to \quad f^{(4)}(1) = 0 \end{cases}$$

$$P(x) = 7 + 15(x-1) + 8(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Sviluppando le potenze si ottiene

$P(x) = 7 + (15x - 15) + (8x^2 - 16x + 8) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^3 + 5x^2 + 2x - 1$

da cui la scoperta che

$$P(x) \equiv f(x)$$

ESERCIZIO : 20.2. *Scrivere i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni, con punti iniziali e ordini assegnati,*

i. $f(x) = x - \sin x, \quad x_0 = 0,\ n = 5,$ **ii.** $f(x) = e^x - \cos(2\pi x), \quad x_0 = 1,\ n = 4,$

iii. $f(x) = \arctan x, \quad x_0 = 0,\ n = 2,$ **iv.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2,\ n = 2,$

v. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0,\ n = 3,$ **vi.** $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 2,\ n = 3$

Soluzione:

$\boxed{f(x) = x - \sin x,\ x_0 = 0,\ n = 5}$

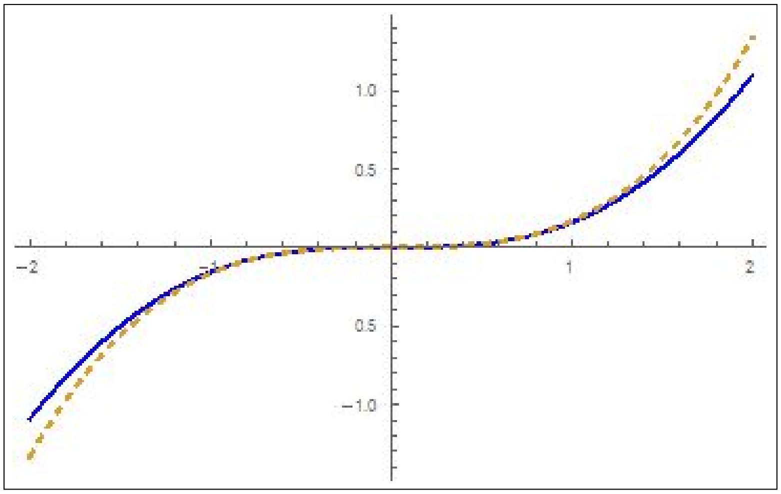


FIGURA 33. $f(x) = x - \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5$

$$\begin{cases} f(0) &= & 0 \\ f'(0) &= & 0 \\ f''(0) &= & 0 \\ f^{[3]}(0) &= & 1 \\ f^{[4]}(0) &= & 0 \\ f^{[5]}(0) &= & -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_5(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5$$

$\boxed{f(x) = e^x - \cos(2\pi x),\ x_0 = 1,\ n = 4}$

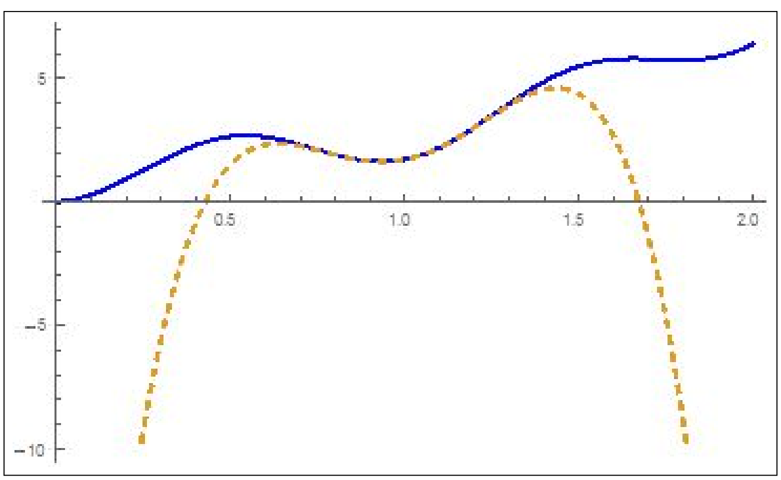


FIGURA 34. $f(x) = e^x - \cos(2\pi x)$, $x_0 = 1$, $n = 4$

$$\begin{cases} f(1) & = & -1+e \\ f'(1) & = & e \\ f''(1) & = & e+4\pi^2 \\ f^{[3]}(1) & = & e \\ f^{[4]}(1) & = & e-16\pi^2 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad T_4(x) = \frac{1}{24}\left(e-16\pi^4\right)(x-1)^4+\frac{1}{6}e(x-1)^3+\left(\frac{e}{2}+2\pi^2\right)(x-1)^2+e(x-1)+e-1$$

$\boxed{f(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0,\ n = 2}$

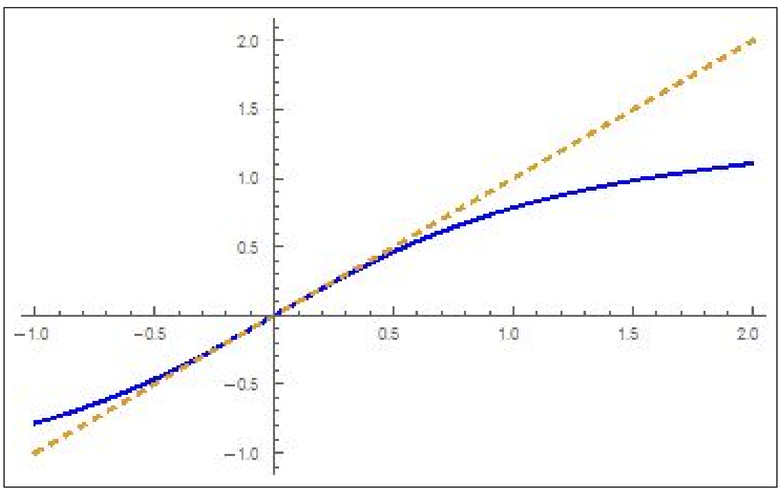


FIGURA 35. $f(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0,\ n = 2$

$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 1 \\ f''(0) & = & 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_2(x) = x$$

$\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 2,\ n = 2}$

$$\begin{cases} f(2) & = & -1 \\ f'(2) & = & 1 \\ f''(2) & = & 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_2(x) = -(x-2)^2+x-3$$

$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x},\ x_0 = 0,\ n = 3}$

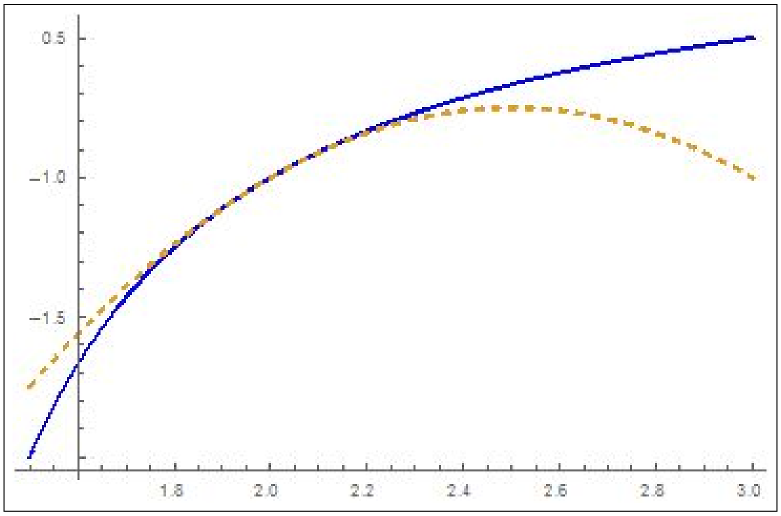


FIGURA 36. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$, $n = 2$

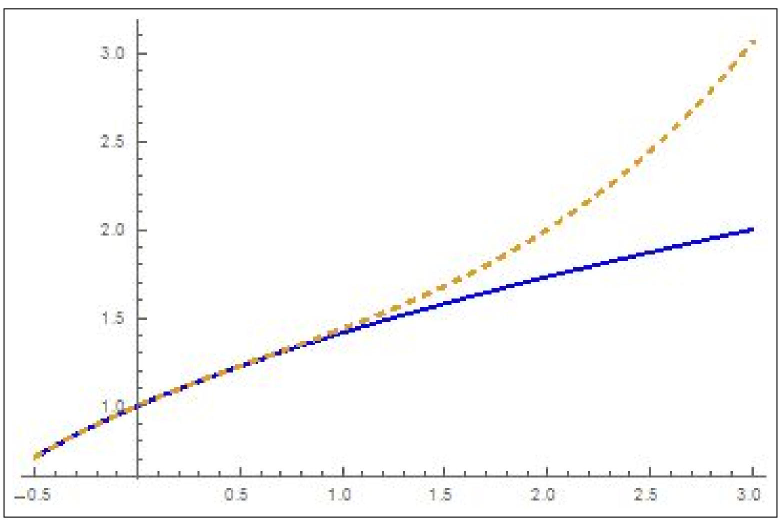


FIGURA 37. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & 1/2 \\ f''(0) & = & -1/4 \\ f^{[3]}(0) & = & 3/8 \end{cases} \quad \to \quad T_3(x) = \frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$

$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x},\ x_0 = 2,\ n = 3}$

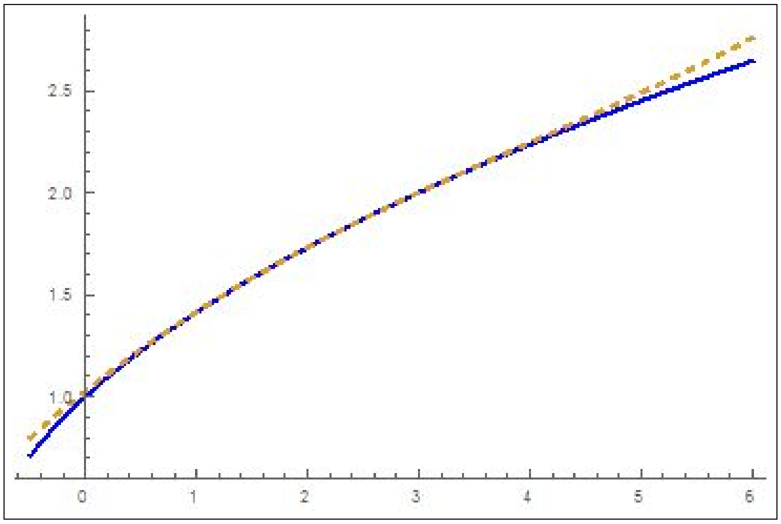


FIGURA 38. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$

$$\begin{cases} f(2) & = & \sqrt{3} \\ f'(2) & = & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ f''(2) & = & -\frac{1}{12\sqrt{3}} \\ f^{[3]}(2) & = & \frac{1}{24\sqrt{3}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_3(x) = \frac{(x-2)^3}{144\sqrt{3}} - \frac{(x-2)^2}{24\sqrt{3}} + \frac{x-2}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

ESERCIZIO : 20.3. *Siano $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ con $x \in I = [0,1]$,*
i. *scrivere i due rispettivi polinomi di Taylor T_f e T_g con $x_0 = 0, n = 3$;*
ii. *rappresentare i resti $R_f := f - T_f$ e $R_g := g - T_g$ nella forma di Lagrange;*
iii. *stimare gli errori di approssimazione $|R_f|$ e $|R_g|$ ed il loro massimo.*

Soluzione:

$$f(x) = \sin(x), \qquad T_f(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \qquad R_f(x) = \frac{-\cos(\xi)}{4!} x^4$$

$$g(x) = \ln(1+x), \quad T_g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x, \quad R_f(x) = \frac{-\dfrac{6}{(\xi+1)^4}}{4!} x^4$$

Al variare di $x \in [0,1]$ i resti di Lagrange $R_f(x), R_g(x)$ verificano le maggiorazioni in modulo

$$|R_f(x)| = \left| \frac{-\cos(\xi)}{4!} x^4 \right| \quad \leq \left| \frac{1}{4!} x^4 \right| \quad \leq \frac{1}{4!} \approx 0,04$$

$$|R_g(x)| = \left| \frac{-\dfrac{6}{(\xi+1)^4}}{4!} x^4 \right| \quad \leq \left| \frac{6}{4!} x^4 \right| \quad \leq \frac{1}{4} = 0.25$$

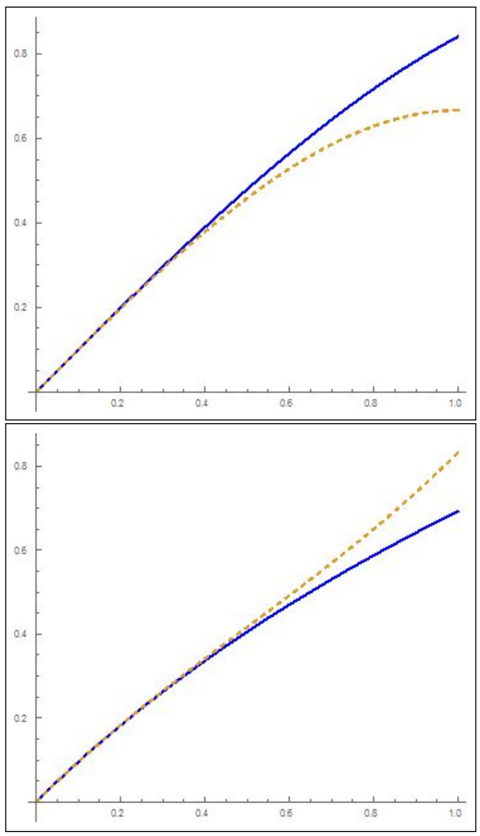


FIGURA 39. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ in blue,T_f e T_g tratteggiati

ESERCIZIO : 20.4. *Determinare i polinomi di Taylor di punto iniziale* $(0,0)$ *e ordine* $n = 2$ *per le funzioni*

$$e^x \cdot \cos(y), \quad \sin(x+y), \quad \ln(1+x^2+y^2)$$

Soluzione:

$$\begin{cases} e^x \cdot \cos(y) & \rightarrow \quad T_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}\left\{x^2 - y^2\right\} \\ \sin(x+y) & \rightarrow \quad T_2(x,y) = x + y \\ \ln(1 + x^2 + y^2) & \rightarrow \quad T_2(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 20.5.

Sia $f(x) = e^x + e^{-x}$:

- *dire se f è una funzione pari,*
- *calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$*
- *determinare il minimo di f*
- *determinare il polinomio di Taylor di f con $x_0 = 0$ ed $n = 2$.*

Soluzione:

$f(x) = 2\cosh(x)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

Minimo: $f'(x) = e^x - e^{-x}, \quad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$, minimo = $f(0) = 2$

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} = 2 + x^2$$

ESERCIZIO : 20.6.

Sia $f(x) = |x-1| + |x-2|$:

- *elencare i punti nei quali f non è derivabile,*
- *determinare l'espressione della derivata nei punti in cui f è derivabile,*
- *esaminare se f sia convessa (vedi Dispense, parte 3, pag10).*

ESERCIZIO : 20.7.

Siano $f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \cos(x^2)$:

- *determinare il polinomio di Taylor $T_2(x;0)$ di f relativo a $x_0 = 0$ ed $n = 2$*
- *determinare il polinomio di Taylor $T_4(x;0)$ di g relativo a $x_0 = 0$ ed $n = 4$*

- *scrivere le espressioni di Lagrange dei resti $f(x) - T_2(x;0)$ e $g(x) - T_4(x;0)$ (Dispense, parte 3, pag.43).*

Soluzione:

$$\cos(x) \quad \to \quad 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos(x^2) \quad \to \quad 1 - \frac{x^4}{2}$$

$$\cos(x) - \left\{1 - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{2!}\sin(c)\, x^3$$

$$\cos(x^2) - \left\{1 - \frac{x^4}{2}\right\} = \frac{1}{5!}\left(120c\sin\left(c^2\right) - 32c^5\sin\left(c^2\right) + 160c^3\cos\left(c^2\right)\right) x^5$$

ESERCIZIO : 20.8.

Siano $f(x) = \sin(x + \pi/2)$, $\quad g(x) = \ln(1+x)$, $\quad s(x) = \sqrt{24+x}$*:*

- *determinare per ciascuna delle tre funzioni i due polinomi di Taylor con $x_0 = 0$ e $n = 1$ e $n = 2$,*
- *scrivere in ciascuno dei sei casi le espressioni di Lagrange dei resti (Dispense, parte 3, pag.43).*

Soluzione:

$$f(x) = \sin(x+\pi/2) \quad \to \quad \begin{cases} n=1 & \to \quad 1 & \to \quad -\frac{1}{2}\cos(c)\,x^2 \\ n=2 & \to \quad 1 - \frac{x^2}{2} & \to \quad \frac{1}{3!}\sin(c)\,x^3 \end{cases}$$

$$g(x) = \ln(1+x) \quad \to \quad \begin{cases} n=1 & \to \quad x & \to \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{(c+1)^2}\,x^2 \\ n=2 & \to \quad x - \frac{x^2}{2} & \to \quad \frac{1}{3!}\,\frac{2}{(c+1)^3}\,x^3 \end{cases}$$

$$s(x) = \sqrt{24+x} \quad \to \quad \begin{cases} n=1 & \to \quad \frac{x}{4\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} & \to \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4(c+24)^{3/2}}x^2 \\ n=2 & \to \quad -\frac{x^2}{384\sqrt{6}} + \frac{x}{4\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} & \to \quad \frac{1}{3!}\,\frac{3}{8(c+24)^{5/2}}x^3 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 20.9. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^8}-1}{x^5\,\sin(x^3)}$$

servendosi per il numeratore e per il denominatore di opportuni polinomi di Taylor.

Soluzione:

$$\frac{e^{x^8}-1}{x^5\,\sin(x^3)} \approx \frac{x^8+\dots}{x^5\,x^3+\dots} \approx 1$$

21. Modelli analitici fondamentali

ESERCIZIO : 21.1. *Determinare l'espressione analitica di una funzione continua $f(x)$, positiva, tale che*

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $f(x)$ *sia crescente in* $(-\infty, 1]$
- $f(1) = 4$,
- $f(x)$ *sia dedcrescente in* $(1, +\infty)$

Soluzione:

La funzione $4\,e\,x\,e^{-x}$ soddisfa le condizioni nella semiretta $[0.5, +\infty)$.

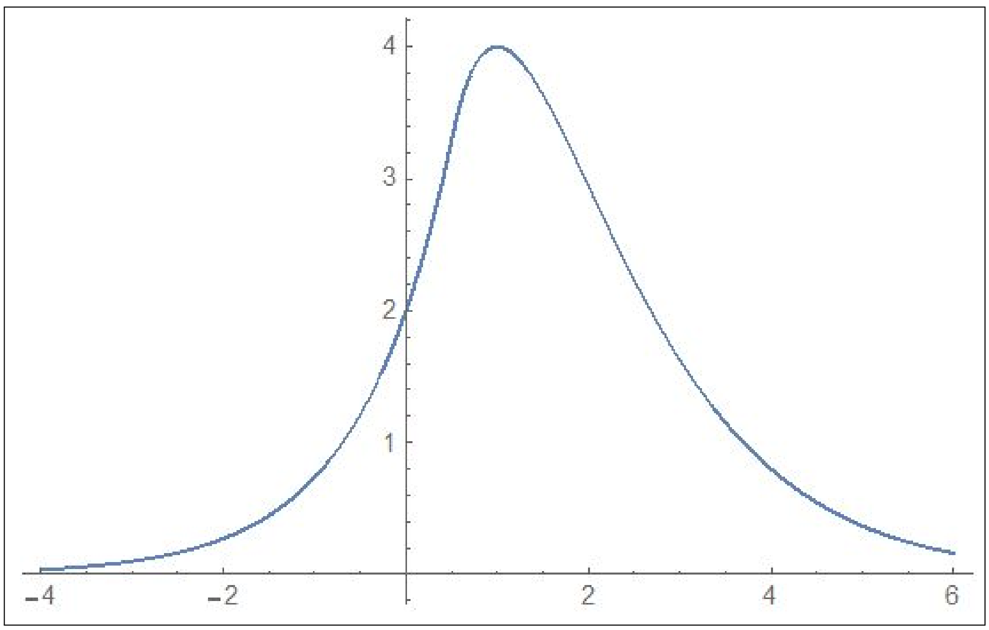


FIGURA 40. $f(x), \quad f(1) = 4, \ldots$

Per soddisfare le richieste occorre modificare tale funzione a sinistra di 0.5 servendosi, ad esempio ancora dell'esponenziale $k\,e^x$ scegliendo k in modo che il raccordo in 0.5 avvernga con continuità

$$k\,e^{0.5} = 4 \times 0.5\,e^{-0.5} \quad \to \quad k = \frac{2}{e}$$

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e}e^x & se \quad x \le 0.5 \\ 4\,e\,x\,e^{-x} & se \quad x > 0.5 \end{cases}$$

soddisfa tutte le condizioni.

ESERCIZIO : 21.2. *Determinare l'espressione analitica di una funzione che presenti oscillazioni tra 3 e -1 inizialmente molto frequenti e successivamente sempre più stabilizzate sul periodo 2π.*

Soluzione:

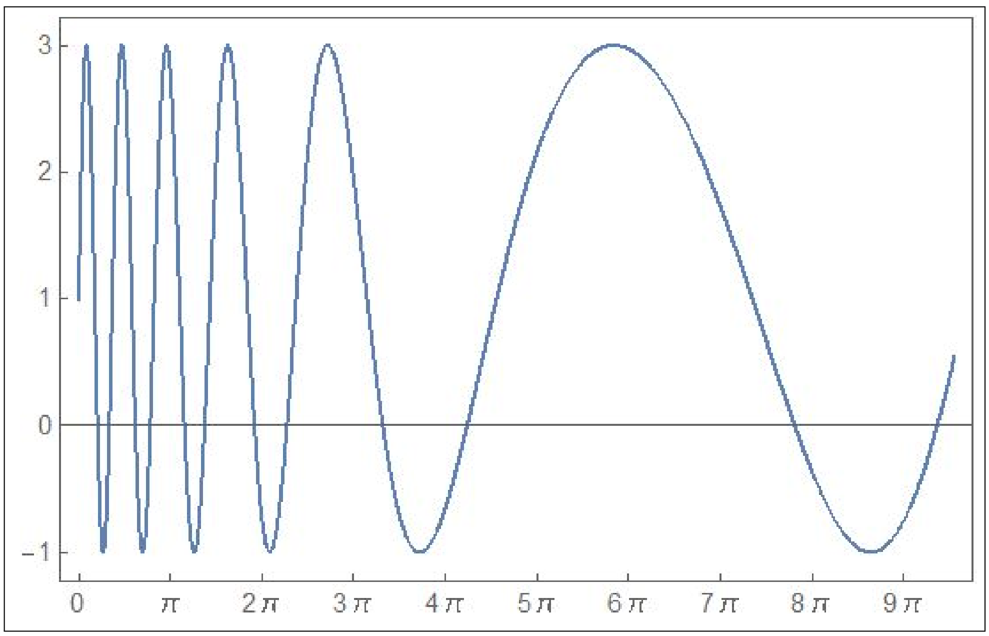


FIGURA 41. $2\sin\left(\left(5e^{-t/10}+1\right)t\right)+1$

Funzioni che presentino oscillazioni tra -1 e 3 sono, ad esempio le

$$1+2\,\sin(\omega(t)\,t)$$

Per soddisfare la richiesta del problema basta quindi immaginare che $\omega(t)$ vari nel tempo essendo

- grande per t piccolo,
- sempre più vicina a 1 per t grande.

Una scelta potrebbe essere

$$\omega(t) = 1+5\,e^{-t/10}$$

Una funzione che soddisfa le richieste del problema può quindi essere

$$f(t) = 1 + 2\sin\left((1 + 5e^{-t/10})\,t\right)$$

ESERCIZIO : 21.3. *Determinare l'espressione analitica di una funzione che presenti la crescita lineare $1 + \frac{1}{2}t$, dopo un disturbo iniziale destinato a smorzarsi nel tempo.*

Soluzione:

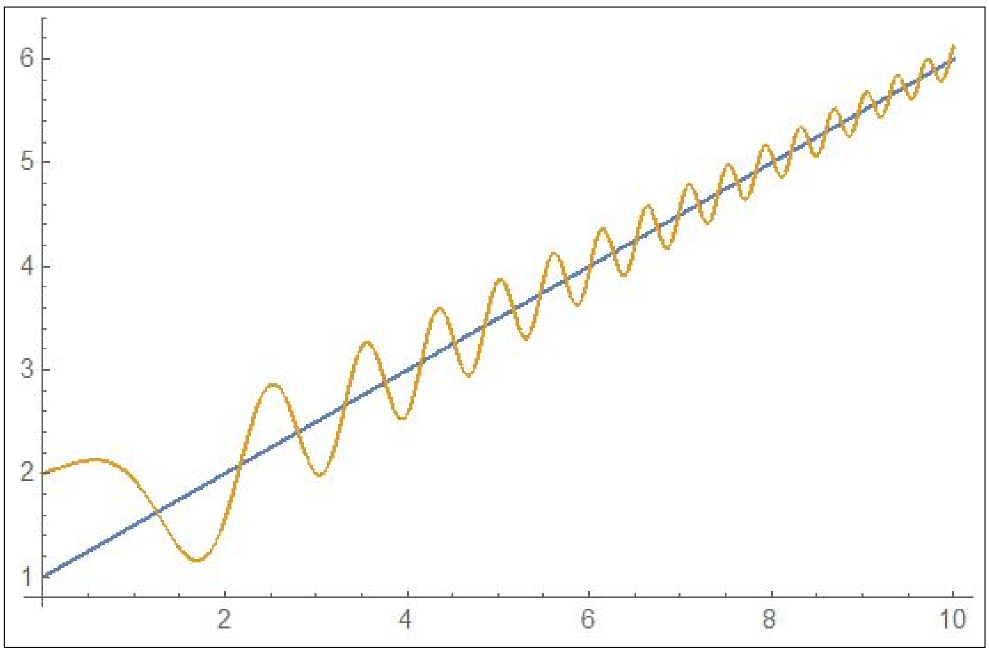


FIGURA 42. $e^{-t/5}\cos\left(t^2\right) + \dfrac{t}{2} + 1$

Funzioni che presentino l'andamento richiesto sono

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \varepsilon(t)$$

con $\varepsilon(t)$ infinitesima.

Una possibile soluzione è

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}t + e^{-t/5}\cos(t^2)$$

22. Integrazione

ESERCIZIO : 22.1. *Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ e l'intervallo $I = [-1,1]$*

- *calcolare la somma integrale inferiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,*
- *calcolare la somma integrale superiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,*
- *calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.*

Soluzione:

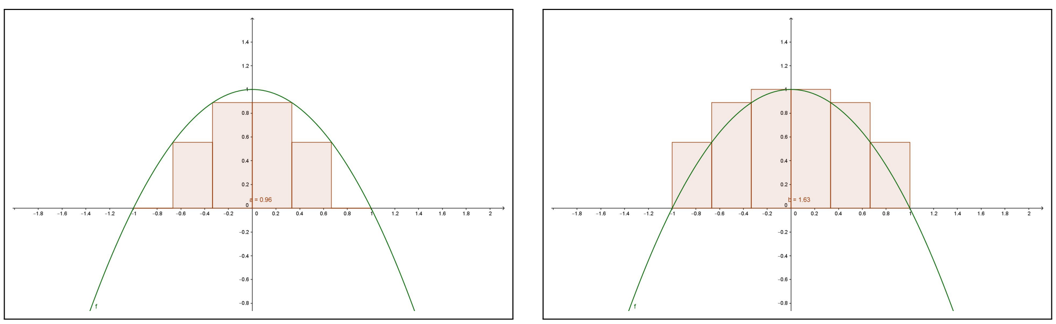


FIGURA 43. $f(x) = 1 - x^2$

Suddividere l'intervallo $[-1,1]$ in 6 parti uguali significa

$$[-1,1] = [-1,-2/3] \cup [-2/3,-1/3] \cup [-1/3,0] \cup [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$$

Considerato che la funzione $f(x) = 1 - x^2$ è crescente in $[-1,0]$ e decrescente in $[0,1]$ gli estremi inferiori e_i e superiori E_i in ciascuno dei 6 intervallini sono:

$$\begin{array}{lll}
1 & e_1 = 0 & E_1 = f(-2/3) \\
1 & e_2 = f(-2/3) & E_2 = f(-1/3) \\
1 & e_3 = f(-1/3) & E_3 = 1 \\
1 & e_4 = f(1/3) & E_4 = 1 \\
1 & e_5 = f(2/3) & E_5 = f(1/3) \\
1 & e_6 = 0 & E_6 = f(2/3)
\end{array}$$

Da cui, tenuto conto che f è funzione pari

$$S'\{f,[-1,1]\} = \{2f(2/3) + 2f(1/3)\}\frac{1}{3} = \frac{26}{27}, \quad S''\{f,[-1,1]\} = \{2f(2/3) + 2f(1/3) + 2\}\frac{1}{3} = \frac{44}{27}$$

$$S'\{f,[-1,1]\} \approx 0,962 \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{4}{3} \approx 1.333 \leq S''\{f,[-1,1]\} \approx 1,629$$

ESERCIZIO : 22.2. *Disegnare i grafici delle funzioni $|x|$, $|x-1|$, $|x|+|x-1|$ e calcolare con i valori delle aree dei sottografici ottenibili attraverso la geometria gli integrali $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$, $\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$, $\int_{-1}^{2} |x|+|x-1|\,dx$.*

Soluzione:

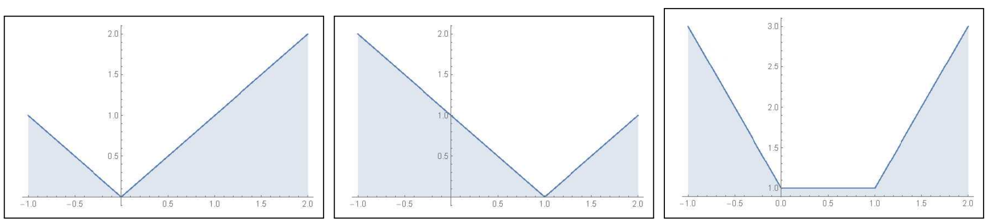


FIGURA 44. $|x|$, $|x-1|$, $|x|+|x-1|$, $-1 \leq x \leq 2$

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \frac{5}{2}, \quad \int_{-1}^{2} |x-1|\,dx = \frac{5}{2}, \quad \rightarrow \quad \int_{-1}^{2} (|x|+|x-1|)\,dx = 5$$

ESERCIZIO : 22.3. *Sia* $f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 3 & se \quad x \in [\frac{1}{4}, 1) \\ 1 & se \quad x \in [1, 2) \\ \frac{1}{2} & se \quad x \in [2, 4] \end{cases}$

- *disegnare il grafico di f,*
- *calcolare $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$*

Soluzione:

$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{4} + 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{19}{4} = 4.75$$

ESERCIZIO : 22.4. *Detta $[x]$ la funzione parte intera calcolare l'integrale* $\int_{-0.75}^{3.6} [x]\,dx.$

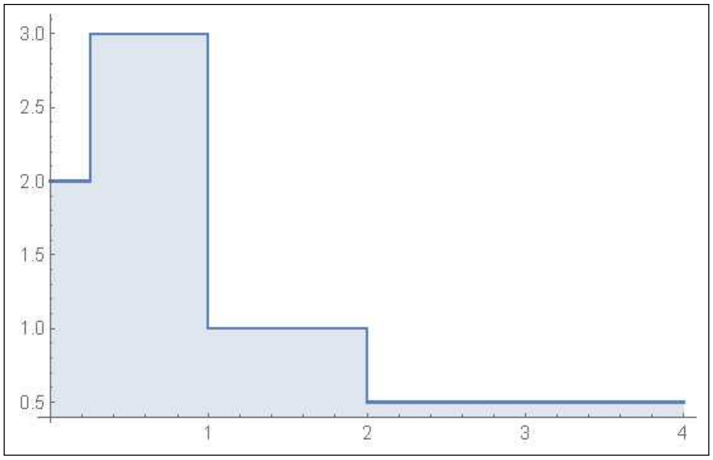


FIGURA 45. $f(x)$ costante a tratti.

Soluzione:

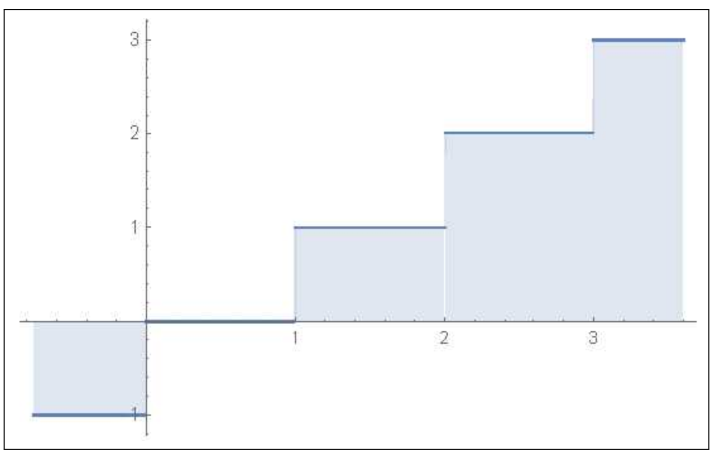


FIGURA 46. $[x], \quad -0.75 \leq x \leq 3.6$

$$\int_{-0.75}^{3.6} [x]\, dx = -1 \times 0.75 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0.6 = 4.05$$

Nota: In molti software la funzione $[x]$ si chiama *Floor(x)*.

ESERCIZIO : 22.5. *Assegnata la funzione $f(x) = [x]$, parte intera, determinare l'integrale $\int_{-2}^{1.5} f(x)\, dx$*

Soluzione:

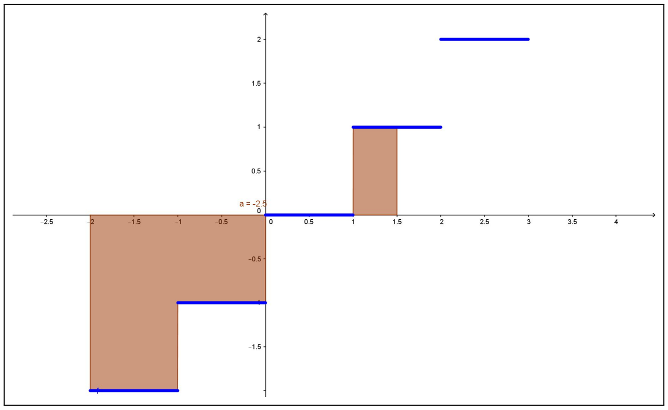


FIGURA 47. $f(x) = [x],\ \int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx = -2\times 1 - 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times 0.5 = -2.5$$

ESERCIZIO : 22.6. *Assegnata la funzione $f(t) = t\cdot e^{-t^2}$, calcolare gli integrali*
$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt, \quad \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$$

Soluzione:

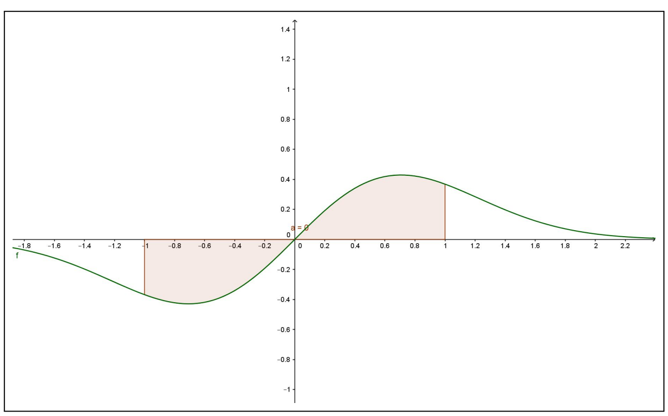


FIGURA 48. $f(t) = t\cdot e^{-t^2}$

$$\int_{-1}^{1} t\cdot e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} -2t\cdot e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^{-t^2}\right)'\,dt = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\left|t\cdot e^{-t^2}\right|\,dt = -\int_{-1}^{0} t\cdot e^{-t^2}\,dt + \int_{0}^{1} t\cdot e^{-t^2}\,dt = 1-\frac{1}{e}$$

ESERCIZIO : 22.7. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx, \qquad \int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\frac{3}{2}\,dx = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx = \int_0^1\left\{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right\}dx = \log\left(\frac{3}{4}\right)-\log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$\int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left.\frac{-1}{x+1}\right|_0^4 = -\frac{1}{5}+\frac{1}{1} = \frac{4}{5}$$

ESERCIZIO : 22.8. *Calcolare l'area della regione piana* $A:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

Soluzione:

$$Area\ = \int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\,dx = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO : 22.9. *Stimare, servendosi del teorema della media, il seguente integrale* $\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)\,dx$

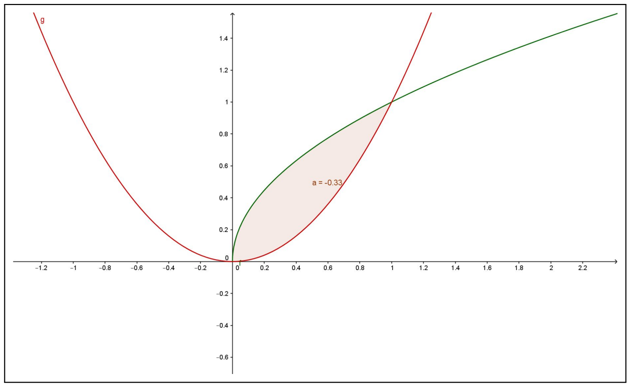


FIGURA 49. $A:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$

Soluzione:

$$\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)dx=\left(5+e^{-\xi^2}\right)(20-10)$$

Tenuto presente che $\xi\in[10,20]$ riesce

$$0\le e^{-\xi^2}\le e^{-10^2}\approx 0 \quad\to\quad \left(5+e^{-\xi^2}\right)\approx 5$$

riesce

$$\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)dx\approx 50$$

23. Metodi di Integrazione

ESERCIZIO : 23.1. *Calcolare, servendosi delle primitive, i seguenti integrali*

$$\int_0^1 (3x^2-5x+1)\,dx,\ \int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx,\ \int_0^1 4e^{2x+1}\,dx,\ \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}\,dx,$$

Soluzione:

$f(x)$	$F(x)$	$\int_0^1 f(x)dx$
$3x^2-5x+1$	$x^3-\frac{5}{2}x^2+x$	$\int_0^1 (3x^2-5x+1)\,dx = -\frac{1}{2}$
$\sin(2x)$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = 0$
$4e^{2x+1}$	$2e^{2x+1}$	$\int_0^1 4e^{2x+1}\,dx = 2e\left(e^2-1\right)$
$(2x+1)e^{x^2+x}$	e^{x^2+x}	$\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}\,dx = e^2-1$

ESERCIZIO : 23.2. *Determinare le seguenti funzioni primitive,*

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx,\ \int x^2\sin(x^3)\,dx,\ \int 2x(5+x^2)^9\,dx$$

Soluzione:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx \quad \rightarrow \quad \ln(|x^2+3x+1|)$$

$$\int x^2\sin(x^3)\,dx \quad \rightarrow \quad -\tfrac{1}{3}\cos(x^3)$$

$$\int 2x(5+x^2)^9\,dx \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{10}(5+x^2)^{10}$$

ESERCIZIO : 23.3. *Calcolare i seguenti integrali, tenute presenti le derivate di* $\ln(x)$ *e di* $\arctan(x)$,

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{3+x}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{x-5}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{9+4x^2}\,dx$$

Soluzione:

Tenuto presente che servendosi della regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\ln(|x|) & = \frac{1}{x}, \\ \frac{d}{dx}\arctan(x) & = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\ln(|f(x)|) & = \frac{f'(x)}{f(x)}, \\ \frac{d}{dx}\arctan(g(x)) & = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{3+x}\,dx &= [\ln(|3+x|)]_0^1 && = \ln(4)-\ln(3)=\ln(4/3) \\
\int_0^1 \frac{1}{x-5}\,dx &= [\ln(|x-5|)]_0^1 && = \ln(4)-\ln(5)=\ln(4/5) \\
\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= [\arctan(x)]_0^1 && = \frac{\pi}{4} \\
\int_0^1 \frac{1}{9+4x^2}\,dx &= \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{4}{9}x^2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2}\,dx && = \left[\frac{1}{6}\arctan\left(\tfrac{2}{3}x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\arctan\left(\tfrac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

ESERCIZIO : 23.4. *Calcolare i seguenti integrali, senza inseguire improbabili primitive,*

$$\int_{-15}^{15} (1+x^{17})\,dx,\qquad \int_{-4}^{4} \sin^3(x)e^{x^2}\,dx,\qquad \int_{-2}^{2} x^2\sin(x^3)\,dx$$

Soluzione:

La funzione x^{17} è dispari, quindi dalle relazioni di linearit‘a e di additività

$$\int_{-15}^{15} (1+x^{17})\,dx = 30 + \int_{-15}^{0} x^{17}\,dx + \int_0^{15} x^{17}\,dx$$

e dal fatto che la funzione integranda è dispari discende che

$$\int_{-15}^{0} x^{17}\,dx = -\int_0^{15} x^{17}\,dx$$

da cui

$$\int_{-15}^{15} (1+x^{17})\,dx = 30$$

Risultato analogo per gli altri due integrali.

Si ricordi quindi che se f, come x^{17}, $\sin^3(x)$, $x^2\sin(x^3)$, è una funzione dispari gli integrali su intervalli simmetrici rispetto all'origine

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

sono tutti nulli.

ESERCIZIO : 23.5. *Assegnata la funzione $f(t) = t\,\sin(t)$, e posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$*

- *determinare i punti stazionari di $F(x)$,*
- *classificare quali siano di massimo e quali di minimo relativi.*

Soluzione:

Punti stazionari: $F'(x) = 0$. Tenuto conto che $F'(x) = x\,\sin(x)$ i punti stazionari sono $x_k = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Tenuto conto del segno della $F'(x) = x\,\sin(x)$ tra un punto stazionario e l'altro si riconosce che $F(x)$

- è decrescente in $[-2\pi, -\pi]$
- è crescente in $[-\pi, \pi]$
- è decrescente in $[\pi, 2\pi]$
- è crescente in $[2\pi, 3\pi]$
- ecc.

Pertanto -2π è punto di massimo, $-\pi$ è punto di minimo, π punto di massimo, 2π punto di minimo, ecc.

ESERCIZIO : 23.6. *Si determini il polinomio di Taylor di ordine $n = 3$ e punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Soluzione:

$$P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{6}F'''(0)x^3$$

Tenuto conto che del teorema fondamentale del calcolo, $F(0) = 0, F'(x) = e^{-x^2}$, si riconosce che

$$F'(0) = 1, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = -2$$

da cui

$$P(x) = x - \frac{1}{3}x^3$$

Si noti che il risultato poteva anche essere previsto ricordando che

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^2) \quad \to \quad F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

da cui il polinomio di Taylor cercato

$$x - \frac{1}{3}x^3$$

ESERCIZIO : 23.7. *Disegnare il grafico della funzione $f(t) = \min\{1, t^2\}$ e calcolare la funzione integrale*

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \geq 0$$

Soluzione:

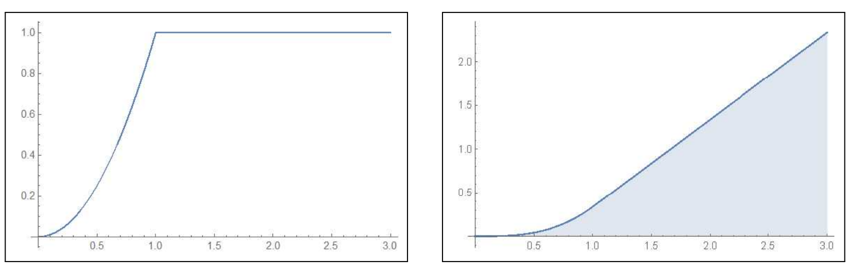


FIGURA 50. $f(t), \quad G(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad 0 \leq x \leq 3$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \frac{1}{3} + (x-1) & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

ESERCIZIO : 23.8. *Calcolare, servendosi della regola di integrazione per parti, gli integrali*

$$\int_0^{2\pi} \sin^m(x)\,dx, \ m = 1, 2, 3$$

Soluzione:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cdot(-\cos(x))\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(1-\sin^2(x)\right)\,dx$$
$$2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = 2\pi \quad \to \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2(x)\right)(\cos(x))'\,dx = 0$$

OSSERVAZIONE 23.1. *La somiglianza evidente delle due funzioni* $\sin^2(x)$ *e* $\cos^2(x)$ *conduce naturalmente alla uguaglianza*

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$$

Tenuto conto del resto che $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ *si ha*

$$\int_0^{2\pi} \left\{\sin^2(x)+\cos^2(x)\right\}\,dx = 2\pi$$

da cui, per l'uguaglianza osservata si ricava anche, per ciascuno dei due integrali, l'ovvio valore

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$

Con osservazioni evidenti e altrettanto vere si ottengono anche i valori

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

ESERCIZIO : 23.9. *Calcolare l'integrale* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ *servendosi della sostituzione* $x = \sin(t)$.

Soluzione:

Tenuto conto dell'equazione cartesiana della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$

$$x^2+y^2 = 1 \quad \to \quad y^2 = 1-x^2 \quad \to \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

si riconosce che l'integrale proposto rappresenta l'area del sottografico della funzione
$y = \sqrt{1-x^2}$ relativo all'intervallo $x \in [0,1]$, un quarto del cerchio di area π.
L'area di tale sottografico è pertanto $\pi/4$.

L'integrale proposto può naturalmente essere calcolato anche per via diretta, ricorrendo alla sostituzione $y = \sin(t),\ t \in [0, \pi/2]$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Si noti che $\sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$ ma, per $t \in [0, \pi/2]$ riesce $\cos(t) \geq 0$ da cui

$$t \in [0, \pi/2]: \quad \to \quad \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

ESERCIZIO : 23.10. *Servendosi della* regola di integrazione per parti *calcolare i seguenti integrali*

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx$$

Soluzione:

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x)\,dx = \int_0^{2\pi} x(-\cos(x))'\,dx = [-x\cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = -2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\,(-\cos(x))'\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\sin^2(x))\,dx \quad \to \quad 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = 2\pi$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(3x)\,(\frac{1}{4}\sin(4x))'\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin(3x)\sin(4x)\right]_0^{2\pi} - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

Scegliendo nell'altro modo i fattori sui quali applicare la regola di integrazione per parti si ha anche

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\,\cos(4x)\,dx = \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{3}\cos(3x))'\,\cos(4x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\,\cos(4x)\right]_0^{2\pi} - \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\,\sin(4x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\,\cos(4x)\,dx = -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\,\sin(4x)\,dx$$

Detto

$$A = \int_0^{2\pi} \sin(3x)\,\cos(4x)\,dx, \quad B = \int_0^{2\pi} \cos(3x)\,\sin(4x)\,dx$$

Le due relazioni cui si è giunti producono il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} A + \frac{3}{4}B = 0 \\ \\ A + \frac{4}{3}B = 0 \end{cases} \quad \to \quad \frac{3}{4}B = \frac{4}{3}B \quad \to \quad B = 0$$

e quindi di conseguenza $A = 0$.

Il risultato

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\,\cos(4x)\,dx = 0$$

si ricorda generalmente dicendo che le due funzioni $\sin(3x)$ e $\cos(4x)$ *sono ortogonali* sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Sono ugualmente *ortogonali* sull'intervallo $[0, 2\pi]$ tutte le coppie

$$\sin(nx)\cos(mx) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

come pure tutte le coppie

$$\sin(nx)\sin(mx), \quad \cos(nx)\cos(mx) \qquad n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$$

Si ricordi anche che

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ESERCIZIO : 23.11. *Ricordando che* $(P(x)\,e^x)' = \left\{P'(x) + P(x)\right\}e^x$ *determinare le primitive*

$$\int x\,e^x\,dx, \quad \int x^3\,e^x\,dx, \quad \int (x^4 + 3x + 1)\,e^x\,dx, \quad \int x^5\,e^{2x}\,dx$$

Soluzione:

Una primitiva di $x\,e^x$ sarà sicuramente della forma $P(x)\,e^x$ purchè $P'(x)+P(x)\equiv x$. Scelto il polinomio del grado più basso possibile $P(x)=ax+b$ si deve avere quindi

$$P'(x)+P(x)=a+ax+b\equiv x \quad\to\quad \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \quad\to\quad b=-1 \end{cases}$$

Quindi una primitiva di $x\,e^x$ è $\boxed{(x-1)\,e^x}$.

Una primitiva di $x^3\,e^x$ sarà della forma

$$P(x)\,e^x \;=\; (ax^3+bx^2+cx+d)\,e^x$$

da cui imponendo $P'(x)+P(x)\equiv x^3$ si ha

$$3ax^2+2bx+c+ax^3+bx^2+cx+d\equiv x^3$$

implica

$$a=1,\quad b=-3,\quad c=6,\quad d=-6$$

Quindi una primitiva di $x^3\,e^x$ è $\boxed{(x^3-3x^2+6x-6)e^x}$.

Una primitiva di $(x^4+3x+1)\,e^x$ sarà della forma

$$P(x)\,e^x \;=\; (ax^4+bx^3+cx^2+dx+g)\,e^x$$

da cui imponendo $P'(x)+P(x)\equiv x^4+3x+1$ si ha $\boxed{e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-21x+22\right)}$.

Una primitiva di $x^5\,e^x$ sarà della forma

$$P(x)\,e^x \;=\; (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+gx+s)\,e^x$$

da cui imponendo $P'(x)+P(x)\equiv x^5$ si ha

$$a=1,\,b=-5,\,c=20,\,d=-60,\,g=120,\,s=-120$$

e quindi la primitiva $\boxed{e^x\left(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120\right)}$

ESERCIZIO : 23.12. *Servendosi della* regola di integrazione per sostituzione *calcolare i seguenti integrali*

$$\int_0^{\pi/4}\sin(4x+\pi)\,dx, \qquad \int_1^{1+2\pi}\cos(3x-1)\,dx$$

Soluzione:

Posto $4x+\pi=t \quad\to\quad x=\frac{1}{4}(t-\pi)$ si ha

$$x\in(0,\pi/4)\quad\Leftrightarrow\quad t\in(0,2\pi)$$

da cui
$$\int_0^{\pi/4} \sin(4x+\pi)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(t)\,\frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\,[-\cos(t)]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

Per il secondo integrale:

posto $3x-1=t \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{3}(t+1)$ si ha
$$x \in [1,\, 1+2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad t \in [2,\, 2+6\pi]$$

da cui
$$\int_1^{1+2\pi} \cos(3x-1)\,dx = \int_2^{2+6\pi} \frac{1}{3}\,\cos(t)\,dt = \frac{1}{3}\,[\sin(t)]_2^{2+6\pi} = 0$$

24. Integrali impropri

ESERCIZIO : 24.1. *Verificare che i seguenti integrali impropri convergono*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x^4}\,dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x^2)}\,dx.$$

Soluzione:

$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x^4}\,dx}$

Tenuto conto che:

- $F(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2+x^4}\,dx$ è funzione crescente di b,
- $\forall x \geq 1: \quad \frac{1}{x^2+x^4} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \to \quad F(b) \leq \arctan(b) - \arctan(1) \leq \frac{\pi}{4}$

ne segue che $F(b)$, crescente e limitata ha necessariamente limite per $b \to +\infty$, quindi ne segue che esiste, finito, l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x^4}\,dx$.

$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x^2)}.}$

Analogamente a quanto osservato sopra si ha:

- $F(b) = \int_2^b \frac{1}{x^2\ln(x^2)}dx$ è funzione crescente di b $\forall b \geq 2$,
- $x \geq 2 \quad \to \quad \ln(x^2) > 1 \quad \to \quad \frac{1}{x^2\ln(x^2)} < \frac{1}{x^2}$,

Ne segue che

$$F(b) \leq \int_2^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$$

e quindi $F(b)$ crescente e limitata avrà sicuramente limite per $b \to \infty$, esiste cioè finito l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x^2)}dx.$$

ESERCIZIO : 24.2. *Sia $f(x) = 1/x^\alpha$ scelti $0 < r < R$ dire per quali $\alpha > 0$ esistono, finiti, i limiti $\lim_{r\to 0^+}\int_r^R f(x)\,dx$, $\lim_{R\to+\infty}\int_r^R f(x)\,dx$ e commentare i risultati ottenuti in termini di sottografico di $f(x)$.*

Soluzione:

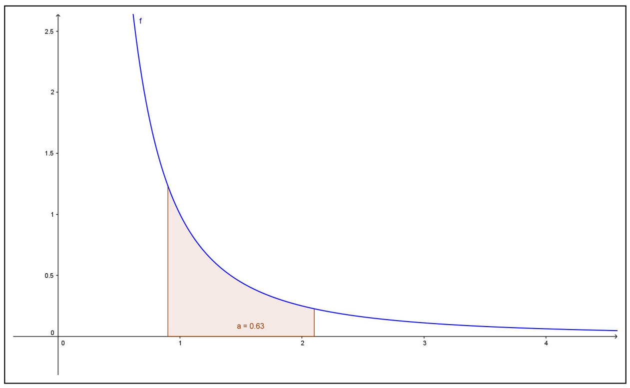


FIGURA 51. $\int_r^R 1/x^2\,dx$

Se $\alpha = 1$ si ha

$$\int_r^R \frac{1}{x}\,dx = \log(R) - \log(r) \quad \to \quad \begin{cases} \lim_{r\to 0^+}\int_r^R f(x)\,dx = +\infty \\ \lim_{R\to+\infty}\int_r^R f(x)\,dx = +\infty \end{cases}$$

Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_r^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right)$$

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 \le \alpha < 1 & \frac{1}{1-\alpha}R^{1-\alpha} \\ 1 < \alpha & +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 \le \alpha < 1 & +\infty \\ 1 < \alpha & \frac{1}{\alpha-1}r^{1-\alpha} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 24.1. *L'osservazione fatta sopra, riferendosi ad esempio a $r = 1$*

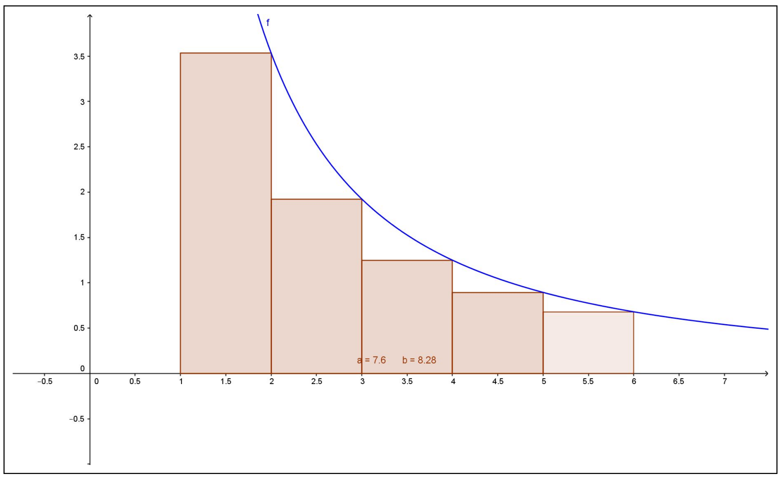
$$\alpha > 1 \quad \to \quad \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$$

giustifica la convergenza delle serie armoniche generalizzate

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty$$

Infatti

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} < \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{\alpha-1}$$



Il confronto serie - integrale usato richiede, si noti bene, la monotonia della funzione con la quale si esegue il confronto: in modo che la somma parziale della serie rappresenti una delle somme integrali inferiori della funzione usata (vedi figura).

25. Le Serie

ESERCIZIO : 25.1. *Sperimentare che, al variare di $n = 2, 3, 4, \ldots$*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx$$

e dedurre che mantenendosi limitati i secondi membri altrettanto faranno i primi.

Soluzione:

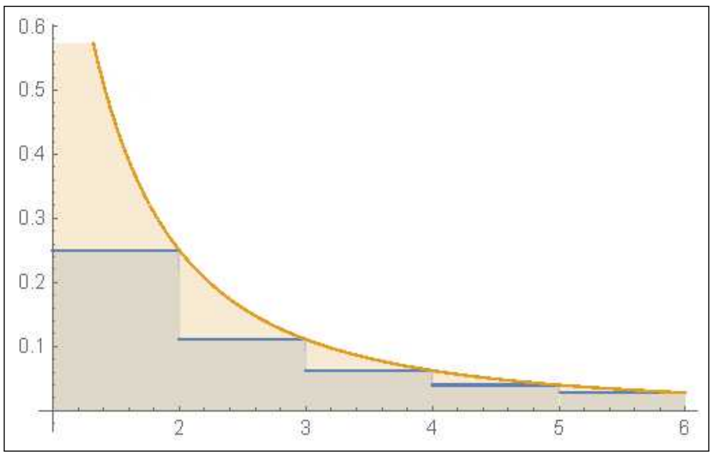


FIGURA 52. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx, \ (n = 6)$

Tenuta presente la disuguaglianza evidenziata in Figura si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{n} \le 1$$

È noto che :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0.645, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1,$$

Un confronto analogo per ogni $\alpha > 1$ prova che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \to \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \frac{1}{\alpha - 1}$$

ESERCIZIO : 25.2. *Discutere il carattere delle seguenti serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n^3}{2^n+n!}$$

Soluzione:

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}}$: Denotiamo con $a_n = \frac{1}{2^n}$ il termine generico: si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 1/2$, convergente con somma

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}}$ i termini $\frac{n+1}{3n+8}$ non hanno limite zero, quindi la serie non è convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n}}$ i termini verificano la disuguaglianza

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 \leq \frac{1}{n^3+n^2+n} \leq \frac{1}{n^3}$$

e pertanto costituiscono una serie convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}}$ I termini a_n verificano la relazione di limite

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2} < 1$$

Quindi i termini della serie sono definitivamente minori di quelli di una serie geometrica convergente: quindi la serie è convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}}$ I termini a_n verificano la relazione

$$a_n < \frac{n!}{n^n}$$

e i termini $b_n = \frac{n!}{n^n}$ formano una serie convergente in quanto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \frac{1}{e} < 1$$

e quindi sono addendi definitivamente maggiorati da una serie geometrica convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n^3}{2^n+n!}}$ Tenuto presente che riesce definitivamente

$$\frac{4^n+n^3}{2^n+n!} \leq \frac{4^n+4^n}{n!} = 2\frac{4^n}{n!}$$

i termini sono maggiorati dai termini della serie esponenziale che è convergente, si riconosce che la serie assegnata è convergente.

ESERCIZIO : 25.3. *Studiare la convergenza assoluta delle serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Soluzione:

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n+1}}$

$$\left|\frac{(-1)^n n}{3^n+1}\right| = \frac{n}{3^n+1} \leq \frac{n}{3^n}$$

Tenuto presente che gli addendi a_n di quest'ultima verificano la relazione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3} < 1$$

si riconosce che la serie assegnata è assolutamente convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}$

$$\left|\cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

si riconosce che i termini sono maggiorati, in modulo, dai termini di una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ convergente: quindi la serie assegnata è assolutamente convergente.

ESERCIZIO : 25.4. *Date* $\{a_n\}$ *una successione limitata e* $\sum_n b_n$ *una serie assolutamente convergente, provare che la serie* $\sum_n a_n b_n$ *è assolutamente convergente.*

Soluzione:

Poichè esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \le M$ allora

$$|a_n\, b_n| = |a_n|\,|b_n| \le M|b_n|$$

Pertanto i termini della serie $\sum_n a_n b_n$ sono maggiorati in modulo da quelli di una serie convergente: pertanto la serie dei prodotti assegnata è assolutamente convergente.

ESERCIZIO : 25.5. *Sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente, dimostrare che anche $\sum_n a_n^2$ è assolutamente convergente.*

Soluzione:

La serie $\sum_n |a_n|$ è convergente, quindi

$$|a_n| \to 0 \Rightarrow |a_n^2| = |a_n|^2 \le |a_n|$$

La serie dei quadrati ha quindi i termini maggiorati da quelli di una serie convergente quindi la serie dei quadrati è convergente.

ESERCIZIO : 25.6. *Calcolare le somme delle due serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\,\pi)^k}{k!}$$

e disegnare tali valori sul piano complesso.

Soluzione:

La prima serie è una serie geometrica di ragione $q = \frac{i}{2}$ e la seconda è la serie esponenziale calcolata per $z = i\,\pi$: pertanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{4+4i}{\sqrt{5}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\,\pi)^k}{k!} = e^{i\pi} = -1.$$

Il valore della prima somma cade sulla bisettrice del primo quadrante, il valore della seconda cade sul semiasse reale negativo.

26. Equazioni differenziali di primo ordine

ESERCIZIO : 26.1. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y &= 1, \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

Soluzione:

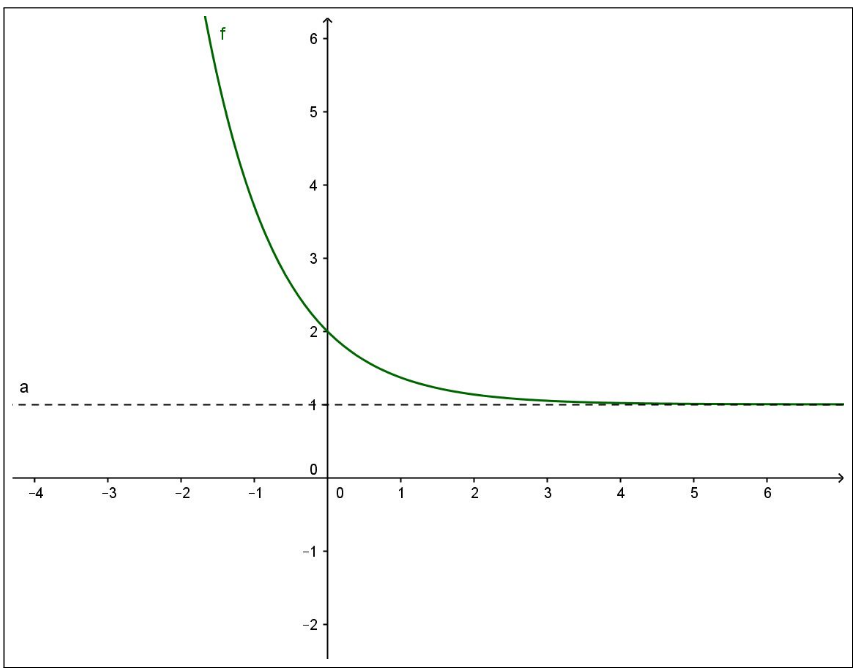


FIGURA 53. $y(x) = e^{-x} + 1$

$$y_0(x) = Ce^{-x}, \quad \overline{y}(x) = 1, \quad y(x) = e^{-x} + 1$$

ESERCIZIO : 26.2. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y &= 2e^{-t}, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

Soluzione:

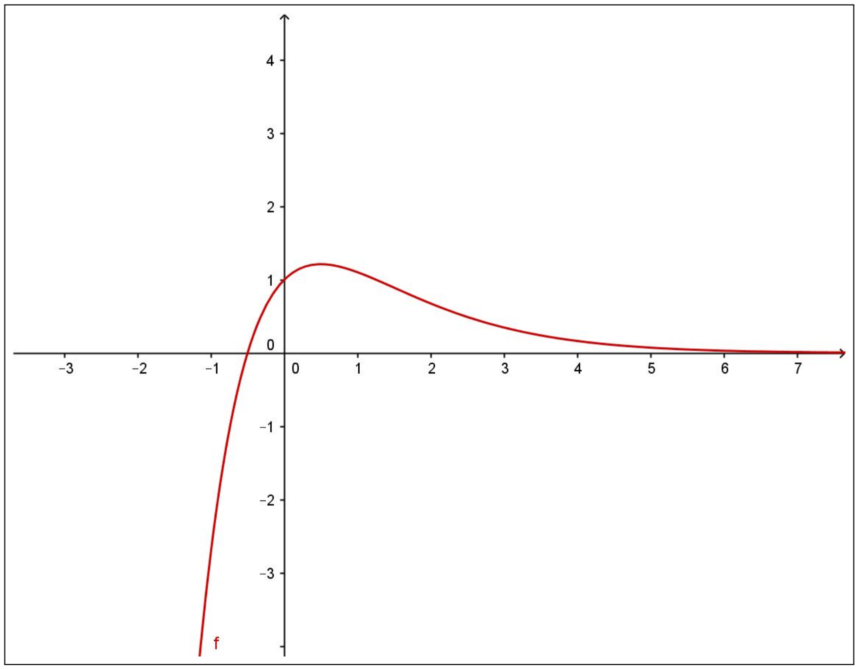


FIGURA 54. $y(t) = (2t+1)e^{-t}$

$$y'(t)+y(t) = 2\,e^{-t} \quad \rightarrow \quad y'(t)e^{t}+y(t)e^{t} = 2 \quad \rightarrow \quad \left(y(t).e^{t}\right)' = 2 \quad \rightarrow \quad y(t).e^{t} = 2t+c$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1 \quad \rightarrow \quad y(t) = (2t+1)e^{-t}$$

27. Equazioni differenziali di secondo ordine

ESERCIZIO : 27.1. *Sia $\omega > 0$. Dimostrare che tutte le funzioni della forma $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ verificano la relazione $f'' + \omega^2 f = 0$.*

Soluzione:

$$\begin{array}{lllll} f(x) & = a\cos(\omega x) & + b\sin(\omega x) & \\ f'(x) & = -a\,\omega\sin(\omega x) & + b\,\omega\cos(\omega x) & \\ f''(x) & = -a\,\omega^2\cos(\omega x) & - b\,\omega^2\sin(\omega x) & = -\,\omega^2 f(x) \end{array}$$

ESERCIZIO : 27.2. *Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine*

$$y'' + 9y = 0$$

e disegnare i grafici di tre di esse.

Soluzione:

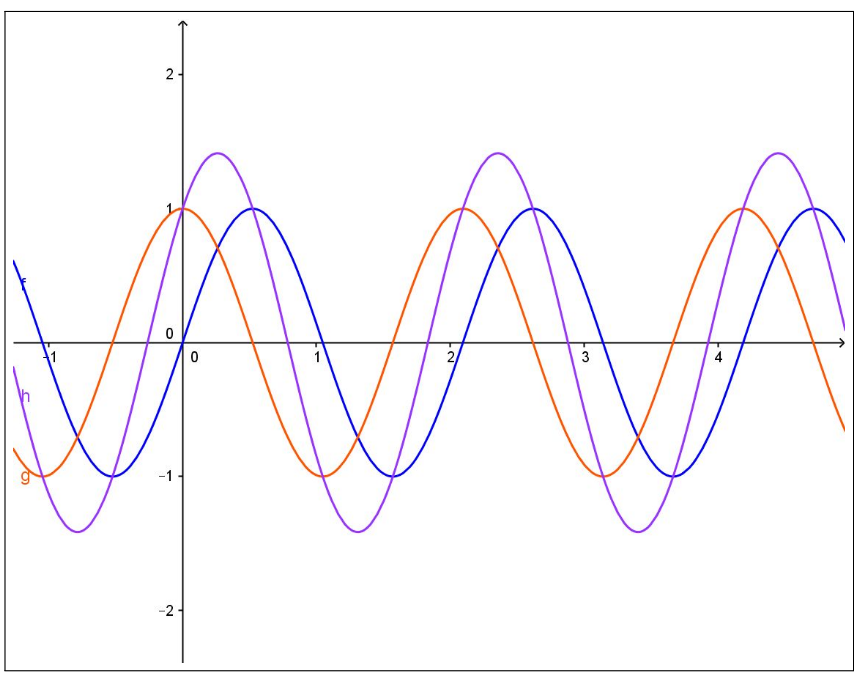


FIGURA 55. $y'' + 9y = 0$

$$y(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t) \quad \to \quad \begin{cases} y_1(t) = \sin(3t) \\ y_2(t) = \cos(3t) \\ y_3(t) = \sin(3t) + \cos(3t) \end{cases}$$

ESERCIZIO : 27.3. *Determinare la soluzione $y(x)$ di*

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y & = & 0, \\ y(0) & = & 1, \\ y'(0) & = & -2 \end{cases}$$

e determinare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

Soluzione:

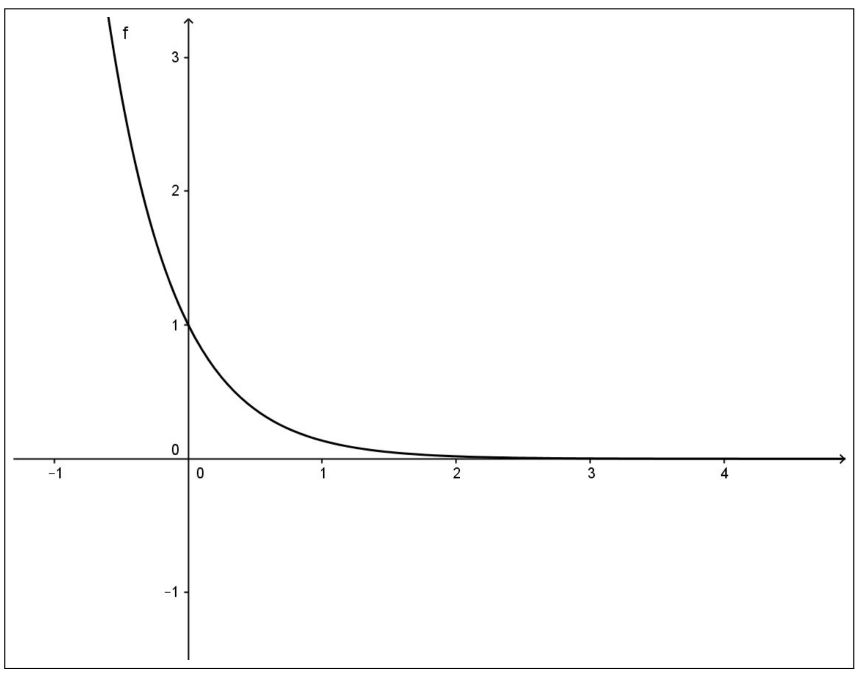


FIGURA 56. $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$
$$y(t) = ae^t + be^{-2t}, \quad \to \quad y'(t) = ae^t - 2be^{-2t}$$
$$a + b = 1, \quad a - 2b = -2 \quad \to \quad a = 0, \quad b = 1$$
$$y(t) = e^{-2t}, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

ESERCIZIO : 27.4. *Determinare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

- *successivamente determinare quelle che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 0$,*
- *e successivamente quella che soddisfa anche la condizione $y'(0) = 1$.*

Soluzione:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -1 + 2i,\ \lambda_2 = -1 - 2i \quad \to \quad y(x) = e^{-x}\left\{ae^{2ix} + be^{-2ix}\right)$$

$$y(x) = ae^{-x}\left\{e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)$$

ESERCIZIO : 27.5. *Determinare la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 4y & = \sin(t), \\ y(0) & = 0, \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

.

Soluzione:

$$y_0(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t), \quad \overline{y}(t) = A\ \sin(t)$$

Imponendo che $A\ \sin(t)$ soddisfi l'equazione differenziale si ricava $A = \frac{1}{3}$.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono pertanto espresse dalla formula

$$y(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$$

Le condizioni iniziali assegnate impongono

$$y(0) = 0 \quad \to \quad b = 0, \qquad y'(0) = 0 \quad \to \quad 2a + \frac{1}{3} = 0 \quad \to \quad a = -\frac{1}{6}$$

e quindi la soluzione è

$$y(t) = -\frac{1}{6}sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$$

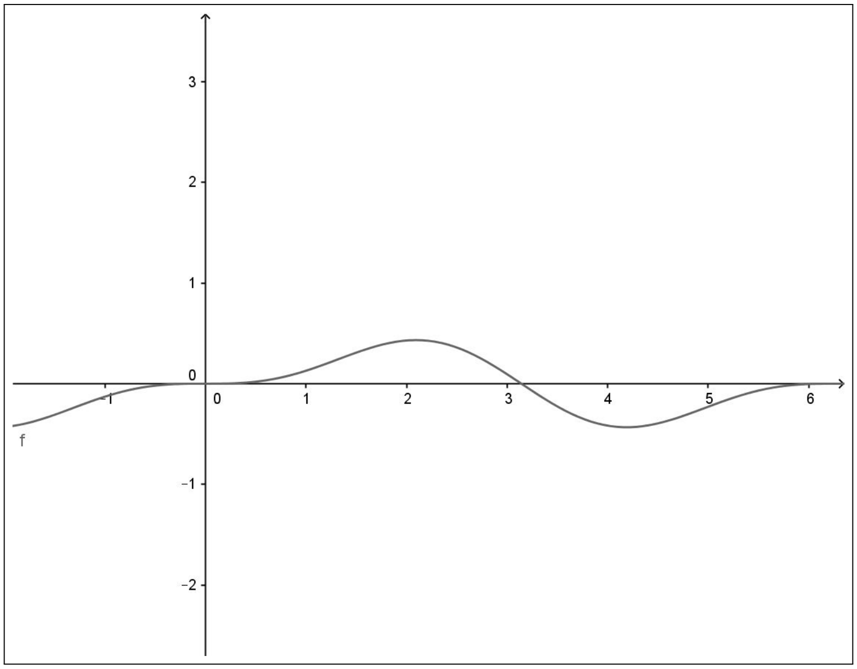


FIGURA 57. $y'' + 4y = \sin(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

Indice analitico

aree e volumi, 23
autovalori, autovettori, 20, 21
Binet, teorema, 14
continuità, prolungare per , 75
derivate , 94
derivate di funzioni composte, 95
determinanti, 14
distribuzione di Maxwell-Boltzmann, 56
equazione di un piano, 24
forma quadratica, 19
formule di Cramer, 16
Hopital, teorema di, 113, 114
immagine di una matrice, 15
induzione, disuguaglianze, 2
iniettive, funzioni, 26
insiemi numerici, 5
irrazionali, 3
limiti all'infinito , 75
limiti con l'Hopital, 113, 114
matrice inversa, 15, 16
matrice trasposta, simmetrica, 19
matrici prodotto, 20
Maxwell-Boltzmann, distribuzione di, 56
minimo di esponenziali, 78, 103
minimo tra due funzioni,integrale del, 139
moduli, derivate , 94
piani e rette nello spazio, 23
probabilitá, 56
prodotti scalari, 19
prodotto matrice vettore, 14
prolungare per continuità, 75
punti di Rolle, 108
rapporti incrementali , 81
rapporto incrementale , 83
rette incidenti, 25
successioni ricorsive, 45
successioni, limitate, convergenti, 40–42
Teorema di de l'Hopital, 113, 114
teorema di Lagrange , 107

approssimazione, errori di, 122
Archimede, 2
area domini piani, 134
assoluta, convergenza, 150

Binet, teorema di, 15, 16

Catene di Markov, 65, 66
complesse, successioni, 33
complessi, numeri, 32
composte, derivazione, 86
confronto serie integrali, 148
coniugato di un numero complesso, 32
continue, funzioni, 78
continuitá e derivabilitá, 89
continuità in un punto, 76
convergenza assoluta, 150

definizione di limite, 37
definizione, insieme di, 29
derivabilitá in un punto, 87, 89
derivate del prodotto, 85
derivate del quoziente, 85
derivate di composte, 86
derivate di funzioni integrali, 138
derivate seconde, 89

deviazione standard, 51
disuguaglianza di Jensen, 51
disuguaglianza triangolare, 6
disuguaglianze, teorema di
Lagrange, 105
divisibilitá, 2
domini del piano, 9
domini piani, disuguaglianze, 7
dominio, immagine di f, 82

equazioni di stato, 88
equazioni differenziali omogenee, 154
equazioni differenziali ordine 1, 152, 153
esponenziale complesso, 31

$f(x,y)$ insiemi di definizione, 8
forma polare di un numero complesso, 32
formula di Taylor, 122
frequenze in una lista, 51
funzione integrale, polinomio di Taylor, 138
funzioni, 27, 29
funzioni $\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$, 154
funzioni continue, 76
funzioni crescenti, 105
funzioni definite a tratti, 131
funzioni esponenziali, 71
funzioni iniettive, 26
funzioni integrali, 138
funzioni periodiche, 27
funzioni razionali, 73
funzioni, limite, 76
funzioni, limiti, 68
funzioni, limiti all'infinito, 68
funzioni, massimo e minimo, 79
funzioni, parte positiva, 26

grado pari, polinomi di, 78
grafici, 27
grafico, retta tangente, 83

Hamilton-Cayley, teorema di, 19

immagine funzioni, 74
immagine, dominio di f, 82
impropri integrali, 145
impropri, integrali, 146
indipendenza lineare , 12
induzione, 1
induzione, dimostrare per, 47
insieme di continuitá, 78
insieme di definizione, 78
insiemi di definizione di $f(x,y)$, 8
insiemi limitati, 33
integrale del minimo tra due funzioni, 139
integrale della parte intera, 132
integrale di moduli, 131
integrale di un modulo, 133
integrale parte intera, 133
integrali impropri, 145, 146
integrali per parti, 137, 141, 143
integrali per sostituzione, 143
integrali, calcolo di, 134
integrali, somme inferiori, 130
integrali, suddivisioni, 130
integrazione per parti, 140
integrazione per sostituzione, 140
inversa, matrice, 15
inverse, derivate , 97
isoperimetrico, problema, 100

Jensen, disuguaglianza di , 51

limite, 37
limiti all'infinito, 70
limiti in un punto, 69
limiti, polinomi di Taylor , 126
linee di livello, 9
logaritmi, 73

massimo di polinomi di grado pari, 78
massimo e minimo, 79
massimo e minimo in intgervalli, 97
massimo e minimo, funzioni, 101
matrici, 17–19
Matrici
autovalori, 17

inverse, 15
prodotto, 15
simmetrica, 19
trasformazioni, 17, 18
trasposta, 19
media, 49
media aritmetica, 50
media, teorema della, 135
mediana, 49
minimo assoluto, 101
minimo di polinomi di grado pari, 78
minimo tra due funzioni , 96, 103
minimo, scarti quadratici, 52
moduli, 6
modulo di un numero complesso, 32

non derivabilità, punti di , 110, 124
numeri complessi, 32

parte intera, funzione, 133
parte positiva, 26
parti, integrazione per, 140
periodiche, funzioni, 27
polinomi di Taylor, 118
polinomi di Taylor , 125
polinomi di Taylor per $f(x,y)$, 124
polinomio di Taylor , 124
polinomio di Taylor di funzione integrale, 138
Postulato di Archimede, 2
Potenziale di Lennard–Jones, 93
primitive, integrali, 136
probabilità , 62, 64
probabilità dadi, 63
probabilità assiomi, 61
probabilità assiomi , 57, 58
probabilità composta , 60
probabilità condizionale , 62
probabilità , dadi, 59
problema di Cauchy, 152
Problema di Cauchy del secondo ordine, 155
problema di Cauchy del secondo ordine, 156
prodotto serie e successione, 150
prodotto, matrice, 15
prodotto, regole di derivazione, 85
Programmazione lineare, 115, 116
prolungamento per continuitá, 76
punti di Lagrange, 106

quadrati, serie dei, 151
quoziente, regole di derivazione, 85

radici dei numeri complessi, 34
resto di Lagrange , 125
resto di Taylor, 122
retta tangente, 83, 85
rettangoli area massima, 100
ricorrenza, successioni, 46
ricorsive, successioni, 46

scarti in modulo, 50
scarti quadratici, minimo, 52
semipiani, 7
serie armoniche, 148
serie ass. convergenti, 150
serie complesse, 151
serie dei quadrati, 151
serie esponenziale complesso, 151
serie geometrica, 149
serie geometrica complessa, 151
serie numeriche, 149
serie, carattere, 149
serie, criteri integrali, 147
somme integrali, 130
sostituzione, integrazione per, 140
successioni complesse, 33
successioni convergenti in $\mathbb{R}^2$, 33
successioni crescenti, 47
successioni in $\mathbb{R}^2$, 33
successioni limitate, 39
successioni per ricorrenza, 46
successioni ricorsive, 38, 47, 48
successioni, condizioni di convergenza, 45
successioni, limite del reciproco, 43
successioni, limiti, 45
successioni, limiti notevoli, 44
successioni, reciproco, 43

tangente, retta, 83
Taylor, formula, 122
Taylor, polinomi di, 118
Taylor, resto di Lagrange, 122
Teorema
  Binet, 15, 16
  di Binet, 14
  Hamilton-Cayley, 19
Teorema della media integrale, 135
teorema di Cauchy, 111
Teorema di Lagrange, 105
Teorema di Lagrange, monotonia, 105
triangoli area massima, 100

unione di intervalli, 4

varianza, 49
versori , 11
vettori , 11, 12