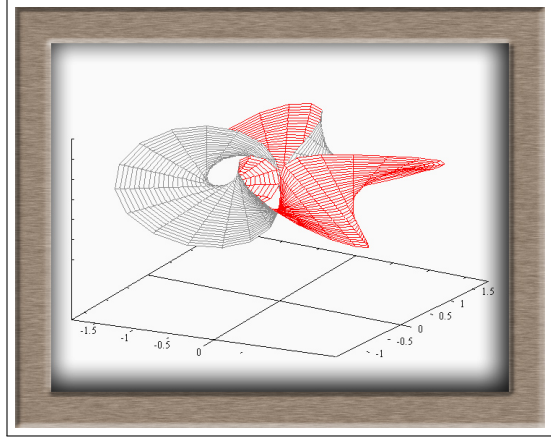


ANALISI ECCELLENTE

2008-2009



prof. L.Lamberti

http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti/Complementi_2008/index.html

Appunti del Corso di **Complementi di Analisi**

Corso di Laurea In Fisica

Percorso di eccellenza

anno accademico 2008-2009

Il disegno di copertina, un nastro di Möbius doppiamente ritorto, é stato realizzato con GNUPLOT,

```
set parametric
set urange [ 0.00 : 6.28 ]
set vrange [ -0.50 : 0.50 ]
set xrange [ -1.80 : 1.80 ]
set yrange [ -1.80 : 1.80 ]
set zrange [ -1.50 : 1.50 ]
x(u,v) = (1 + 2*v*sin(2*u))*cos(u)
y(u,v) = (1 + 2*v*sin(2*u))*sin(u)
z(u,v) = 2*v*cos(2*u)
splot x(u,v), y(u,v), z(u,v)
```

Appunti rivisti con la collaborazione degli studenti del Corso di Complementi di Analisi 2008-2009

Ultima revisione 22 giugno 2009

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1. Lo spazio delle funzioni continue	3
1. Introduzione	3
2. Lo spazio $C^0(K)$	3
3. La completezza	5
4. Trasformazioni continue	6
Capitolo 2. Il principio delle contrazioni: teorema di Banach	9
1. Punti uniti	9
2. Il principio delle contrazioni	10
3. La ragnatela delle iterate	16
4. Iterate	19
Capitolo 3. Applicazioni del principio delle contrazioni	21
1. Il problema di Cauchy	21
Capitolo 4. Il metodo di Newton per sistemi	25
1. La formula di Newton	25
2. Il caso bidimensionale	27
3. Il teorema di Dini in \mathbb{R}^{k+m}	29
Capitolo 5. Lemma di Urysohn	33
1. La distanza	33
2. Funzioni lipschitziane	33
3. LEMMA DI URYSOHN	35
4. Prolungamenti condizionati	37
5. Le partizioni dell'unit�.	37
6. Appendice	37
Capitolo 6. Il teorema di Brouwer	39
1. Introduzione	39
2. Il caso unidimensionale	41
3. Il caso di \mathbb{R}^2	42
4. Estensioni del teorema di Brouwer	49

Capitolo 7. Applicazione del teorema di Brouwer	51
1. Un primo esempio	51
2. Un secondo esempio	52
3. Il teorema di Poincaré Bendixon	53
Capitolo 8. Indice di Poincaré	55
1. La rotazione di un campo lungo una curva	55
2. Il teorema di Brouwer	56
Capitolo 9. Il Teorema di Rolle	59
1. Contare i punti singolari...	59
2. Il caso $f \in C^2(\Omega)$	63
Capitolo 10. Il teorema di Ascoli Arzelá	67
1. Lo spazio delle funzioni continue	67
2. Il teorema di Ascoli Arzelá	72
3. Applicazioni	76
Capitolo 11. Il teorema di Weierstrass	81
1. Introduzione	81
2. I polinomi di Bernstein	82
3. Polinomi e convoluzioni	88
4. Polinomi e interpolazione	90
5. Il caso di piú variabili	93
Capitolo 12. Il teorema di Stone Weierstrass	95
1. Le algebre di Stone	95
2. Polinomi e polinomi trigonometrici	100
3. Gli spazi $C^m([0, 1])$	100
Capitolo 13. Equazione del calore	103
1. Il problema di Cauchy	103
2. Alcune soluzioni	104
3. Il principio di massimo	107
4. Conseguenze del principio di massimo	108
5. Una stima $L^2(0, \pi)$	111
6. Il problema non omogeneo	112
7. Mathematica	116

Introduzione

... non si può sentire il bisogno di rivedere,
se prima non si é visto;
avvertire la presenza del rigore,
se non si conosce ciò che accade in sua assenza;
ripensare,
se prima non si é pensato.¹

Gli argomenti scelti per queste Lezioni di *Complementi di Analisi*, rivolte a studenti del Corso di Laurea in Fisica, sono stati scelti tra i principali teoremi dell'Analisi, con la cura di illustrare risultati

- importanti nelle loro applicazioni,
- importanti nelle loro tesi tutt'altro che ovvie,
- importanti per il prestigio storico dei loro autori.

Il primo argomento riguarda il **teorema di Banach**, comunemente nominato come *Principio delle contrazioni*, sul quale si fondano numerosi risultati d'esistenza e unicità: dalla soluzione del problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie, al metodo di Newton per la soluzioni di equazioni e di sistemi, a numerose tecniche moderne per la soluzione di problemi non lineari.

Il secondo argomento riguarda il **teorema di Brouwer**: un fondamentale risultato topologico che riguarda l'impossibilità di trasformare un cerchio su sé stesso con trasformazioni che non ammettano almeno un punto unito. Il risultato si generalizza dai cerchi ai convessi di dimensione qualsiasi e si applica all'esistenza di soluzioni periodiche di equazioni differenziali.

Il terzo argomento é il **teorema di Ascoli-Arzelá**: risultato che riguarda la possibilità (o meno) di estrarre da una successione di funzioni continue sottosuccessioni uniformemente convergenti, piú o meno

¹Luigi Campedelli, VALORI UMANI NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA, Convegno *Mathesis* 12 settembre 1959

come ci si aspetta di poter fare con le successioni limitate di punti di un \mathbb{R}^n . É naturale che tale possibilità giustifica numerosi algoritmi esistenziali dell'analisi: sapendo risolvere una successione di problemi approssimanti un problema assegnato, cosa si puó pensare della successione delle soluzioni trovate ?

L'ultimo argomento é il **teorema di Weierstrass** sulla approssimabilità di qualunque funzione continua con polinomi: del teorema saranno fornite due dimostrazioni, una costruttiva tramite i polinomi di Bernstein e una teorica piú recentemente stabilita con il nome di **teorema di Stone**. Sul teorema di Weierstrass si possono costruire inoltre numerosi risultati di teoria delle serie di Fourier.

CAPITOLO 1

Lo spazio delle funzioni continue

1. Introduzione

Dopo gli spazi vettoriali \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^n, \dots incontrati nei corsi precedenti considereremo in questo capitolo uno spazio vettoriale del tutto nuovo:

- i suoi elementi non sono punti di alcun spazio geometrico ma funzioni reali di una o piú variabili,
- la sua dimensione é \dots infinita !

Tale spazio, al quale é facile riconoscere la struttura di spazio vettoriale si chiama

$$C^0(K)$$

spazio delle funzioni reali, definite in K , sottinsieme compatto, cioé chiuso e limitato, di \mathbb{R} o di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ continue.

2. Lo spazio $C^0(K)$

Sia K un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R} o di un \mathbb{R}^n , $n = 2, 3, \dots$ e indichiamo con $C^0(K)$ l'insieme delle funzioni continue

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

definite in K e a valori reali.

Nel caso

- $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ avremo l'insieme $C^0([a, b])$ delle funzioni reali continue definite nell'intervallo $[a, b]$,
- nel caso $K := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ avremo l'insieme delle funzioni reali e continue definite nel cerchio di centro l'origine e raggio 1,
- nel caso $K := \{x^2 + y^2 = 1\}$ avremo l'insieme delle funzioni reali e continue definite sulla circonferenza di raggio 1, l'insieme cioé delle funzioni continue periodiche di periodo 2π ,
- ecc. ecc.

TEOREMA 2.1. *L'insieme $C^0(K)$ é uno spazio vettoriale su \mathbb{R}*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g \in C^0(K)$ comunque si prendano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é definita la funzione

$$\alpha f(X) + \beta g(X), \quad \forall X \in K$$

e riesce continua.

Quindi

$$\alpha f + \beta g \in C^0(K)$$

□

TEOREMA 2.2. *Se K possiede infiniti punti $C^0(K)$ é uno spazio di dimensione non finita.*

DIMOSTRAZIONE. Se K fosse costituito di soli m punti

$$K := \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

allora ogni funzione

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

si riduce ad una m -upla di numeri, i valori

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_m = f(x_m)$$

quindi $C^0(K) = \mathbb{R}^m$.

Nel caso $K \subseteq \mathbb{R}^n$ contenga infiniti punti, come accade, ad esempio se $K = [a, b]$, basta considerare la famiglia infinita $P \subseteq C^0(K)$ dei polinomi nelle n variabili x_1, x_2, \dots, x_n .

Si riconosce facilmente che i monomi di grado h sono linearmente indipendenti rispetto ai polinomi di grado minore di h e quindi P ha dimensione non finita.

A maggior ragione ha dimensione non finita $C^0(K)$. □

2.1. La norma. Definiamo su $C^0(K)$ la seguente norma

$$(1) \quad \|f\| = \max_{X \in K} |f(X)|$$

Si tratta di una buona definizione tenuto conto che il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza del massimo di $|f(X)|$ nel caso che

- f sia continua,
- K sia chiuso e limitato.

Si tratta inoltre di una norma: infatti

- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

DEFINIZIONE 2.3. *Lo spazio vettoriale $C^0(K)$ delle funzioni continue definite in K a valori reali, dotato della norma (1) é uno spazio vettoriale normato.*

2.2. La metrica. Come nel caso degli spazi \mathbb{R}^n , la presenza di una norma in $C^0(K)$ consente di definire una distanza d tra due elementi $f, g \in C^0(K)$

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

L'espressione di d verifica infatti le tre proprietà della distanza

- $d(f, g) = d(g, f)$,
- $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$,
- $d(f, g) \leq d(f, p) + d(p, g) \quad \forall f, g, p \in C^0(K)$.

ESEMPIO 2.4. Sia $K = [0, 1]$ lo spazio vettoriale normato $C^0([0, 1])$ contiene, fra le altre, le funzioni

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

Calcoliamo le distanze

$$\begin{aligned} d(1, x) &= \max_K |1 - x| = 1 \\ d(x, x^2) &= \max_K |x - x^2| = \frac{1}{4} \\ d(x^2, x^3) &= \max_K |x^2 - x^3| = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

3. La completezza

Lo spazio (metrico) \mathbb{Q} dei numeri razionali non è completo: lo spazio \mathbb{R} dei numeri reali è completo.

La parola *completo* che si incontra in riferimento ad uno spazio metrico si riferisce ad una proprietà delle successioni di Cauchy dello spazio:

- se $\{X_n\}$ converge a Y allora

$$|X_n - X_m| \leq |X_n - Y| + |Y - X_m|$$

cioè gli elementi della successione... *si stringono tra loro*

- se gli elementi di una successione *si stringono tra loro* la successione converge ?

DEFINIZIONE 3.1. Uno spazio metrico si dice *completo* se le successioni di Cauchy, cioè quelle che si stringono tra loro convergono.

ESEMPIO 3.2. Il piano \mathbb{R}^2 è uno spazio metrico completo, il disco bucato $\Omega : 0 < x^2 + y^2 < 1$ non è uno spazio metrico completo !

TEOREMA 3.3. Una successione $\{f_n\} \in C^0(K)$, di Cauchy rispetto alla metrica di $C^0(K)$, è convergente, cioè lo spazio metrico $C^0(K)$ è completo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{f_n(x)\} \in C^0(K)$, successione di Cauchy : scelto $\varepsilon > 0$ riesca

$$\|f_{n+p} - f_n\| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon, \forall p$$

Tenuto conto che, qualunque sia $x \in K$, riesce

$$(2) \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|$$

la successione (reale) $\{f_n(x)\}$ é di Cauchy, quindi convergente, in ogni punto $x \in K$.

Posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

quindi la successione $\{f_n\} \in C^0(K)$, converge puntualmente.

Si tratta di riconoscere che la funzione limite $f(x) \in C^0(K)$, cioè é continua.

Passando al limite nella (2) per $p \rightarrow \infty$ si ha

$$(3) \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Presi due punti $x_1, x_2 \in K$ dalla diseguaglianza triangolare segue

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)|$$

da cui, tenuto conto della (3) si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\varepsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

che permette di riconoscere che f é continua: infatti la variazione di f tra x_1 e x_2 non supera che di 2ε , quantità positiva scelta all'inizio arbitrariamente, quella della funzione continua f_n .

Tenuto ancora conto della (3), valida per ogni $x \in K$ si ha

$$\|f - f_n\| \leq \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon$$

che esprime la convergenza della successione $\{f_n\}$ ad f nella metrica di $C^0(K)$. \square

OSSERVAZIONE 3.4. *Il teorema dimostrato era certamente noto nella forma*

il limite di una successione di funzioni continue uniformemente convergente é continuo.

4. Trasformazioni continue

Una funzione

$$T : C^0(K) \rightarrow C^0(K)$$

é una funzione che ad ogni elemento di $C^0(K)$ fa corrispondere un altro elemento di $C^0(K)$.

Le funzioni T suddette prendono spesso anche i nomi di

- trasformazioni di $C^0(K)$ in sé,
- mappe di $C^0(K)$ in sé.

ESEMPIO 4.1. Sia $K = [0, 1]$: sia T la trasformazioni di $C^0(K)$ in sé che ad ogni $f \in C^0(K)$ fa corrispondere la funzione $Tf = 2f$ anch'essa, ovviamente, elemento di $C^0(K)$

ESEMPIO 4.2. Sia $K = [a, b]$: sia T la trasformazioni di $C^0(K)$ in sé che ad ogni $f \in C^0(K)$ fa corrispondere la primitiva

$$Tf(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b]$$

anch'essa ovviamente, elemento di $C^0(K)$

DEFINIZIONE 4.3. Una trasformazione T di $C^0(K)$ in sé si dice continua nel punto $f_0 \in C^0(K)$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|f - f_0\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|Tf - Tf_0\| \leq \varepsilon$$

ESEMPIO 4.4. La trasformazione T del precedente Esempio 4.2 é continua in ogni punto.

Infatti

$$\|Tf - Tg\| = \left\| \int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt \right\| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \leq |b-a| \|f - g\|$$

essa é lipschitziana con $L = |b - a|$

ESEMPIO 4.5. La trasformazione T di $C^0([0, 1])$ in sé che fa corrispondere ad ogni funzione f una delle tre funzioni costanti $-1, 0, 1$ con la legge

$$Tf = \begin{cases} -1 & \text{se } f(0) < 0 \\ 0 & \text{se } f(0) = 0 \\ 1 & \text{se } f(0) > 0 \end{cases}$$

non é una trasformazione continua di $C^0([0, 1])$ in sé.

Infatti prendiamo $f_1, f_0 \in C^0([0, 1])$: $f_0(x) \equiv 0, f_1(x) = \varepsilon > 0$: riesce

$$Tf_0 \equiv 0, \quad Tf_1 \equiv 1$$

da cui

$$\|f_0 - f_1\| = \varepsilon \quad \|Tf_0 - Tf_1\| = 1$$

per ε piccolo f_1 si avvicina a f_0 ma Tf_1 non si avvicina a Tf_0 ...

CAPITOLO 2

Il principio delle contrazioni: teorema di Banach

1. Punti uniti

Assegnata una trasformazione

$$T : X \rightarrow X$$

un punto $y \in X$ si dice punto unito per la T se

$$T y = y$$

L'esistenza (o meno) di punti uniti dipende (probabilmente)

- dal tipo di spazio X
- dal tipo di trasformazione T .

Nel caso di $X = \mathbb{R}$ le trasformazioni T si chiamano normalmente

$$y = f(x)$$

funzioni reali di una variabile reale: esse si studiano tradizionalmente guardando il loro grafico.

I punti uniti

$$f(\xi) = \xi$$

sono quelle ascisse ξ in corrispondenza alle quali il grafico $y = f(x)$ interseca il grafico di $y = x$.

É quindi facile riconoscere che $f(x) = x + 5$ non ha punti uniti, mentre ogni funzione lineare $g(x) = ax + b$, $a \neq 1$ ne ha sempre uno.

Il problema dell'esistenza di soluzioni per l'equazione $f(x) = 0$ equivale all'esistenza di punti uniti per qualche la trasformazione

$$g_\lambda : x \rightarrow x + \lambda f(x)$$

infatti

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow g_\lambda(x_0) = x_0$$

Si riconosce facilmente il seguente

TEOREMA 1.1. *Sia $X = [0, 1]$ e sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua: allora esistono punti uniti.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi é evidente: il grafico di f deve essere una linea non spezzata che congiunge un punto del segmento verticale $[(0, 0) - (0, 1)]$ ad un punto dell'altro segmento verticale $[(1, 0) - (1, 1)]$. Quindi tale linea deve tagliare la diagonale $[(0, 0) - (1, 1)]$. \square

Il precedente teorema cade se si rinuncia alla continuit : in tal caso il grafico pu  essere spezzato e quindi pu  non intersecare la diagonale.

ESEMPIO 1.2. Sia T la trasformazione di $X = C^0([0, 1])$ in s  che fa corrispondere ad ogni f il suo quadrato: un punto unito di T deve soddisfare l'equazione

$$f(x) = f^2(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

quindi $f(x)$ deve valere o 0 o 1 ed essendo una funzione di x continua in $[0, 1]$ non pu  che essere

- o la funzione costante $f \equiv 0$
- o la funzione costante $f \equiv 1$

La trasformazione T considerata ha pertanto due e solo due punti uniti, la $f \equiv 0$ e la $f \equiv 1$

ESEMPIO 1.3. La trasformazione

$$T : f \rightarrow f + 1$$

  una trasformazione continua di $C^0([0, 1])$ in s  ma non ha punti uniti, infatti nessuna funzione f pu  soddisfare l'uguaglianza

$$f = Tf \quad \leftrightarrow \quad f(x) = f(x) + 1$$

2. Il principio delle contrazioni

DEFINIZIONE 2.1. Le trasformazioni T di uno spazio metrico X in s  che verificano la condizione

$$\forall f, g \in X \quad d(Tf, Tg) \leq L d(f, g), \quad L < 1$$

avendo indicato con $d(f, g)$ la distanza tra f ed g , si chiamano *contrazioni*.

In altri termini una trasformazione T   una contrazione se

contrae la distanza

trasforma cio  due elementi f e g in due altri Tf e Tg che sono

tra loro pi  vicini

di quanto non fossero f e g .

PROPOSIZIONE 2.2. Le contrazioni sono trasformazioni continue di X in s .

DIMOSTRAZIONE. Sono infatti trasformazioni lipschitziane. \square

ESEMPIO 2.3. *La trasformazione $Tf = 2f$ non é una contrazione, mentre la*

$$Tf = \frac{1}{3}f$$

é una contrazione.

TEOREMA 2.4 (Banach). *Sia X uno spazio metrico completo, le contrazioni*

$$T : X \rightarrow X$$

hanno sempre uno ed un solo punto unito $y \in X$, che coincide con il limite delle successioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0$$

costruite a partire da un qualsiasi elemento $x_0 \in X$.

DIMOSTRAZIONE.



FIGURA 1. Stefan Banach (born: 30 March 1892 in Kraków, Austria-Hungary (now Poland), died: 31 Aug 1945 in Lvov, (now Ukraine)) founded modern functional analysis and made major contributions to the theory of topological vector spaces. In addition, he contributed to measure theory, integration, and orthogonal series.

Unicitá

Esistano, per assurdo, due punti uniti $x_1 = Tx_1$ ed $x_2 = Tx_2$: tenuto conto che T é una contrazione si ha

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2) \leq L d(x_1, x_2)$$

da cui essendo $L < 1$ segue

$$d(x_1, x_2) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Esistenza

Scelto $x_0 \in X$ consideriamo la successione prodotta a partire da esso

$$(4) \quad \begin{aligned} & x_0, \\ & x_1 = Tx_0, \\ & x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \\ & x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 \\ & \dots \end{aligned}$$

successione che prende il nome di

successioni delle approssimazioni successive

Riesce

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq Ld(x_n, x_{n-1})$$

da cui, reiterando da $n = 2$ in poi si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} d(x_1, x_0) = \delta \\ d(x_2, x_1) \leq Ld(x_1, x_0) = L\delta \\ d(x_3, x_2) \leq L^2d(x_1, x_0) = L^2\delta \\ d(x_4, x_3) \leq L^3d(x_1, x_0) = L^3\delta \\ \dots \\ d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \leq L^n \delta \end{array} \right.$$

Tenuto conto della disuguaglianza triangolare

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

e che

$$L^{n+p-1} + L^{n+p-2} + \dots + L^n \leq L^n \frac{1}{1-L}$$

si riconosce che

$$(5) \quad d(x_{n+p}, x_n) \leq L^n \frac{1}{1-L} d(x_1, x_0) = L^n \frac{1}{1-L} \delta$$

ovvero che la successione $\{x_n\}$ é una successione di Cauchy in X .

Tenuto conto dell'ipotesi che X sia completo esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

per la continuità di T riesce

$$x_{n+1} = Tx_n \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = T \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \rightarrow \quad y = Ty$$

Tenuto conto dell'arbitrarietà con cui è stato scelto il primo punto x_0 si riconosce che

- $\forall \xi \in X$ $\{T^n \xi\}$ è convergente,
- le diverse successioni $\{T^n \xi\}$ convergono tutte allo stesso y , l'unico punto unito di T .

□

ESEMPIO 2.5. Sia $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$T(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Dal teorema di Lagrange si ha

$$T(x_1) - T(x_2) = T'(\xi)(x_1 - x_2)$$

da cui, tenuto conto che

$$T'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} |T'(x)| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0.65 < 1$$

si riconosce che T è una contrazione con

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Quindi, da qualunque x_0 si parta la successione delle iterate

$$x_0, T(x_0), T(T(x_0)), \dots$$

- è convergente
- e converge ad uno stesso limite y
- nel quale riesce $T(y) = y$

Le successioni seguenti sperimentano il fenomeno partendo rispettivamente da $x_0 = 1$, $x_0 = 10$, $x_0 = 5$

1, 0.5, 0.8, 0.6097, 0.7289, 0.6529, 0.7010, 0.6704, 0.6898, 0.6775, 0.6853...

10, 0.009900, 0.9999, 0.5000, 0.7999, 0.6097, 0.7289, 0.6530, 0.7010, 0.6704, 0.6898, ...

5, 0.03846, 0.9985, 0.5007, 0.7995, 0.6100, 0.7287, 0.6531, 0.7009, 0.6705, 0.6898, ..

ESEMPIO 2.6. Consideriamo lo spazio $X = C^0([0, 1])$ e la trasformazione

$$Tf = \frac{f}{2+f^2}$$

Si tratta ovviamente di una trasformazione di $C^0([0, 1])$ in sé che riesce contrazione: infatti tenuto conto che

$$\left(\frac{x}{2+x^2}\right)' = \left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right) \frac{1}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

riesce

$$|Tf_1(x) - Tf_2(x)| \leq \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)| \quad \rightarrow \quad \|Tf_1 - Tf_2\| \leq \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|$$

L'unico punto unito é

$$f(x) = \frac{f(x)}{2 + f^2(x)} \quad \rightarrow \quad f(x) \equiv 0$$

Sperimentiamo la successione (4) delle approssimazioni successive a partire, ad esempio dalla $f_0(x) = x$

$$f_1(x) = \frac{x}{2 + x^2}$$

$$f_2(x) = \frac{x(2 + x^2)}{8 + 9x^2 + 2x^4}$$

$$f_3(x) = \frac{x(2 + x^2)(8 + 9x^2 + 2x^4)}{128 + 292x^2 + 230x^4 + 73x^6 + 8x^8}$$

Si ha

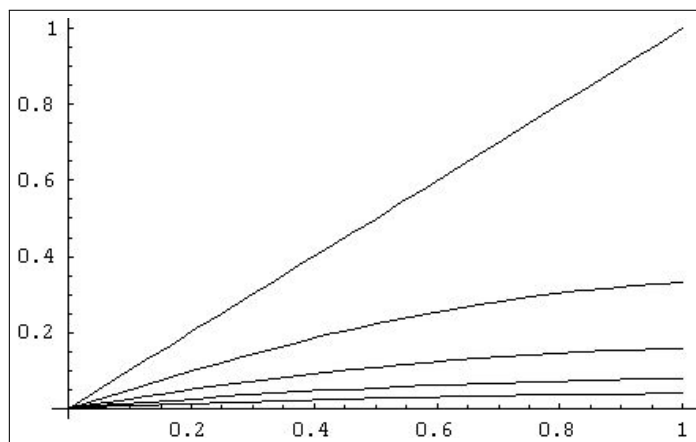


FIGURA 2. Le prime 5 approssimazioni successive.

La Figura 2 mostra chiaramente come i grafici delle approssimazioni successive si avvicinino rapidamente a quello della funzione $f = 0$ unico punto unito della trasformazione T .

OSSERVAZIONE 2.7. Il procedimento delle approssimazioni successive si applica in numerose situazioni anche diverse da quelle delle contrazioni T di uno spazio completo: é facile riconoscere che

- se T é una trasformazione continua di uno spazio metrico X in sé,

- se scelto un punto $x_0 \in X$ la successione

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots$$

converge,

- il suo limite y é, necessariamente un punto unito: $y = Ty$.

Il teorema di Banach dice semplicemente che tale convergenza si ha sempre se X é completo e T é una contrazione.

ESEMPIO 2.8. Consideriamo la trasformazione $T : C^0([0, 2\pi]) \rightarrow C^0([0, 2\pi])$ definita da

$$T(f(x)) = \sin(x) + \frac{1}{2}f(x)$$

Si tratta ovviamente di una contrazione

$$T(f_1) - T(f_2) = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2}$$

Il punto unito é anche evidente

$$T(f) = f \quad \rightarrow \quad \sin(x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) = 2 \sin(x)$$

In Figura 3 si possono vedere i grafici delle prime 5 iterate a partire da $f = 0$.

ESEMPIO 2.9. Una trasformazione di $C^0([0, 2\pi])$ interessante può essere

$$Tf(x) = \frac{1}{2} \sin(x + f(x))$$

- si tratta di una trasformazione di $C^0([0, 2\pi])$ in sé: infatti se $f(x) \in C^0([0, 2\pi])$ anche $\frac{1}{2} \sin(x + f(x)) \in C^0([0, 2\pi])$,
- si tratta di una contrazione infatti

$$\begin{aligned} |Tf_1(x) - Tf_2(x)| &= \frac{1}{2} |(\sin(x + f_1(x)) - \sin(x + f_2(x)))| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |f_1(x) - f_2(x)| \end{aligned}$$

da cui

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|$$

- quale sia il suo punto unito... non é ovvio, se ne può apprezzare il grafico in Figura 4

grafico riferito alla 20-esima approssimazione successiva partendo da $f_0(x) = x$, il tutto naturalmente determinato tramite Mathematica.

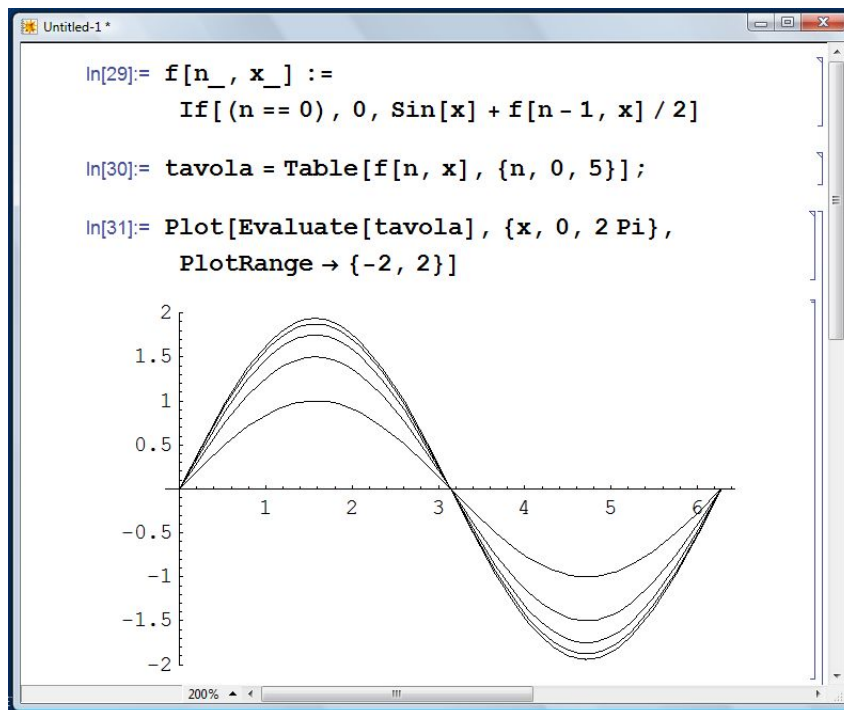


FIGURA 3. $T(f(x)) = \sin(x) + \frac{1}{2}f(x)$

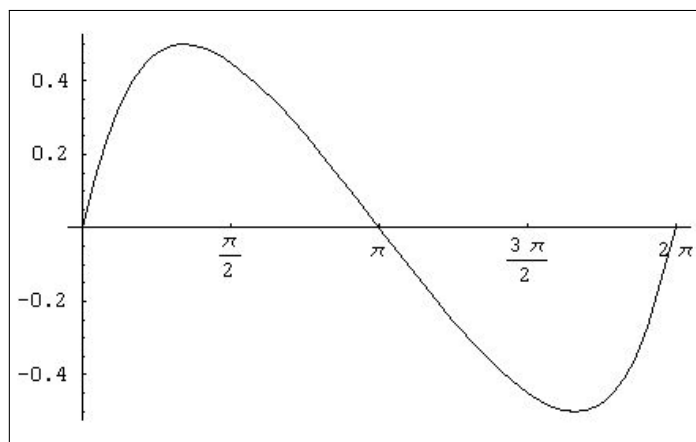


FIGURA 4. $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x + f(x))$

3. La ragnatela delle iterate

Nel caso di $X = \mathbb{R}$ e quindi di $Tx = f(x)$ la successione delle iterate $\{T^n x_0\}$ si costruisce agevolmente con un algoritmo geometrico, come si riconosce in Figura 5.

La funzione considerata é, in questo caso, $f(x) = e^{-x^2}$, sicuramente una contrazione come si riconosce dalla derivata, osservando cioè che

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |-2xe^{-x^2}| < 1$$

Scelto il primo punto x_0 si innesca la costruzione della ragnatela:

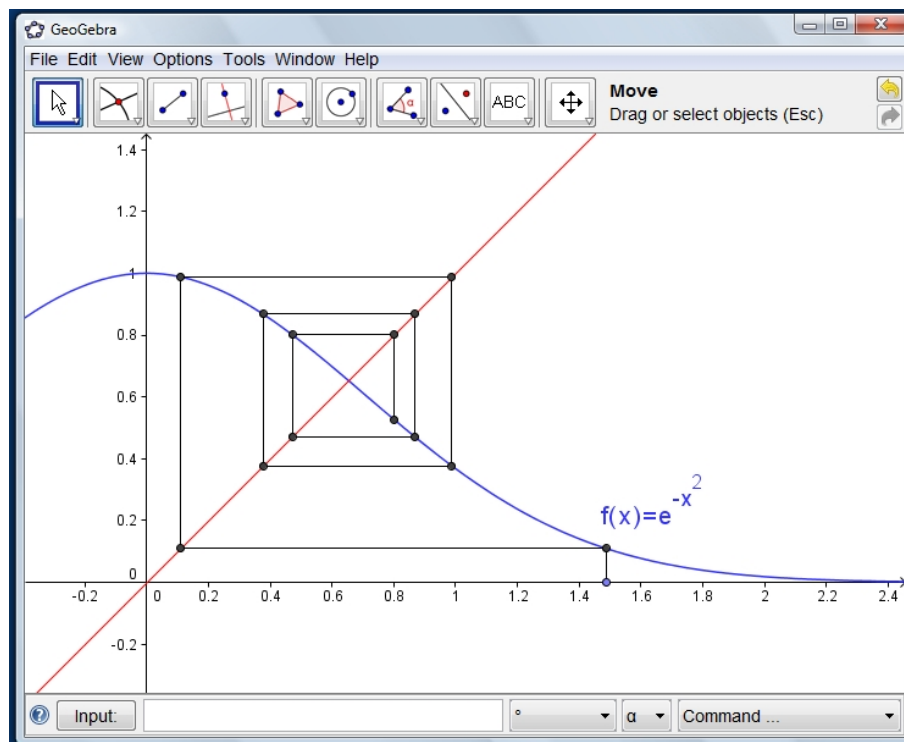


FIGURA 5. La successione $\{T^n(x_0)\}$, $T(x) = e^{-x^2}$

una spirale coordinata da punti del grafico di $y = f(x)$ a punti della bisettrice $y = x$.

La successione $\{T^n x_0\}$ é, naturalmente, la successione delle ascisse dei vertici della poligonale: in Figura 5 sono riportati i primi 14 vertici, che forniscono.... le prime 7 ascisse.

É evidente come tali ascisse convergano a quella del punto unito, l'ascissa dell'intersezione dei due grafici.

Una costruzione come quella indicata si può eseguire in corrispondenza anche a grafici di funzioni che non siano contrazioni: tuttavia in tali casi la successione delle iterate può non convergere, o può avere caratteri diversi di convergenza a seconda del punto da cui si inizia.

In Figura 6, riferita alla funzione $f(x) = x^2$ si considerano due ragnatele: una a partire da un punto iniziale superiore a 1 presenta evidentemente un andamento divergente, un'altra a partire da un punto preso tra 0 e 1 ha evidentemente un andamento convergente a 0.

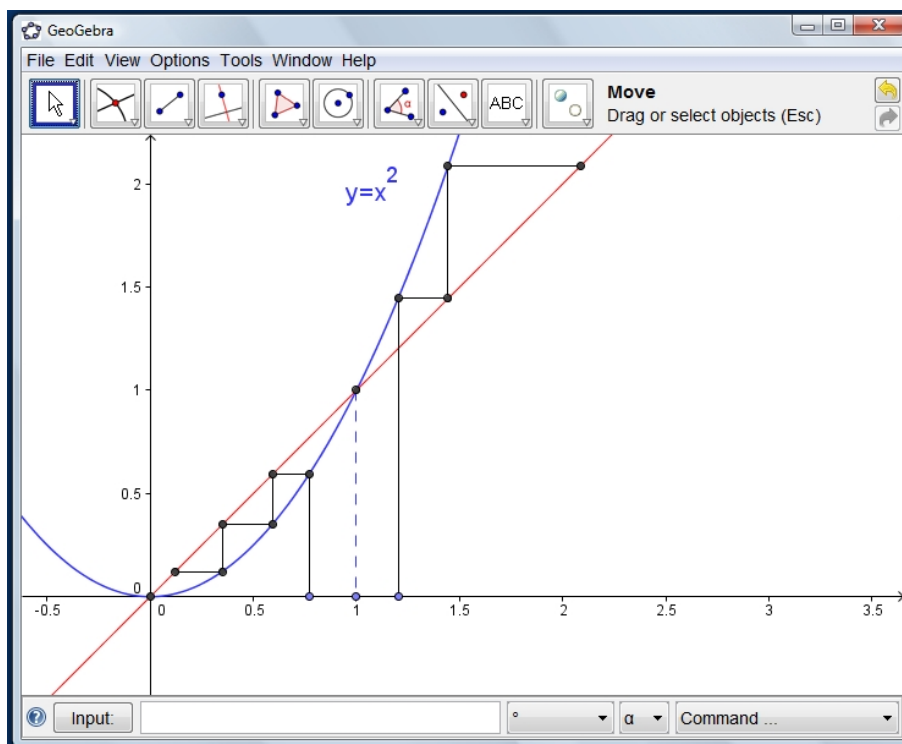


FIGURA 6. Le successioni $\{T^n(x_0)\}$, $T(x) = x^2$

3.1. Una generalizzazione.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia V uno spazio metrico completo, sia $M \subset V$ compatto e sia $T : M \rightarrow M$ una trasformazione strettamente non espansiva, cioè tale che*

$$D(Tx, Ty) < d(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

allora T ha uno ed un solo punto unito che è limite di tutte le successioni $\{T^n(x_0)\}$ costruite a partire da qualunque $x_0 \in M$.

ESEMPIO 3.2. *Il seguente è un contreesempio alla proposizione precedente.*

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad T(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

si tratta di una trasformazione strettamente non espansiva, $|T'| < 1$ tuttavia non ha punti uniti: infatti non trasforma alcun compatto M in se stesso.

4. Iterate

Il Teorema di Banach richiede che T sia una contrazione: si può riconoscere un risultato un po' più generale quale il seguente

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia X uno spazio metrico completo e sia T una trasformazione continua di X in sé: se un'iterata T^m è contrazione allora esiste ed è unico il punto unito per T .*

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto che

$$T : X \rightarrow X$$

ha senso considerare le iterate

$$T^2x = T(Tx), T^3x = T(T^2x), \dots$$

Se l'iterata T^m è una contrazione allora ad essa può applicarsi il Teorema di Banach:

- $\forall \xi \in X \quad \{T^{mn}\xi\}$ è convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{mn}\xi = y$
- $T^{m(n+1)}\xi = T^m(T^{mn}\xi) \rightarrow T^m y = y$
- $Ty = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{mn}\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{mn}(T\xi) = y$

da cui

$$Ty = y$$

L'ultima affermazione deriva dal fatto che le iterate costruite a partire da $T\xi$ devono anch'esse convergere all'unico punto unito di T^m . \square

ESEMPIO 4.2. *La trasformazione $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $T(x) = \cos(x)$ non è una contrazione: infatti*

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(x) - \cos(\pi/2)}{x - \pi/2} = 1$$

tuttavia la sua iterata prima

$$T^{[2]}(x) = \cos(\cos(x))$$

lo è: infatti

$$|(\cos(\cos(x)))'| = |\sin(\cos(x)) \sin(x)| \leq \sin(1) < 1$$

quindi anche T ha punto unito $T(x) = x \Leftrightarrow \cos(x) = x$.

CAPITOLO 3

Applicazioni del principio delle contrazioni

1. Il problema di Cauchy

La piú nota e importante applicazione del Teorema di Banach sulle contrazioni di uno spazio metrico completo si riferisce all'esistenza e unicitá della soluzione per il problema di Cauchy

$$(6) \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

essendo $f(x, y) \in C^0(S)$, nella striscia $S = \{(x, y) \mid |x| < a, \}$ e ivi uniformemente lipschitziana rispetto ad y .

OSSERVAZIONE 1.1. *Nel caso il termine $f(x, y)$ fosse definito solo nel rettangolo $P = \{(x, y) \mid |x| < a, |y| \leq b\}$ lo si puó prolungare alla striscia $S = \{(x, y) \mid |x| < a\}$ al modo seguente*

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, b) & \text{se } y > b \\ f(x, y) & \text{se } |y| \leq b \\ f(x, -b) & \text{se } y < -b \end{cases}$$

Nel seguito continueremo a indicare la funzione f^ prolungata ancora semplicemente con f .*

Si osservi che se $f \in C^1(P)$ allora la sua prolungata alla striscia é uniformemente lipschitziana rispetto ad y in S .

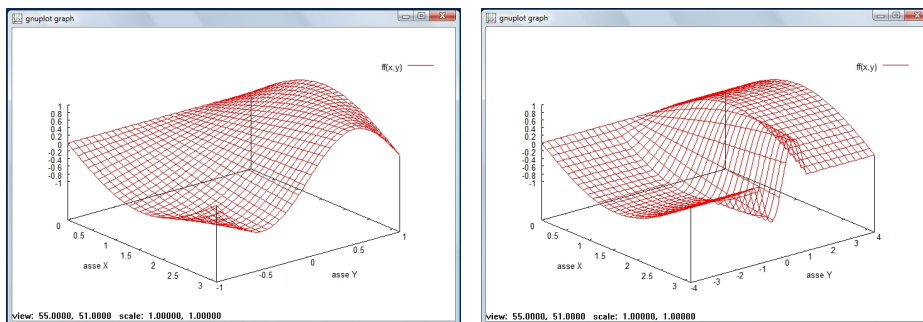


FIGURA 1. La $f(x, y) = \sin(xy)$, $(x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ e il suo prolungamento alla striscia.

Il problema di Cauchy equivale all'equazione integrale

$$(7) \quad y(t) = y_0 + \int_0^t f[\tau, y(\tau)]d\tau \quad t \in (-a, a)$$

nell'incognita $y(t) \in C^0([-a, a])$.

Consideriamo lo spazio metrico completo $X = C^0([-a, a])$ delle funzioni v continue per $t \in (-a, a)$ e consideriamo la trasformazione T che ad ogni funzione $v \in C^0([-a, a])$ fa corrispondere la funzione $w = Tv$ seguente

$$w(t) = y_0 + \int_0^t f[\tau, v(\tau)]d\tau, \quad w = Tv$$

Le ipotesi

- $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M_1|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in S$
- $M_1 a < 1$

garantiscono che la trasformazione

$$\begin{cases} T : C^0([-a, a]) \rightarrow C^0([-a, a]) \\ \|Tv_1 - Tv_2\| \leq L\|v_1 - v_2\|, \end{cases} \quad L < 1$$

ovvero ch sia una contrazione di $C^0([-a, a])$ in sé.

Applicando alla trasformazione T il Teorema di Banach, pagina 11, si deduce l'esistenza di una e una sola funzione $y \in C^0([-a, a])$ tale che

$$y = Ty$$

Tale funzione, tenuto conto dell'equivalenza osservata, rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (6).

OSSERVAZIONE 1.2. *Nel caso che f sia definita solo in un rettangolo P , tenuto conto che $y(0) = y_0 \in (-b, b)$ i valori di $y(t)$ restano in $[-b, b]$ per $t \simeq 0$ e quindi in tale tratto il problema riferito alla funzione f^* coincide con il problema riferito a f in P .*

1.1. Soluzioni in grande. Per ottenere l'esistenza di una soluzione per il problema di Cauchy bastava riconoscere che la trasformazione T fosse una contrazione.

Tenuto conto della Proposizione 4.1 basta riconoscere che una iterata di T sia una contrazione.

Questo può ridurre la severità con la quale deve essere ristretto l'intervallo $(-a, a)$ in cui si riesce a provare l'esistenza di una soluzione.

Supponiamo che $f(t, y)$ sia definita per $y \in \mathbb{R}$ e uniformemente Lipschitziana rispetto a y , cioè

$$(8) \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

allora, scelto t si ha

$$|Tv_1 - Tv_2| = \left| \int_0^t (f(\tau, v_1(\tau)) - f(\tau, v_2(\tau))) d\tau \right| \leq |t| \max_{|s| \leq a} |v_1(s) - v_2(s)|$$

$$|T^2v_1 - T^2v_2| \leq L \int_0^t |\tau| \max_{|s| \leq a} |v_1(s) - v_2(s)| d\tau = \frac{L^2 t^2}{2!} \max_{|s| \leq a} |v_1(s) - v_2(s)|$$

da cui in generale

$$|T^m v_1 - T^m v_2| \leq \frac{L^m t^m}{m!} \max_{|s| \leq a} |v_1(s) - v_2(s)|$$

É chiaro che comunque si scelga l'intervallo $(-a, a)$ su cui lavorare riuscirá

$$\max_{|s| \leq a} |T^m v_1 - T^m v_2| \leq \frac{L^m a^m}{m!} \max_{|s| \leq a} |v_1(s) - v_2(s)|$$

ovvero

$$\|T^m v_1 - T^m v_2\| \leq \frac{L^m a^m}{m!} \|v_1 - v_2\|$$

e i fattori

$$\frac{L^m a^m}{m!}$$

sono addirittura infinitesimi con $m \rightarrow \infty$!

Dove sono finite quindi le tanto temute restrizioni soluzioni in grande, soluzioni in piccolo ?

Il problema resta nell'ipotesi (8) tutt'altro che innocua !

La semplicissima $y' = y^2$ presenta un secondo membro che non soddisfa affatto la (8)!

CAPITOLO 4

Il metodo di Newton per sistemi

La soluzione di equazioni, l'inversione di funzioni, la soluzione di sistemi sono tutti argomenti che possono esprimersi come problemi di punto unito, problemi ai quali può quindi applicarsi utilmente il teorema di Banach sulle contrazioni.

1. La formula di Newton

Sia

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f(x_0) = u_0, \quad f'(x_0) \neq 0$$

Si può provare, servendosi semplicemente del Teorema di Lagrange, che esistono $\delta > 0, \sigma > 0$ tali che

- $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (u_0 - \sigma, u_0 + \sigma)$
- f é dotata di inversa, continua

$$f^{-1} : (u_0 - \sigma, u_0 + \sigma) \rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Il secondo punto corrisponde a

- esistenza e unicitá della soluzione $x(u)$ dell'equazione $u = f(x)$ per $\forall u \in (u_0 - \sigma, u_0 + \sigma)$
- dipendenza continua di $x(u)$ da u .

Tenuto conto che per ogni fissato u le soluzioni dell'equazione $u = f(x)$ sono i punti uniti delle funzioni

$$g(x) = x + a(u - f(x)), \quad a \neq 0$$

le affermazioni precedenti sono provate se proviamo che esiste $a \neq 0$ e $\delta > 0$ tali che

- $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |g'(x)| < 1$

In altri termini le affermazioni precedenti sono riconducibili al Teorema di Banach se, detto S lo spazio metrico completo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$g : S \rightarrow S, \quad \text{contrazione}$$

Verifica dell'applicabilitá del Teorema di Banach:

- Per ottenere che $g'(x)$ sia di *modulo piccolo* prendiamo, tenuto conto dell'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$

$$a = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad g'(x_0) = 0$$

- quindi, tenuto conto dell'ipotesi $f \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall |x - x_0| < \delta \rightarrow |g'(x)| < \frac{1}{2}$$

- $g : S \rightarrow S$ infatti

$$\begin{aligned} |g(x) - x_0| &\leq |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - x_0| < \\ &< \frac{1}{2}|x - x_0| + \frac{1}{|f'(x_0)|}|u - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{|f'(x_0)|}|u - u_0| \end{aligned}$$

- pertanto se

$$\frac{1}{|f'(x_0)|}|u - u_0| \leq \frac{1}{2}\delta \quad \rightarrow \quad |g(x) - x_0| < \delta$$

Pertanto $\forall |u - u_0| < \frac{|f'(x_0)|}{2}\delta$

- g é una contrazione di S in S ,
- l'equazione $u = f(x)$ ha una e una sola soluzione $x \in S$
- tale soluzione, $x(u)$ é il limite della successione delle iterate $\{g^{[n]}(\xi)\}$, $\forall \xi \in S$,
- le espressioni $g^{[n]}(\xi)$, iterate di funzioni continue in u , sono funzioni continue di u ,
- la convergenza della successione $\{g^{[n]}(\xi)\}$ é uniforme rispetto a u , quindi il limite $x(u)$ é funzione continua di u , $\forall |u - u_0|$.

La formula di Newton:

Scelto $\xi = x_0$ la soluzione dell'equazione $u = f(x)$ é, supponendo di lavorare rispettando le ipotesi precedenti $x \approx x_0$, $u \approx u_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^{[n]}(x_0)$$

ovvero posto

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \frac{1}{f'(x_0)}(u - f(x_n)) \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - u}{f'(x_0)}$$

esattamente la successione ricavata col metodo di linearizzazione delle tangenti o di Newton applicato alla ricerca degli zeri x della funzione $f(x) - u$

Riesce

$$x(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

ESEMPIO 1.1. Sia $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $u_0 = f(x_0) = 1$.
Per risolvere l'equazione

$$f(x) = 1.5$$

si prende

$$g(x) = x + \frac{1}{2}(1.5 - x^2)$$

La successione delle iterate, a cominciare da $x_0 = 1$ é pertanto

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1.25 \\ x_2 &= 1.21875 \\ x_3 &= 1.22607 \\ x_5 &= 1.22481 \\ x_7 &= 1.22475 \\ x_8 &= 1.22474 \end{aligned}$$

... si tenga presente che $\sqrt{1.5} = 1.22474...$

L'algoritmo illustrato cessa di convergere se u si allontana troppo da 1: quello che si perde é il valore basso di $|g'(x)|$ e quindi il carattere di contrazione per g .

2. Il caso bidimensionale

Sia

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F \in C^1(\Omega)$$

$$U = F(X) \quad \begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$$

Indicata con $F'(X)$ la matrice jacobiana

$$F'(X) = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix}$$

sussiste il seguente Teorema 2.1, del tutto analogo a quanto visto nel caso unidimensionale precedente

TEOREMA 2.1. Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F \in C^1(\Omega)$

- $U_0 = F(X_0)$
- $F'(X_0)$ invertibile,

allora esistono due numeri positivi δ , σ tale che F é un omeomorfismo tra

$$|X - X_0| < \delta \quad e \quad |U - U_0| < \sigma$$

DIMOSTRAZIONE. Scelto U e scelta una matrice a invertibile indichiamo con

$$G(X) = X + a(U - F(X))$$

Le soluzioni X dell'equazione $U = F(X)$ sono i punti fissi della G e viceversa,

$$X = G(X) \Leftrightarrow a(U - F(X)) = 0 \Leftrightarrow U = F(X)$$

La funzione G dipende anche da U , quindi ovviamente dipenderanno da U i suoi (eventuali) punti uniti.

Il teorema pertanto sarà dimostrato se proveremo che esistono δ, σ positivi e a invertibile tali che per

$$|U - U_0| < \sigma$$

G sia una contrazione del dominio circolare $|X - X_0| < \delta$.

Scelta della a :

tenuto conto che $G'(X_0) = I - aF'(X_0)$ la scelta migliore é (come nel caso unidimensionale)

$$a = F'(X_0)^{-1}$$

Scelta di δ :

tenuto conto che $G'(X_0) = 0$ e che $G'(X)$ é continua in X allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$|X - X_0| \leq \delta \quad \rightarrow \quad \max\{|G_{1,x}|, \dots\} \leq \frac{1}{4}$$

Consideriamo lo spazio metrico completo $S : |X - X_0| \leq \delta$, occorre esaminare se $G : S \rightarrow S$, ovvero se

$$|X - X_0| < \delta \quad \overset{???}{\rightarrow} \quad |G(X) - X_0| < \delta$$

Tenuto conto che $\forall X \in S$

$$\begin{aligned} |G(X) - X_0| &\leq |G(X) - G(X_0)| + |G(X_0) - X_0| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}|X - X_0| + |F'(X_0)^{-1}||U - U_0| \leq \frac{1}{2}\delta + |F'(X_0)^{-1}||U - U_0| \end{aligned}$$

si ha quindi che

$$|F'(X_0)^{-1}||U - U_0| \leq \frac{1}{2}\delta \quad \rightarrow \quad |G(X) - X_0| < \delta$$

Per il teorema di Banach sulle contrazioni si riconosce pertanto che

$$\forall |U - U_0| \leq \frac{|F'(X_0)|}{2\delta}$$

la trasformazione $G(X) = X + F'(X_0)^{-1}(U - F(X))$ é una contrazione del cerchio $|X - X_0| < \delta$: pertanto

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione del teorema si può ricavare con un metodo iterativo, costruttivo, del tutto diverso da quello esistenziale tipico delle dimostrazioni standard del teorema di Dini.

L'osservazione principale é la seguente:

$$F(X, U) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = X - F_X^{-1}(X_0, U_0) F(X, U)$$

Quindi, indicata con

$$G_U(X) = X - F_X^{-1}(X_0, U_0) F(X, U)$$

si ha

$$\forall U \in J \quad F(X, U) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = G_U(X)$$

Perché G_U abbia punto unito basta riconoscere che

$$\forall U \in J \quad G_U : I \rightarrow I, \quad \| G_U(X_1) - G_U(X_2) \| \leq L \| X_1 - X_2 \| \quad L < 1.$$

Si ha

$$G_U : I \rightarrow I \quad \Leftrightarrow \quad \| G_U(X) - X_0 \| < \alpha$$

dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$\| G_U(X) - X_0 \| \leq \| G_U(X) - G_U(X_0) \| + \| G_U(X_0) - X_0 \|$$

Tenuto presente che le funzioni di X e di U

$$G'_U(X) = Id - F_X^{-1}(X_0, U_0), \quad F_X(X, U)$$

sono continue in U e in X e che

$$\begin{cases} G'_{U_0}(X_0) = 0 \\ F(X_0, U_0) = 0 \end{cases}$$

esistono α, β ed $M > 0$ tali che

$$\begin{cases} \| X - X_0 \| < \alpha \\ \| U - U_0 \| < \beta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \| G'_U(X) \| \leq \frac{1}{2} \\ \| F_X^{-1}(X_0, U_0) F_X(X, U) \| \leq M \| U - U_0 \| \end{cases}$$

Ne segue quindi

$$\begin{aligned} \| G_U(X) - X_0 \| &\leq \| G_U(X) - G_U(X_0) \| + \| G_U(X_0) - X_0 \| \\ &\leq \frac{1}{2} \| X - X_0 \| + \| F_X^{-1}(X_0, U_0) F_X(X, U) \| \leq \frac{1}{2} \alpha + M \| U - U_0 \| \end{aligned}$$

da cui, riassumendo,

$$\| G_U(X) - X_0 \| \leq \frac{1}{2} \alpha + M \beta$$

da cui se

$$M \beta \leq \frac{1}{2} \alpha$$

l'asserto,

$$\|G_U(X) - X_0\| < \alpha \quad \rightarrow \quad G_U : I \rightarrow I$$

Per tali punti quindi $G_U(X)$ riesce una contrazione (rispetto ad X): il punto $X(U)$

$$X(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_U^{[n]}(X_0)$$

rappresenta un punto unito e, quindi

$$F(X(U), U) = 0$$

la funzione

$$X = X(U) : J \rightarrow I$$

esprime la funzione implicita determinata dall'equazione $F(X, U) = 0$. Tenuto conto che

- le approssimazioni successive $G_U^{[n]}(X_0)$ usate nella costruzione di $X(U)$ sono continue,
- che la convergenza della successione é uniforme (rispetto ad U)

se ne deduce che la funzione $X(U)$ é continua.

□

CAPITOLO 5

Lemma di Urysohn

1. La distanza

LEMMA 1.1. Sia $F \subset E$ con E spazio metrico: la funzione

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$$

é lipschitziana¹.

DIMOSTRAZIONE.

$$\forall y \in F \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \rightarrow \quad d(x, F) \leq d(x, z) + d(z, F)$$

da cui segue

$$d(x, F) - d(z, F) \leq d(x, z)$$

il ruolo simmetrico di x e z implica quindi anche

$$d(z, F) - d(x, F) \leq d(x, z)$$

da cui l'asserto

$$|d(x, F) - d(z, F)| \leq d(x, z)$$

□

2. Funzioni lipschitziane

LEMMA 2.1. Siano $F(x, y)$ uniformemente lipschitziane rispetto ad x , cioè esista $L > 0$ tale che per ogni coppia x_1, x_2 riesca

$$|F(x_1, y) - F(x_2, y)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall y$$

allora anche

$$g(x) = \sup_y F(x, y)$$

é lipschitziana di costante L .

¹http://www.ann.jussieu.fr/~perthame/cours_analyse.pdf



FIGURA 1. Pavel Samuilovich Urysohn (1898 - 1924)

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni x_1 esiste y_{x_1} tale che

$$g(x_1) \leq F(x_1, y_{x_1}) + \varepsilon$$

ne segue pertanto

$$g(x_1) - g(x_2) \leq F(x_1, y_{x_1}) + \varepsilon - g(x_2) \leq F(x_1, y_{x_1}) - F(x_2, y_{x_1}) + \varepsilon$$

Dalla simmetria di x_1 e x_2 segue quindi

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq |F(x_1, y_{x_1}) - F(x_2, y_{x_1})| + \varepsilon$$

da cui segue

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| + \varepsilon \quad \rightarrow \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

□

COROLLARIO 2.2. *Sia*

$$s(x) = \inf_y F(x, y)$$

con le $F(x, y)$ lipschitziane $|F(x_1, y) - F(x_2, y)| \leq L|x_1 - x_2|$ allora anche $s(x)$ é lipschitziana.

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto della relazione

$$\inf_y F(x, y) = -\sup_y \{-F(x, y)\}$$

e tenuto conto che, per il Lemma precedente, $\sup_y \{-F(x, y)\}$ é lipschitziana tale riesce anche $s(x)$. □

3. LEMMA DI URYSOHN

LEMMA 3.1. *Sia*

- $F \subset E$ con E spazio metrico ed F chiuso,
- sia $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata e non negativa,

esiste $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $\forall x \in F : g(x) = f(x)$
- $\inf_{x \in E} g(x) = \inf_{x \in E} f(x)$
- $\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{x \in E} f(x)$
- g *é* continua.

DIMOSTRAZIONE. La funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in F \\ \frac{1}{d(x, F)} \inf_{y \in F} (f(y)d(x, y)) & \forall x \notin F \end{cases}$$

- La prima condizione, $\forall x \in F : g(x) = f(x)$, *é* vera per costruzione.
- La seconda, da verificare solo per $\forall x \notin F$, deriva, tenuto conto che $f(y) > 0$ da

$$g(x) \geq \frac{d(x, y)}{d(x, F)} f(y) \geq f(y) \geq \inf_{y \in F} f(y)$$

- La terza, anch'essa da verificare solo per $\forall x \notin F$, si deduce osservando che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y_\varepsilon \in F \rightarrow \frac{d(x, y_\varepsilon)}{d(x, F)} \leq 1 + \varepsilon$$

e quindi, tenuto conto che f *é* non negativa,

$$\frac{f(y_\varepsilon) d(x, y_\varepsilon)}{d(x, F)} \leq (1 + \varepsilon) f(y_\varepsilon) \leq (1 + \varepsilon) \sup_{y \in F} f(y)$$

da cui segue quindi

$$g(x) \leq (1 + \varepsilon) \sup_{y \in F} f(y)$$

da cui, per l'arbitrarietá di ε segue l'asserto del terzo punto.

- La continuitá:
 - per $x_0 \in \mathcal{C}(F)$: in un intorno circolare di x_0 a distanza positiva da F , riescono uniformemente lipschitziane rispetto ad x le funzioni di x

$$\frac{f(y)d(x, y)}{d(x, F)}$$

da cui segue, tenuto del 2.2, che anche il loro $\inf_y g(x)$, risulta lipschitziana, quindi continua in tale intorno di x_0 .
 – per $x_0 \in F$: occorre mostrare che qualunque sia la successione $\{x_n\}$ convergente ad x_0 riesca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$$

Se i punti della successione appartengono ad F allora il risultato é ovvio perché in F la g é definita come f che é, per ipotesi continua.

Il problema nasce se i punti $\{x_n\}$ cadono fuori di F : in tal caso riesce

$$\varepsilon_n = d(x_n, F) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Scegliamo ora $y_n \in F$ tali che

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, F) + \varepsilon_n^2$$

riesce allora

$$\lim_n y_n = \lim_n x_n = x_0$$

e quindi

$$(9) \quad g(x_n) \leq f(y_n) \frac{d(x_n, y_n)}{d(x_n, F)} \leq f(y_n)(1 + \varepsilon_n)$$

Scegliamo ora $z_n \in F$ tali che

$$\inf_{y \in F} f(y) d(x_n, y) \geq f(z_n)(d(x_n, z_n) - \varepsilon_n^2)$$

da cui segue

$$d(x_n, F)g(x_n) \geq f(z_n)(d(x_n, z_n) - \varepsilon_n^2)$$

ovvero anche

$$\sup(f)d(x_n, F) \geq \inf(f)d(x_n, z_n) \quad \rightarrow \quad d(x_n, z_n) \leq \frac{\sup(f)}{\inf(f)}d(x_n, F)$$

e quindi

$$\lim_n x_n = \lim_n z_n$$

Ne segue allora

$$(10) \quad g(x_n) \geq f(z_n) \frac{d(x_n, z_n) - \varepsilon_n^2}{d(x_n, F)} = f(z_n) \left\{ \frac{d(x_n, z_n)}{d(x_n, F)} - \varepsilon_n \right\}$$

dalle due (9) e (10) si ha

$$(11) \quad f(z_n) - \varepsilon_n \leq g(x_n) \leq f(y_n)(1 + \varepsilon_n)$$

dalla quale, tenuto conto che

$$\lim_n (f(z_n) - \varepsilon_n) = f(x_0) = \lim_n f(y_n)(1 + \varepsilon_n)$$

segue, teorema dei Carabinieri,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$$

□

PROPOSIZIONE 3.2. *Se $f(x) = c$ allora il prolungamento di Urysohn é ovviamente ancora la costante $g(x) = c$*

PROPOSIZIONE 3.3. *Se f non é non negativa basta aggiungere ad essa una costante....*

4. Prolungamenti condizionati

PROPOSIZIONE 4.1. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e disgiunti: allora esiste $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\forall x \in A \rightarrow f(x) = 1, \quad \forall x \in B \rightarrow f(x) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Indicato con

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y)$$

una funzione che soddisfa la tesi é

$$f(x) = \frac{d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

□

TEOREMA 4.2. *Siano*

$$F \subset \Omega \subset F$$

con F chiuso e Ω aperto in E spazio metrico. Allora esiste una funzione continua $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $0 \leq g(x) \leq 1$
- $\forall x \in F \quad g(x) = 1$
- $\forall x \notin \Omega \quad g(x) = 0$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Lemma precedente alla $f(x)$ che vale 1 in F e 0 fuori di Ω . □

5. Le partizioni dell'unitá.

6. Appendice

<http://www.math.gatech.edu/~heil/6338/summer08/section1f.pdf>

CAPITOLO 6

Il teorema di Brouwer

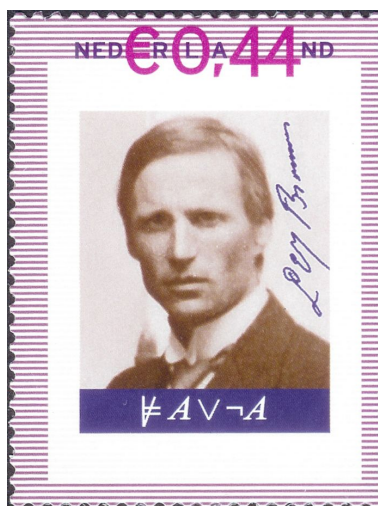


FIGURA 1. L E J Brouwer, 1881-1966.

1. Introduzione

Si parla di punto, o punti, uniti in riferimento ad una funzione

$$f : X \rightarrow X$$

di uno spazio X in sé stesso: si tratta cioè di quegli elementi $u \in X$ tali che

$$f(u) = u$$

Riferendosi ad $X = \mathbb{R}$ é facile riconoscere che non tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hanno punti uniti.

Il teorema di Banach, 2.4, pagina 11, fornisce una condizione sufficiente all'esistenza di punto unito deducendola dalla proprietà di contrazione della funzione T .

La funzione $f(x) = x + 1$, ad esempio non ne ha

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 1 \neq x$$

Un risultato fondamentale e molto generale é il seguente

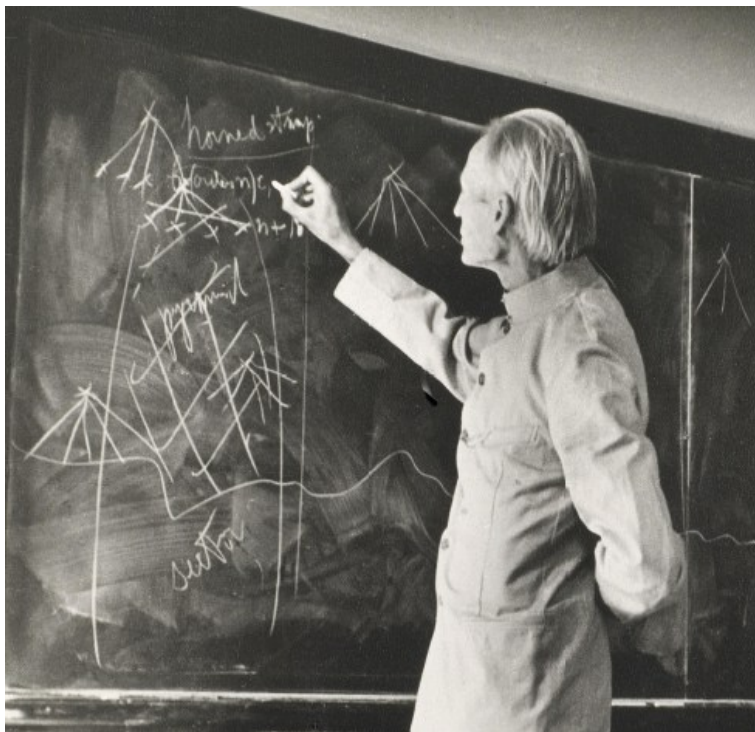


FIGURA 2. Teorema di Brouwer

TEOREMA 1.1 (Brouwer ¹). *Ogni applicazione continua di un insieme compatto e convesso $K \subseteq \mathbb{R}^n$ in sé*

$$f : K \rightarrow K$$

possiede almeno un punto unito

$$\exists x_0 \in K, \quad f(x_0) = x_0$$

La dimostrazione di questo teorema nella sua generalità é piuttosto complessa e dipende dalle sinergie di diversi settori matematici (analisi, topologia, algebra, ecc. . .)

Ciò non toglie che, almeno in casi particolari esso sia sostanzialmente evidente.

Nei paragrafi successivi considereremo alcuni di tali casi.

¹L E J Brouwer, 1881-1966, was a Dutch mathematician best known for his topological fixed point theorem. He founded the doctrine of mathematical intuitionism, which views mathematics as the formulation of mental constructions that are governed by self-evident laws. He became an honorary member of the EMS in 1954.

2. Il caso unidimensionale

Nel caso di $n = 1$, $K = [a, b]$ il risultato é ovvio, si chiama...

... *teorema d'esistenza degli zeri*, riferito a $G(x) = f(x) - x$ e si riconosce guardando, ad esempio nel caso $[a, b] = [0, 1]$ la Figura 3

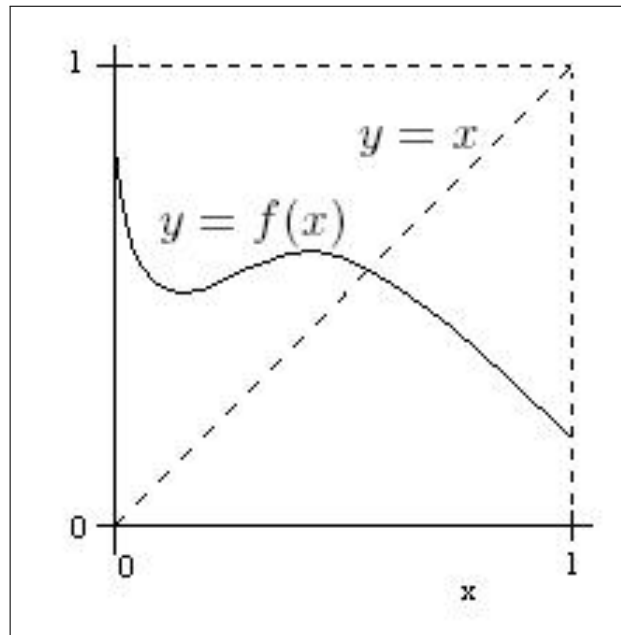


FIGURA 3. Il caso unidimensionale

Geometricamente si riconosce che qualsiasi curva tra un punto del segmento verticale $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$ e uno di quello $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$ traversa necessariamente la diagonale da $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

In altri termini il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

ammette qualche soluzione (x_0, y_0)

$$f(x_0) = x_0$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Si noti che, invece, rinunciando alla limitatezza il risultato si perde: il caso $f(x) = x + 1$ precedentemente indicato non manda alcun intervallo chiuso e limitato in sé...*

... e non ha punti uniti !

I punti uniti poi si possono perdere naturalmente se si rinuncia alla convessità: si pensi al compatto, non convesso,

$$K = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

e all'onestissima funzione

$$f(x) = 1 - x$$

che manda $K \rightarrow K$, ma non ha alcun punto unito.

3. Il caso di \mathbb{R}^2

3.1. Un esperimento con la carta. Prendiamo due copie della pagina delle quotazioni di Borsa del giornale di oggi: spiegazziamone una e riappoggiamola sopra a quella liscia originale.

Il teorema di Brouwer afferma, anche se appare dire cosa assai piú astratta, che almeno una delle quotazioni, del foglio spiegazzato si trova esattamente sopra, corrisponde verticalmente, della stessa quotazione del foglio liscio...

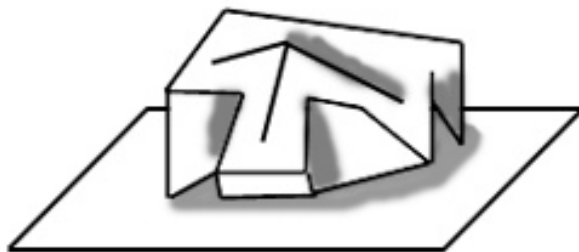


FIGURA 4. Il foglio spiegazzato sopra quello originale...

Consideriamo infatti l'applicazione F del primo foglio in sé costruita al modo seguente:

- indichiamo con P un punto del primo foglio, identificabile con la quotazione di un certo titolo di Borsa,
- cerchiamo lo stesso titolo di Borsa sul foglio spiegazzato,
- abbassiamo da tale punto del foglio spiegazzato la proiezione verticale sul foglio liscio,

sia $Q = F(P)$ il punto del foglio liscio cui siamo pervenuti.

La funzione F così costruita applica il foglio liscio in sé stesso ed é continua.

Quindi, per il teorema di Brouwer, esiste un punto unito

$$P_0 = F(P_0)$$

circostanza che, tenuto conto di come era stata definita l'applicazione F corrisponde a dire che....

.....almeno una delle quotazioni, del foglio spiegazzato si trova esattamente sopra, corrisponde verticalmente, della stessa quotazione del foglio liscio.

Per chi non vede quanto ciò sia credibile si consiglia un esperimento semplice: appoggiare il foglio da spiegazzare semplicemente a ponte su quello originale, centrato a metà,...

Forse i titoli a metà pagina staranno sulla stessa verticale di quelli a metà pagina del foglio liscio...

Dimostreremo, nel seguito di questo paragrafo, il teorema di Brouwer nel caso $n = 2$ e $K : x^2 + y^2 \leq 1$, il cerchio di centro l'origine e raggio 1.

3.2. Costruiamo una strana funzione. Supponiamo che K sia il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ e sia

$$F : K \rightarrow K$$

una funzione continua (una coppia cioè di funzioni reali di due variabili reali, continue)

Se fosse, cosa che speriamo di poter escludere,

$$(12) \quad F(P) \neq P, \quad \forall P \in K$$

cioè se F non avesse alcun punto unito, *potremmo*

- associare ad ogni $P \in K$ la semiretta

$$r_P := \overrightarrow{F(P)P}$$

di origine $F(P)$ e contenente P

- far corrispondere ad ogni $P \in K$ il punto $Q = G(P)$ intersezione di r_P con la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ che delimita K

Indichiamo le proprietà della funzione G ora costruita:

- $G : K \rightarrow \partial K$, infatti $Q = G(P) \in \partial K$,
- se $P \in \partial K$, riesce $G(P) = P$,
- G è una funzione continua, la continuità di F e la semplicità della costruzione geometrica eseguita lo garantiscono.

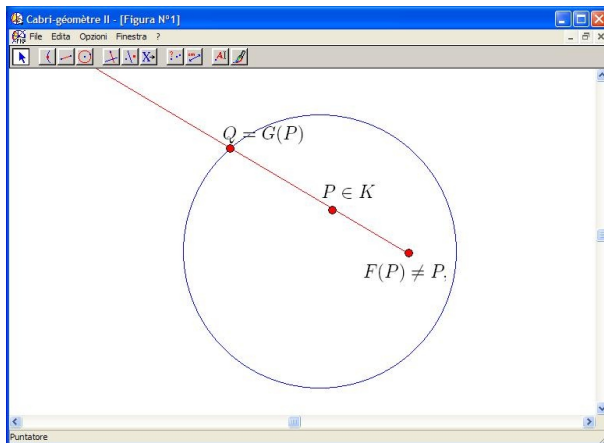
Tali proprietà si sintetizzano, tradizionalmente, col dire

G , vedi Figura 5, è una retrazione² continua del cerchio K sulla circonferenza ∂K che lo delimita.

Il risultato fondamentale di cui ci serviremo è che

si è sicuri,

² sarebbe una... se esistesse davvero!

FIGURA 5. $Q = G(P)$

vedi prossimo Lemma 3.1, che non esistono retrazioni continue del cerchio sulla circonferenza che lo delimita e che, quindi, l'ipotesi fatta, e usata nella costruzione della G ,

$$F(P) \neq P, \quad \forall P \in K$$

é da respingersi.

In altri termini che

*le funzioni continue $F : K \rightarrow K$ con $K : x^2 + y^2 \leq 1$
hanno necessariamente qualche punto unito,*

affermazione che é esattamente il Teorema di Brouwer, vedi pagina 40, nel caso particolare del cerchio.

3.3. Il lemma sull'impossibilit  delle retrazioni.

LEMMA 3.1. *Non esiste alcuna retrazione del cerchio sulla circonferenza, cio  non esiste alcuna funzione continua definita nel cerchio $C : x^2 + y^2 \leq 1$ a valori sulla circonferenza ∂C che lo delimita e che coincida con la funzione identica su tale circonferenza.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo che esista una retrazione continua

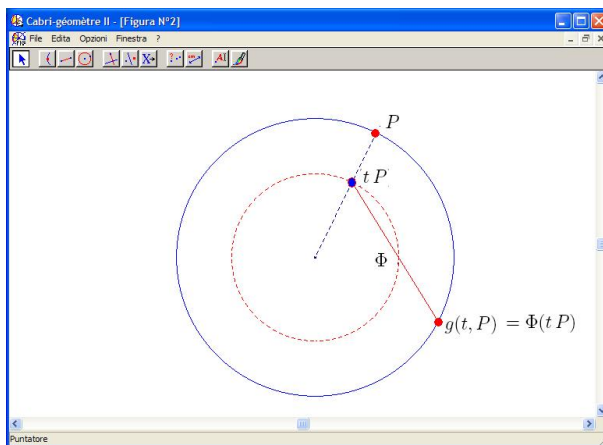
$$\Phi : K \rightarrow \partial K$$

del cerchio sulla circonferenza.

Definiamo, per ogni $P \in \partial K$ la funzione di t e di P

$$g(t, P) = \Phi(tP), \quad t \in [0, 1], P \in \partial K$$

il valore $g(t, P)$ é cio  il trasformato $\Phi(tP)$ tramite Φ del punto di stessa anomalia di P ma preso sulla circonferenza di raggio t .

FIGURA 6. $g(t, P) = \Phi(tP)$, $t \in [0, 1]$, $P \in \partial K$.

La g riesce continua

$$g : [0, 1] \times \partial K \rightarrow \partial K$$

e inoltre riesce

$$g(0, P) = \Phi(O), \quad g(1, P) = \Phi(P) = P$$

avendo indicato con O il centro di K .

Indicati con $e^{i\theta}$ i punti della circonferenza si ha

$$g(t, e^{i\theta}) = e^{i\varphi(t, \theta)}$$

Tenuto conto che $g(t, P)$ é una funzione continua di t e di P ne segue che $\varphi(t, \theta)$

- é una funzione continua delle due variabili t e θ ,
- dovendo $e^{i\varphi(t, \theta)}$ essere periodica di periodo 2π rispetto a θ :

$$\varphi(t, \theta + 2\pi) - \varphi(t, \theta) = 2r(t)\pi$$

con $r(t)$ funzione di t

- a valori interi,
- continua rispetto a t

Essendo $g(1, P) = P$ ovvero $e^{i\varphi(1, \theta)} = e^{i\theta}$ segue che

$$\varphi(1, \theta) = \theta + 2n\pi \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varphi(1, 0) = 2n\pi \\ \varphi(1, 2\pi) = 2\pi + 2n\pi \end{cases}$$

da cui, sottraendo,

$$\varphi(1, 2\pi) - \varphi(1, 0) = 2\pi = 2r(0)\pi \quad \rightarrow \quad r(1) = 1$$

Ma, essendo $g(0, P) = \Phi(O)$ costante ne segue che

$$\varphi(0, \theta) = \psi_0 + 2m\pi \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varphi(0, 0) = \psi_0 + 2m\pi \\ \varphi(0, 2\pi) = \psi_0 + 2m\pi \end{cases}$$

da cui, sottraendo,

$$\varphi(0, 2\pi) - \varphi(0, 0) = 0 = 2r(0)\pi \quad \rightarrow \quad r(0) = 0$$

e sappiamo bene che non esiste nessuna funzione $r(t)$

- continua in $[0, 1]$,
- a valori interi,
- non costante !

L'ammissione dell'esistenza della retrazione $\Phi : K \rightarrow \partial K$ ha condotto ad una contraddizione: pertanto tale ammissione deve essere rifiutata, ovvero risulta provato il Lemma. \square

OSSERVAZIONE 3.2. *Una retrazione del cerchio sulla circonferenza rappresenta una trasformazione continua che*

risucchia

il cerchio sulla circonferenza ! I punti della circonferenza restano fermi e tutti i punti interni al cerchio vengono attirati sulla circonferenza: chi qua, chi lá !

Si intuisce, pensando per esempio ad una attrazione elastica di tipo radiale, che il centro.....

.....non saprebbe dove andare.

3.4. Il teorema nel caso del cerchio.

Se

$$F : K \rightarrow K, \quad K : x^2 + y^2 \leq 1$$

non avesse punti uniti potremmo costruire con essa la strana funzione G di Figura 5, che risulterebbe essere una retrazione continua di K su ∂K , retrazione che il Lemma 3.1 esclude.

Risulta quindi provato che se $F : K \rightarrow K$, esiste sicuramente qualche punto $P_0 \in K$ tale che

$$F(P_0) = P_0$$

ESEMPIO 3.3. *Le piú ovvie F che trasformano il cerchio in sé sono le rotazioni di centro l'origine: l'origine, in questo caso é uno (in questo caso l'unico) punto di Brouwer.*

Consideriamo la trasformazione

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

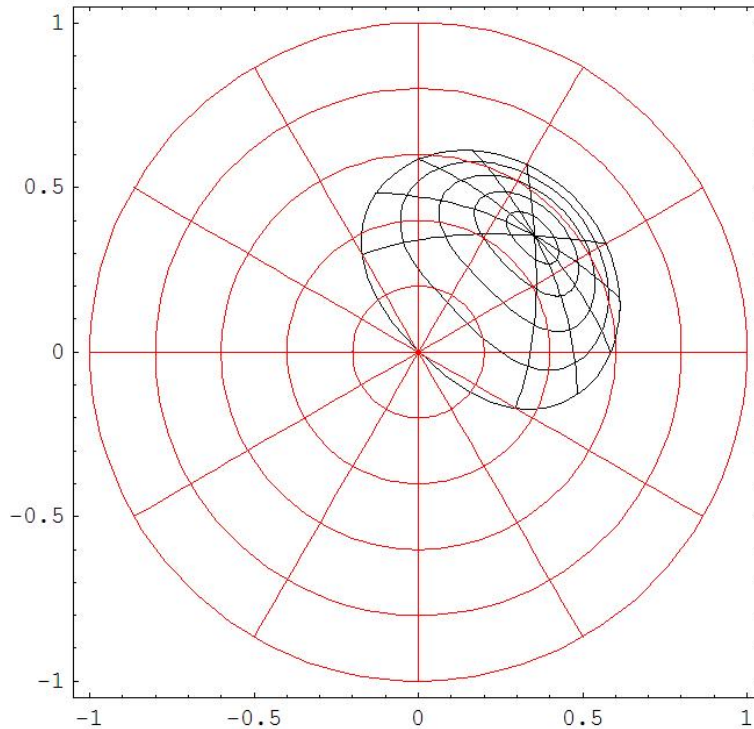


FIGURA 7.

scritta servendosi della notazione complessa, $w = T(z)$

$$w = \frac{1+z}{1+|1+z|} e^{i\pi/4}$$

ovvero, posto $w = u + iv$, $z = x + iy$,

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1+x-y}{1+\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \right\}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1+x+y}{1+\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \right\}$$

essa trasforma il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ in sé: la figura 7 mostra la ragnatela rossa del cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ e la ragnatela nera, piú piccola, sua immagine.

Si riconosce³ che il punto $z = 0.206483 + 0.529706i$ é trasformato in sé, si tratta quindi di un punto di Brouwer.

³ analiticamente, i conti sono fatti con *Mathematica*,

Il modo di riconoscerlo tramite la Figura 7 consiste nel valutare come tale punto stia

- nella ragnatela rossa, il piano z , tra la seconda e la terza circonferenza dall'origine e , come angolo tra la seconda e la terza semiretta sempre dall'origine procedendo in senso antiorario,
- analogamente succede nella ragnatela nera, il piano w , che rappresenta le regioni trasformate.

In altri termini si vede che detta

$$E : 0.5 \leq |z| \leq 0.75, \quad 60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

riesce

$$E \cap T(E) \neq \emptyset$$

3.5. Un contreesempio.

Il teorema del punto unito di Brouwer si riferisce ad applicazioni

$$F : \Omega \rightarrow \Omega$$

essendo Ω il cerchio chiuso.

Il seguente esempio

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1 - y^2}) \\ g(x, y) = y \end{cases}$$

fornisce un'applicazione del cerchio aperto in sé che non ammette punti uniti: infatti

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1 - y^2}) \\ y = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - y^2} \\ y = y \end{cases}$$

cioè $x_0 = \sqrt{1 - y_0^2}$, punto che appartiene alla circonferenza e non al cerchio aperto.

3.6. Il teorema nel caso... dell'ellisse.

Sia

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

e sia

$$F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

continua.

Indichiamo con

$$T : \{x, y\} \rightarrow \{3x, 2y\}$$

la trasformazione T continua e invertibile applica il cerchio

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 \leq 1$$

sull'ellisse \mathcal{E} : pertanto la funzione composta

$$T^{-1} \circ F \circ T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

Per il teorema di Brouwer sui cerchi la trasformazione continua

$$T^{-1} \circ F \circ T$$

ha almeno un punto unito $P_0 \in \mathcal{C}$

$$T^{-1} \circ F \circ T(P_0) = P_0 \Leftrightarrow F \circ T(P_0) = T(P_0)$$

ovvero

$$Q_0 = T(P_0) \in \mathcal{E}, \quad F(Q_0) = Q_0$$

ovvero F ammette punto unito !

4. Estensioni del teorema di Brouwer

TEOREMA 4.1. *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ chiuso, limitato e convesso, sia $T : M \rightarrow M$: allora T ha almeno un punto unito.*

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia $F : \overline{B}(O, R) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se riesce*

$$F(X) \cdot X \geq 0 \quad \forall \|X\| = R$$

allora F ha almeno uno zero $X_0 \in B(O, R)$

TEOREMA 4.3 (Schauder, 1932). *Sia B uno spazio di Banach e sia $M \subset B$ compatto e convesso, sia $T : M \rightarrow M$: allora T ha almeno un punto unito.*

CAPITOLO 7

Applicazione del teorema di Brouwer

1. Un primo esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + \sin(t) \\ x(0) = a \end{cases}$$

La soluzione di tale problema lineare é naturalmente

$$x(t) = \left(\frac{1}{5} + a\right) e^{-2t} - \frac{1}{5}(\cos(t) + 2 \sin(t))$$

Consideriamo l'applicazione associata

$$\alpha_{2\pi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha_{2\pi}(a) = x(2\pi) = \left(\frac{1}{5} + a\right) e^{-4\pi} - \frac{1}{5}$$

ed esaminiamo se esistano, o meno, intervalli chiusi e limitati $I \subset \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha_{2\pi} : I \rightarrow I$$

Scelto $I = [-1, 1]$ riesce

$$\alpha_{2\pi}(I) = \left[-e^{-4\pi} + \frac{e^{-4\pi} - 1}{5}, e^{-4\pi} + \frac{e^{-4\pi} - 1}{5} \right]$$

intervallo che corrisponde approssimativamente a

$$[-0.200003, -0.199996] \subset [-1, 1]$$

Quindi riesce $\alpha_{2\pi} : I \rightarrow I$ e quindi, teorema di Brouwer, esiste un punto unito

$$\alpha_{2\pi}(a_0) = a_0, \quad a_0 = -\frac{1}{5}$$

La soluzione del problema di Cauchy relativo a tale punto unito

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + \sin(t) \\ x(0) = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

é

$$\bar{x}(t) = -\frac{1}{5}(\cos(t) + 2 \sin(t))$$

periodica infatti !

2. Un secondo esempio

Supponiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x, y, t) \\ y' = g(x, y, t) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad f, g \text{ } T\text{-periodiche}$$

abbia soluzione per $\forall t > 0$: indichiamo con

$$\Psi(t, x_0, y_0) = \{x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)\}$$

tale soluzione.

Moltiplicando il sistema differenziale assegnato membro a membro per x la prima equazione e per y la seconda e sommando si ottiene

$$x x' + y y' = x f + y g \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2)' = x f + y g$$

Se riesce $\forall (x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 1$

$$x f(x, y, t) + y g(x, y, t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

allora

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)' \leq 0 \quad \rightarrow \quad x^2(t) + y^2(t) \leq x^2(0) + y^2(0)$$

ovvero

$$|\Psi(t, x_0, y_0)| \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero ancora se $(x_0, y_0) \in \Omega$, cerchio unitario, allora

$$\Psi(t, x_0, y_0) \in \Omega \quad \forall t \in [0, T]$$

Prendiamo $t = T$ e consideriamo la mappa F di Ω in sé

$$F : (x_0, y_0) \in \Omega \quad \rightarrow \quad \Psi(T, x_0, y_0) \in \Omega$$

F ha, per il teorema di Brouwer punti uniti: sia (ξ, η) uno di essi: la soluzione del problema di Cauchy di punto iniziale (ξ, η) é periodica di periodo T .

OSSERVAZIONE 2.1. *La soluzione periodica indicata potrebbe essere costante, cioè essere una soluzione d'equilibrio: cosa che si può escludere aggiungendo l'ipotesi che il campo $\{f, g\}$ sia non nullo.*

COROLLARIO 2.2. *Esistono soluzioni periodiche non appena riesca*

$$x f(x, y, t) + y g(x, y, t) \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti se il punto iniziale $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora la soluzione del problema di Cauchy

non può uscire da Ω

infatti avvicinandosi alla frontiera $\partial\Omega$ segue, necessariamente, una direzione entrante in Ω ... quindi il problema di Cauchy ha, necessariamente soluzione per ogni $t > 0$. Vale quindi il discorso precedente: l'applicazione

$$(x_0, y_0) \in \Omega \quad \rightarrow \quad \Psi(T, x_0, y_0)$$

é un'applicazione continua di Ω in sé, quindi ha punti fissi, ecc. ecc. \square

TEOREMA 2.3. *Consideriamo un sistema differenziale autonomo*

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

detta Ω il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ supponiamo che le soluzioni del problema di Cauchy di valori iniziali $(x_0, y_0) \in \Omega$ prendano valori $(x(t), y(t)) \in \Omega, \forall t > 0$.

Allora esiste almeno una soluzione d'equilibrio.

2.1. Il caso lineare.

Si può dimostrare¹ inoltre, nel caso dei sistemi lineari,

$$X' = A(t)X + B(t)$$

con $A(t)$ matrice e $B(t)$ vettore T -periodici che esistono soluzioni periodiche se e solo se esistono soluzioni limitate, cioè tali che

$$\|X(t)\| \leq M$$

3. Il teorema di Poincaré Bendixon

Consideriamo ora una condizione di

non esistenza

di soluzioni periodiche per un sistema differenziale 2×2

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Supponiamo che esista una soluzione periodica

$$x(t) = x(t + T), \quad y(t) = y(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

¹H.Amman, Ordinary Differential Equations An Introduction to Nonlinear Analysis, (1990)

Sia Ω la regione delimitata dalla curva $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$:

$$\vec{F} = \{f, g\}$$

si ha

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} ds = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{dy}{ds} - g \frac{dx}{ds} \right) ds = \int_{\partial\Omega} (f g - g f) ds = 0$$

applicando il teorema della divergenza al campo vettoriale $\vec{F} = \{f, g\}$ riesce quindi

$$0 = \iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = \iint_{\Omega} (f_x + g_y) dx dy = 0$$

Pertanto se la divergenza $f_x + g_y$ ha segno costante quell'integrale non può venire nullo e quindi il sistema non può avere soluzioni periodiche.

ESEMPIO 3.1. *Le equazioni differenziali del secondo ordine*

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0,$$

con $p(x)$ di segno costante non possono avere soluzioni periodiche.

Infatti esse equivalgono al sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -p(x)y - q(x) \end{cases}$$

con

$$\operatorname{div}\{y, -p(x)y - q(x)\} = -p(x)$$

avendo $\operatorname{div}(F)$ segno costante l'integrale della divergenza non può venire zero su alcun dominio e quindi non ci possono essere soluzioni periodiche.

Rientrano naturalmente nel precedente esempio i casi più semplici delle equazioni lineari a coefficienti costanti

$$x'' + ax' + bx = c, \quad a > 0$$

per le quali il risultato è riconoscibile direttamente dall'integrale generale.

CAPITOLO 8

Indice di Poincaré

1. La rotazione di un campo lungo una curva

Assegnato il campo vettoriale piano

$$\vec{F} = \{u(x, y), v(x, y)\}$$

consideriamo il versore corrispondente

$$\left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\}$$

che possiamo interpretare come un numero complesso

$$w(x, y) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Supponendo di prendere $(x, y) \in \mathcal{C}$, curva regolare semplice e chiusa assegnata, consideriamo il campo $w_{\mathcal{C}}(x, y)$ ristretto a \mathcal{C} .

Detta s l'ascissa curvilinea associata ai punti di \mathcal{C} riesce, tenuto conto che $|w_{\mathcal{C}}(x, y)| = 1$,

$$w_{\mathcal{C}}(x, y) = w(s) = e^{i\theta(s)}$$

da cui segue

$$\frac{d}{ds} w(s) = i e^{i\theta(s)} \frac{d\theta(s)}{ds}$$

ovvero

$$i \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{1}{e^{i\theta(s)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \frac{dy}{ds} \right\}$$

da cui

$$i \frac{d\theta(s)}{ds} = \left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \frac{dy}{ds} \right\}$$

svolti i calcoli, anche se lunghi, si perviene a

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} \{ (u_x + iv_x)(u^2 + v^2) - (u + iv)(uu_x + vv_x) \}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} \{ (u_y + iv_y)(u^2 + v^2) - (u + iv)(uu_y + vv_y) \}$$

moltiplicando ancora si ha

$$\left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) = \frac{(u - iv)(u_x + iv_x) - (uu_x + vv_x)}{u^2 + v^2}$$

$$\left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) = \frac{(u - iv)(u_y + iv_y) - (uu_y + vv_y)}{u^2 + v^2}$$

che, semplificando si riduce a

$$\left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) = i \frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}$$

$$\left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) = i \frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2}$$

da cui, complessivamente riesce

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2} \frac{dx}{ds} + \frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \frac{dy}{ds}$$

Riesce quindi indicata con L la lunghezza di \mathcal{C}

$$\theta(L) - \theta(0) = \int_0^L \frac{d\theta(s)}{ds} ds = \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{t} ds$$

avendo indicato con

$$\vec{A} = \left\{ \frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}, \frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right\}$$

2. Il teorema di Brouwer

La tecnica incontrata per calcolare il numero di rotazioni di un campo applicandolo lungo una curva chiusa offrono una diversa dimostrazione del teorema di Brouwer, limitatamente ad applicazioni di regolarità almeno C^2 .

Sia Ω il cerchio di centro l'origine e raggio 1, sia

$$F(x, y) = \{f(x, y), g(x, y)\}$$

una mappa di Ω in sé

$$F : \Omega \rightarrow \Omega, \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

La regolarità, e la scelta del particolare cerchio sono solo per semplificare i calcoli (in realtà basta $F \in C^0(\overline{\Omega})$ e l'insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un convesso...)

TEOREMA 2.1. *Esistono punti uniti per F .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il campo vettoriale

$$\{u, v\} : \quad u(x, y) = f(x, y) - x, \quad v(x, y) = g(x, y) - y$$

In ogni punto $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ il vettore $\{u_0, v_0\}$ applicato in $\{x_0, y_0\}$ punta a

$$\{x_0, y_0\} + \{f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)\} - \{x_0, y_0\} = \{f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)\} \in \Omega$$

cioé punta a $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$ punto¹ interno a Ω .

La rotazione che compie quindi, applicandolo via via lungo tutti i punti $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ é

1 giro

La rotazione di $\{u, v\}$ del resto coincide, per il conto precedentemente preparato, con l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta(s)}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left\{ \left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2} \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right) \frac{dy}{ds} \right\} ds$$

Se risultasse $u^2 + v^2 \neq 0 \forall (x, y) \in \Omega$ il campo

$$\left\{ \frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}, \frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right\}$$

avrebbe rotore nullo e quindi, per il teorema di Stokes, l'integrale curvilineo sarebbe uguale a zero.

Quindi é assurdo che riesca $u^2 + v^2 \neq 0 \forall (x, y) \in \Omega$, deve cioè esistere qualche punto $P = (x_0, y_0) \in \Omega$ in cui riesca

$$u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0) = 0$$

ovvero

$$\vec{F}(P) = P \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0, y_0) = x_0 \\ g(x_0, y_0) = y_0 \end{cases}$$

□

PROPOSIZIONE 2.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ omeomorfo al cerchio $\Omega : x^2 + y^2 \leq 1$, sia

$$G : E \rightarrow E$$

allora esiste qualche punto unito.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Phi : E \rightarrow \Omega$ l'omeomorfismo tra E e Ω la funzione $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$, vedi Figura 1 é una mappa continua di Ω in Ω : quindi, per il teorema di Brouwer, ha punti fissi

$$\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}(P) = P \rightarrow G[\Phi^{-1}(P)] = \Phi^{-1}(P)$$

¹Possiamo piú o meno immaginare come se puntasse sempre al centro del cerchio...

$$\begin{array}{ccc}
 & \Phi^{-1} & \\
 E & \longleftarrow & \Omega \\
 G \downarrow & & \downarrow \Phi \circ G \circ \Phi^{-1} \\
 E & \longrightarrow & \Omega \\
 & \Phi &
 \end{array}$$

FIGURA 1. $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$

ovvero il punto $Q = \Phi^{-1}(P)$ appartiene ad E ed é punto fisso per G . \square

Vedi **Courant John**, Vol. II, pag. 352

Il Teorema di Rolle

In una dimensione il teorema di Rolle afferma che se $f \in C^1([a, b])$ e se $f(a) = f(b)$ allora

$$\exists \xi \in (a, b) \quad f'(\xi) = 0$$

Lo stesso risultato si consegue in \mathbb{R}^2 se

$$f \in C^1(\Omega), \quad f|_{\partial\Omega} = \text{cost.}$$

con Ω chiuso e limitato.

Per il teorema di Weierstrass infatti c'è il massimo e il minimo:

- se vengono presi su $\partial\Omega$ allora $f(x, y) = \text{cost.}$ e quindi

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

- altrimenti uno almeno di essi, un punto di minimo o uno di massimo, cade all'interno, quindi in esso riesce $\nabla f = 0$

1. Contare i punti singolari...

Sia

$$\{u, v\} = \vec{\nabla} f \quad \begin{cases} u = f_x \\ v = f_y \end{cases}$$

applichiamo tale vettore in tutti i punti di una curva chiusa \mathcal{C} .

Detto ϑ l'angolo che tale vettore applicato forma ad esempio con l'asse x vogliamo misurare i giri che tale vettore compie percorrendo completamente \mathcal{C} , tornando quindi al punto di partenza.

1.1. Il calcolo di $\frac{d\vartheta}{ds}$.

Consideriamo il vettore $\{u, v\}$ applicato in un punto di \mathcal{C} come un numero complesso

$$u(s) + iv(s) = \sqrt{u^2 + v^2} e^{i\vartheta} \quad \rightarrow \quad \vartheta(s) = \frac{1}{i} \log \frac{u(s) + iv(s)}{\sqrt{u^2(s) + v^2(s)}}$$

Ne segue con le ordinarie regole di derivazione

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} &= \frac{1}{i} \frac{\sqrt{u^2(s) + v^2(s)}}{u(s) + iv(s)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u(s) + iv(s)}{\sqrt{u^2(s) + v^2(s)}} \right) = \\ &= \frac{1}{i} \frac{(u'v - uv')(v - iu)}{(u^2 + v^2)(u + iv)} = \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

Formula del resto ottenibile anche osservato che

$$\cos(\vartheta) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin(\vartheta) = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \tan(\vartheta) = \frac{v}{u}$$

e quindi

$$\frac{d\vartheta(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left\{ \arctan \left(\frac{v(s)}{u(s)} \right) \right\} = \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2}$$

1.2. L'indice di un campo rispetto a una curva.

L'integrale curvilineo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\vartheta(s)}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} ds$$

si chiama *indice di Poincaré* del campo $\{u, v\}$ rispetto a \mathcal{C} .

Esso esprime il numero di giri che il vettore $\{u, v\}$ applicato compie quando viene trasportato lungo \mathcal{C} . In Figura 1 si vede la rotazione che il vettore $\{u, v\} = \{\cos(2\vartheta), \sin(2\vartheta)\}$ compie quando viene trasportato lungo la circonferenza:

- dopo mezza circonferenza torna nella posizione iniziale,
- quindi percorrendo l'intera circonferenza fa due giri.

TEOREMA 1.1. *Sia $\Omega_{\mathcal{C}}$ il campo delimitato dalla curva \mathcal{C} , se*

$$\{u, v\} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega_{\mathcal{C}}$$

allora l'indice di Poincaré di $\{u, v\}$ relativo a \mathcal{C} è nullo.

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto che

$$\frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} = \left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2} \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right) \frac{dy}{ds}$$

dalla formula di Stokes si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} ds &= \int_{\mathcal{C}} \left\{ \left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2} \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right) \frac{dy}{ds} \right\} ds = \\ &= \iint_{\Omega_{\mathcal{C}}} \operatorname{rot} \left\{ \frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}, \frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right\} dx dy = 0 \end{aligned}$$

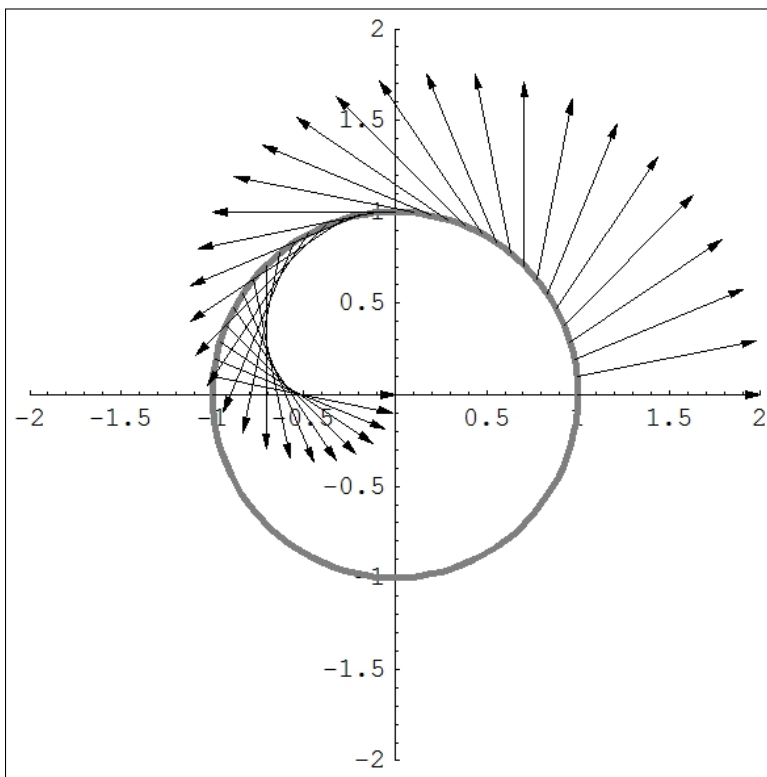


FIGURA 1. $\{u, v\} = \{\cos(2\vartheta), \sin(2\vartheta)\}$ lungo una semicirconferenza.

avendo tenuto conto che

$$\left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right)_x = \left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2} \right)_y$$

□

PROPOSIZIONE 1.2. *La frontiera del campo Ω sia composta da n curve $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ che supponiamo orientate in modo coerente (l'interno di Ω a sinistra di chi percorre la curva). Se*

$$\{u, v\} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

allora

$$\int_{\partial\Omega} \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} ds = 0$$

Quindi se

$$\int_{\partial\Omega} \frac{d\vartheta(s)}{ds} ds = \int_{\partial\Omega} \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} ds \neq 0$$

allora esiste almeno un punto in Ω in cui il campo é nullo.

COROLLARIO 1.3. *Scelto $\{u, v\} = \nabla f$ la precedente Proposizione 1.2 fornisce una condizione sufficiente all'esistenza di un punto critico di f in Ω .*

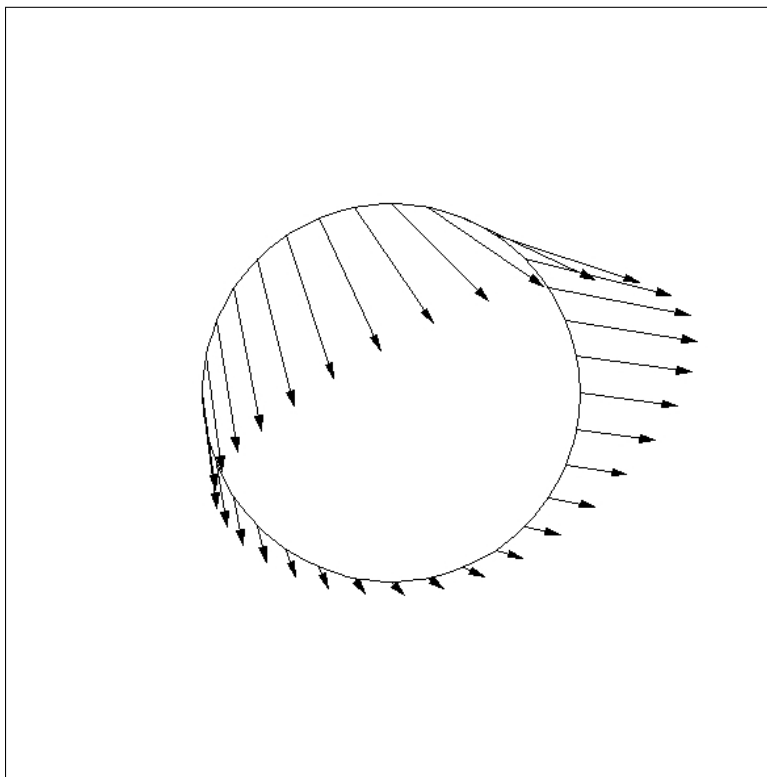


FIGURA 2. ∇e^{x-y} lungo la circonferenza.

OSSERVAZIONE 1.4. *Non é, in generale, affatto facile calcolare l'Indice di Poincaré*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} ds$$

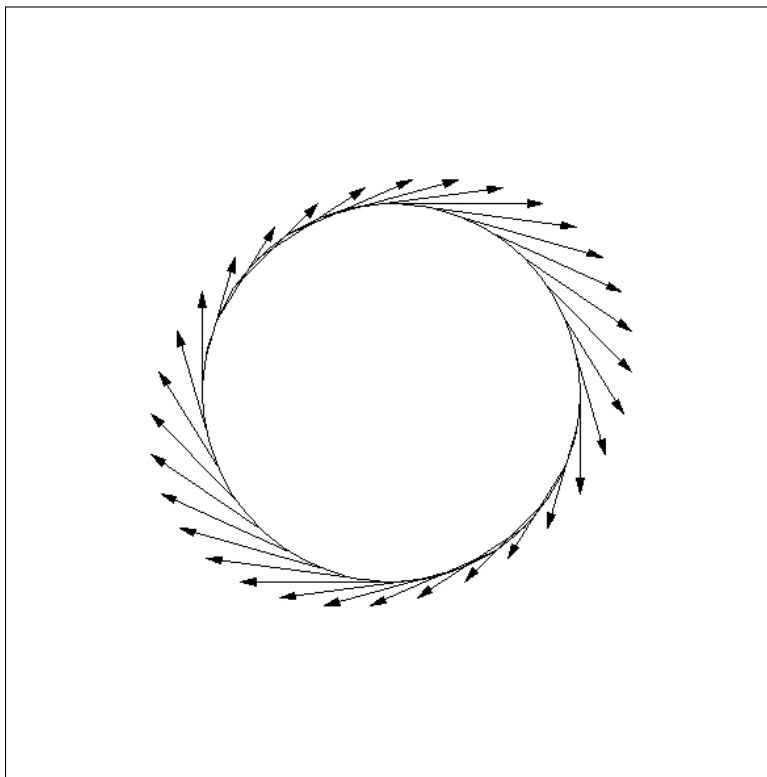
quindi la condizione precedentemente espressa é del tutto teorica...!

Nelle due Figure 2 e 3 sono esplicitamente disegnati i campi

$$\nabla e^{x-y}, \quad \nabla(3x^2 - 2y^2)$$

é abbastanza evidente che il primo, ∇e^{x-y} , diretto quasi sempre in direzione Sud-Est non compie alcuna rotazione percorrendo la circonferenza, cioè ha Indice evidentemente zero.

Infatti la funzione e^{x-y} non ha punti critici nel cerchio (e neanche fuori...!)

FIGURA 3. $\nabla(3x^2 - 2y^2)$ lungo la circonferenza.

L'altro campo, $\nabla(3x^2 - 2y^2)$, quasi tangente alla circonferenza compie, percorrendola, un giro: il suo indice di Poincaré vale 1. Infatti la funzione $3x^2 - 2y^2$ ha un punto critico nel cerchio, l'origine.

2. Il caso $f \in C^2(\Omega)$

Siano P_1, P_2, \dots, P_m i punti critici di f in Ω : indichiamo con

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$$

circonferenze di centri nei punti critici, piccole, cioè tali che i cerchi corrispondenti siano interamente contenuti in Ω .

Riesce, con il solito trucco di aggiungere dei segmenti che verranno percorsi due volte in versi opposti¹,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{d\vartheta(s)}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{u v' - v u'}{u^2 + v^2} ds = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{u v' - v u'}{u^2 + v^2} ds$$

¹Vedi Courant, Figura 3.31 di pag. 355

Se aggiungiamo l'ipotesi che il determinante hessiano di f

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$$

sia in ciascun punto critico diverso da zero *si può riconoscere* che il valore dei singoli integrali sulle γ_k dipende solo dal tipo di punto critico:

massimo, minimo, sella.

Sia γ_k circonferenza di centro (x_k, y_k) e raggio r si ha per essa la rappresentazione parametrica polare

$$\begin{cases} x = x_k + r \cos(t) \\ y = y_k + r \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

quindi tenuto conto che

$$\begin{cases} u(x, y) = f_x(x, y) = (x - x_k) f_{xx}(x_k, y_k) + (y - y_k) f_{xy}(x_k, y_k) + \dots \\ v(x, y) = f_y(x, y) = (x - x_k) f_{yx}(x_k, y_k) + (y - y_k) f_{yy}(x_k, y_k) + \dots \end{cases}$$

si ha, posto $f_{xx}(x_k, y_k) = a$, $f_{xy}(x_k, y_k) = b$, $f_{yy}(x_k, y_k) = c$,

$$\begin{cases} u(x, y) \approx r(a \cos(t) + b \sin(t)) \\ v(x, y) \approx r(b \cos(t) + c \sin(t)) \end{cases}$$

Quindi al variare di $(x, y) \in \gamma_k$ il punto $[u(x, y), v(x, y)]$ descrive un'ellisse

$$\varepsilon_k : \begin{cases} x = r(a \cos(t) + b \sin(t)) \\ y = r(b \cos(t) + c \sin(t)) \end{cases}$$

Il verso di rotazione in cui viene percorsa ε_k é (provare per credere):

- lo stesso di γ_k se $ac - b^2 > 0$
- l'opposto di γ_k se $ac - b^2 < 0$

Pertanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{u v' - v u'}{u^2 + v^2} ds = \begin{cases} 1 & \text{se } ac - b^2 > 0 \\ -1 & \text{se } ac - b^2 < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{u v' - v u'}{u^2 + v^2} ds = \begin{cases} 1 & \text{se } P_k \text{ massimo o minimo} \\ -1 & \text{se } P_k \text{ sella} \end{cases}$$

Pertanto (ammesso che in tutti i punti critici riesca $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$) si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{d\vartheta(s)}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{u v' - v u'}{u^2 + v^2} ds = M_0 - M_1 + M_2$$

avendo indicato con

- M_0 il numero dei punti di massimo,
- M_1 il numero dei punti di sella,

- M_2 il numero dei punti di minimo.

ESEMPIO 2.1. *Sia*

$$f(x, y) = e^{-16((-0.5+x)^2+(-0.5+y)^2)} + e^{-13(x^2+y^2)}$$

In Figura 4 si vede il disegno del campo gradiente sulla circonferenza, normalizzato: si riconosce a occhio che fa un giro.

In Figura 5 si vede il grafico di $f(x, y)$: due massimi e una sella².

$$2 - 1 = 1$$

come doveva succedere...!

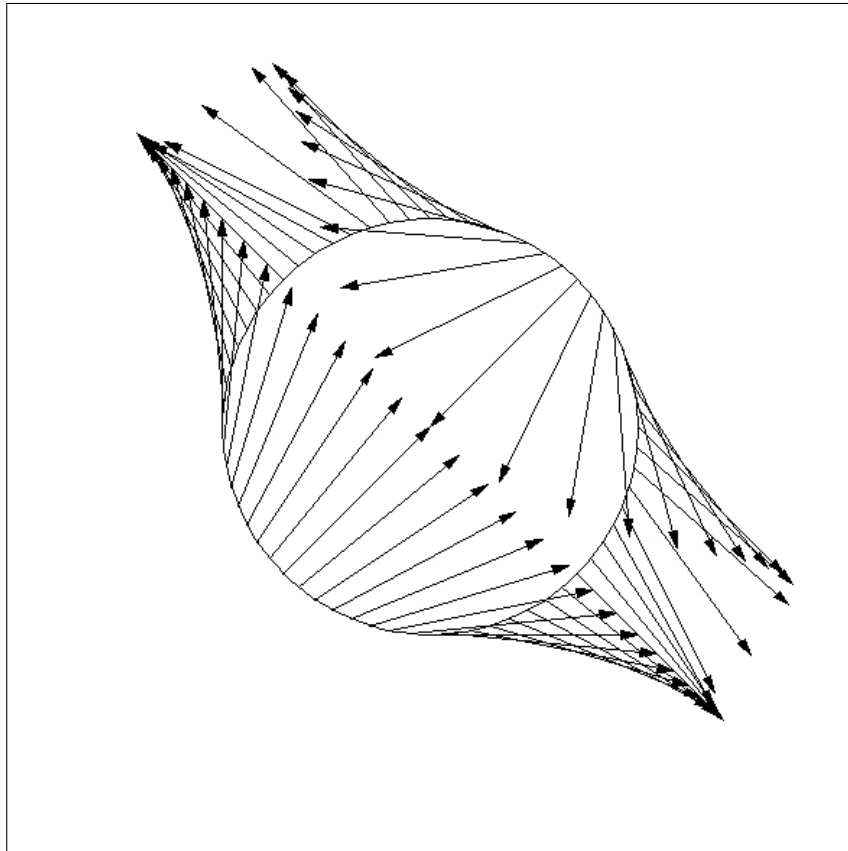


FIGURA 4. Il gradiente di f lungo la circonferenza.

²...il noto passo di montagna tra un massiccio e l'altro!

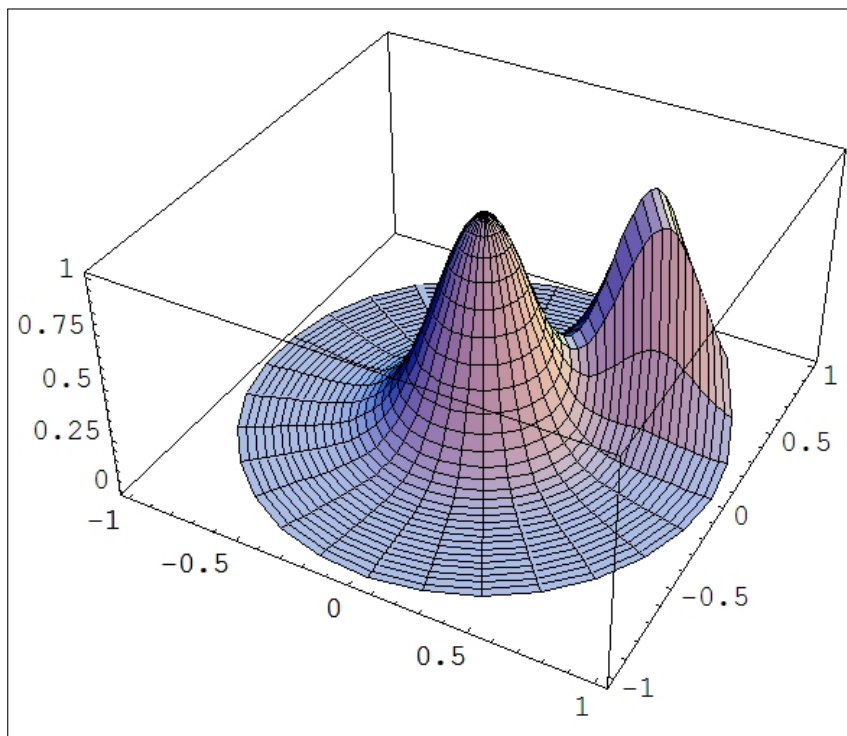


FIGURA 5. Il grafico di $f(x, y)$: due massimi e una sella.

2.1. Il calcolo dell'integrale su $\partial\Omega$.

Un caso facile per il calcolo dell'Indice di Poincaré di ∇f é quello in cui la funzione f sia costante su ognuna delle curve semplici e chiuse $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ che formano $\partial\Omega$, il caso cioè in cui le $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ siano curve di livello per f .

In questo caso $\{u, v\} = \nabla f$ é ortogonale in ogni punto alla \mathcal{C}_k : a giro completato quindi anche $\{u, v\}$ ha fatto uno ed un solo giro: quindi riesce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_k} \frac{u v' - v u'}{u^2 + v^2} ds = \pm 1$$

a seconda che l'unico giro compiuto sia stato orario o antiorario.

Sia N_0 il numero delle \mathcal{C}_k lungo le quali $\{u, v\}$ fa un giro antiorario e N_1 il numero di quelle lungo le quali $\{u, v\}$ fa un giro orario, riesce, con le notazioni precedenti

$$N_0 - N_1 = M_0 - M_1 + M_2$$

Il teorema di Ascoli Arzelá

1. Lo spazio delle funzioni continue

Consideriamo lo spazio vettoriale $C^0([0, 1])$ delle funzioni

$$f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

continue, dotato della norma

$$\| f \| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

ovvero dotato della metrica

$$d(f, g) = \| f - g \|$$

DEFINIZIONE 1.1. Un insieme $E \subseteq C^0([0, 1])$ si dice limitato se

$$\exists M \geq 0 \text{ tale che } \forall f \in E : \| f \| \leq M.$$

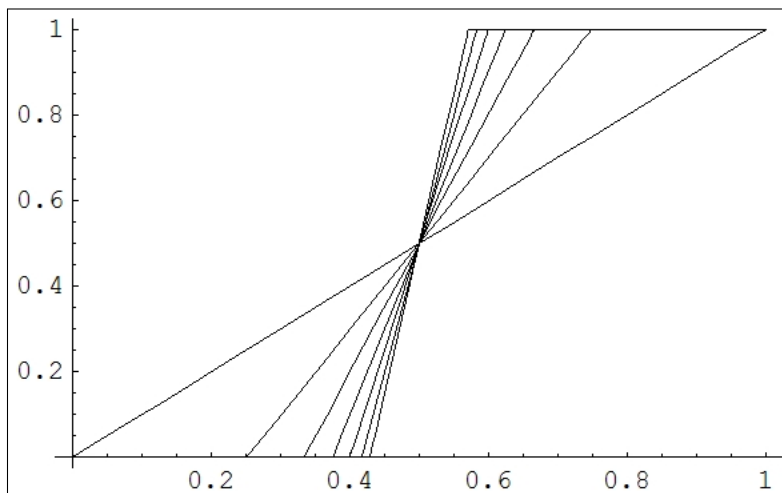
Nello spazio $C^0([0, 1])$ non vale il *teorema di Bolzano*, nel senso che esistono successioni $\{f_n\} \in C^0([0, 1])$ limitate che non contengono alcuna sottosuccessione convergente.

ESEMPIO 1.2. Siano

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right] \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right] \\ 1 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

Le $f_n(x)$ sono funzioni continue, quindi appartengono a $C^0([0, 1])$. Tuttavia non esiste alcuna loro sottosuccessione convergente: infatti, vedi Figura 1,

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

FIGURA 1. Le $f_n(x)$, $n = 1, \dots, 7$

Quindi anche ogni sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ convergerà alla stessa (13), funzione discontinua, e quindi non può esistere alcuna sottosuccessione che converga a un elemento di $C^0([0, 1])$.

ESEMPIO 1.3. Un altro esempio famoso di una successione di funzioni continue tale che non esista alcuna sottosuccessione convergente è offerto dalla successioni di funzioni trigonometriche, vedi figura 2, $\cos(2\pi x)$, $\sin(2\pi x)$, $\cos(4\pi x)$, $\sin(4\pi x)$, ..., $\cos(2n\pi x)$, $\sin(2n\pi x)$, ... Si tratta di funzioni continue in $[0, 1]$ per le quali riesce

$$(14) \quad \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 1,$$

qualunque siano $f(x)$ e $g(x)$ diverse in tale successione.

Se ci fosse infatti una sottosuccessione convergente alla funzione continua $F(x)$ allora le funzioni di tale sottosuccessione dovrebbero stringersi intorno a tale funzione limite $F(x)$ e quindi due suoi elementi f e g diversi, di posto abbastanza avanzato, dovrebbero verificare la disuguaglianza

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - F(x)| + |F(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon$$

dalla quale seguirebbe che

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \leq \int_0^1 4\varepsilon^2 dx = 4\varepsilon^2$$

contrariamente a quanto osservato prima nella (14).

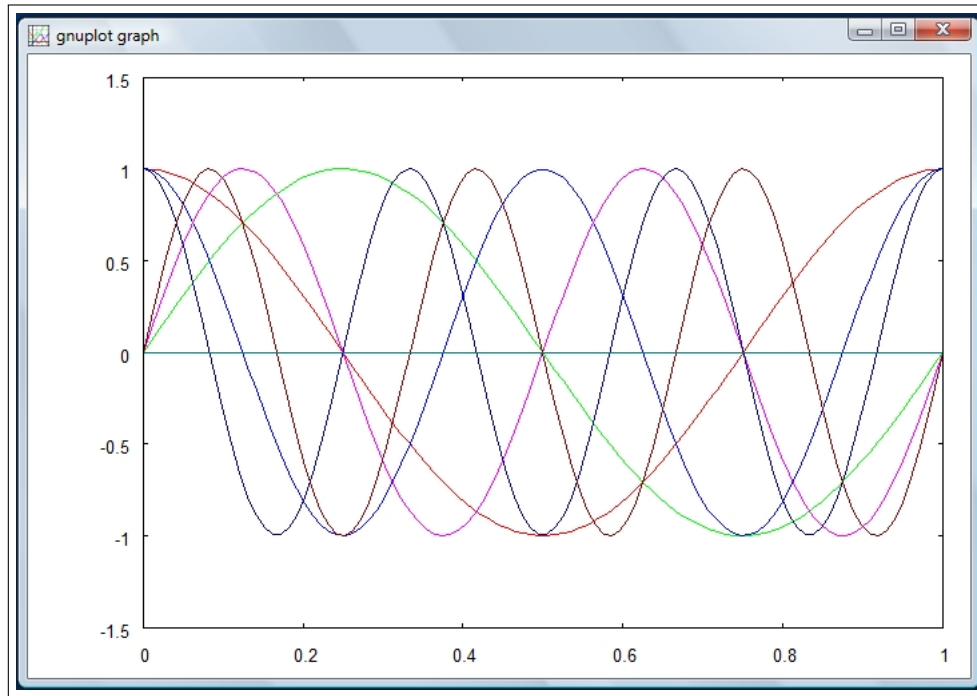


FIGURA 2. Le funzioni trigonometriche.

Si noti come nel caso di uno spazio \mathbb{R}^m i punti degli m assi

$$x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right), \quad x_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right), \dots, x_m = \left(0, 0, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

distano tra loro esattamente 1.

OSSERVAZIONE 1.4. **Diametro e dimensione**
Consideriamo l'intervallo

$$\{0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^1$$

il quadrato

$$\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

il cubo

$$\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

ecc. i domini rettangolari

$$P_n : \{0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$$

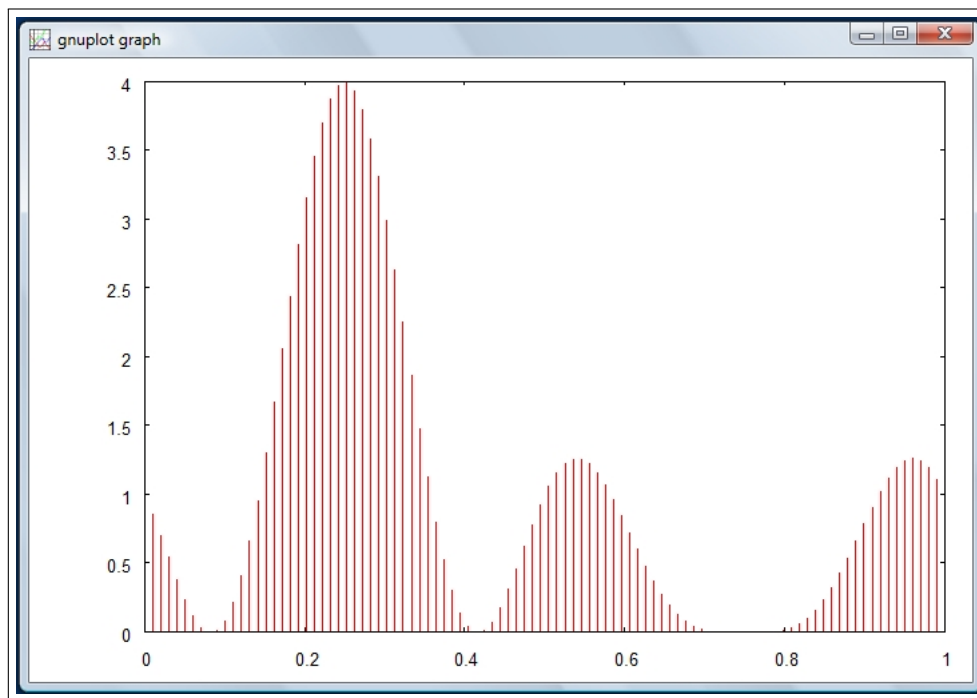


FIGURA 3. $\int_0^1 (\sin(2\pi x) - \cos(4\pi x))^2 dx = 1$.

I diametri di tali insiemi sono

1	in \mathbb{R}^1
$\sqrt{2}$	in \mathbb{R}^2
$\sqrt{3}$	in \mathbb{R}^3
...	...
\sqrt{n}	in \mathbb{R}^n

...i diametri crescono con la dimensione !

DEFINIZIONE 1.5. Un sottoinsieme $E \subseteq C^0([0, 1])$ si dice equicontinuo se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall f \in E, \quad |x - y| < \delta_\varepsilon \quad \rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Si osservi che se E contiene una sola funzione allora esso é certamente equicontinuo, la proprietá é esattamente la continuitá uniforme¹ dell'unica funzione stessa.

¹Il termine continuitá uniforme si riferisce all'indipendenza del modulo di continuitá δ_ε dal punto iniziale x_0 : un celebre teorema di Cantor riconosce che ogni funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato é necessariamente uniformemente continua.

La funzione $f(x) = x^2$ é continua in \mathbb{R} ma non é ivi uniformemente continua (la pendenza del grafico aumenta all'aumentare di $|x|$).

Analogo discorso se E contiene un numero finito di funzioni (continue) f_1, f_2, \dots, f_m : scelto $\varepsilon > 0$ ogni f_j determina il corrispondente modulo di uniforme continuità $\delta_\varepsilon(f_j) > 0$. Il valore $\delta_\varepsilon > 0$ valido per E é pertanto

$$\delta_\varepsilon = \min_{j \in [1, \dots, m]} \delta_\varepsilon(f_j)$$

Diverso puó essere il caso se E contiene un numero non finito di funzioni.

Le successioni dei due precedenti esempi, 1.2 e 1.3, offrono casi di insiemi E non equicontinui: la ripiditá sempre maggiore che le f_n presentano, vedi Figura 1 e 2, escludono infatti la presenza di un modulo di continuitá *buono per tutte* le $f_n \in E$.

Una condizione sufficiente perché un insieme E sia equicontinuo é che le funzioni che ne fanno parte siano uniformemente lipschitziane

$$\exists L > 0 \quad \rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < L|x - y| \quad \forall f \in E$$

In questo caso

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$$

ESEMPIO 1.6. *La successione, vedi figura 4, di funzioni*

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

presenta grafici che raggiungono tutti la quota 1 per $x = 1$,

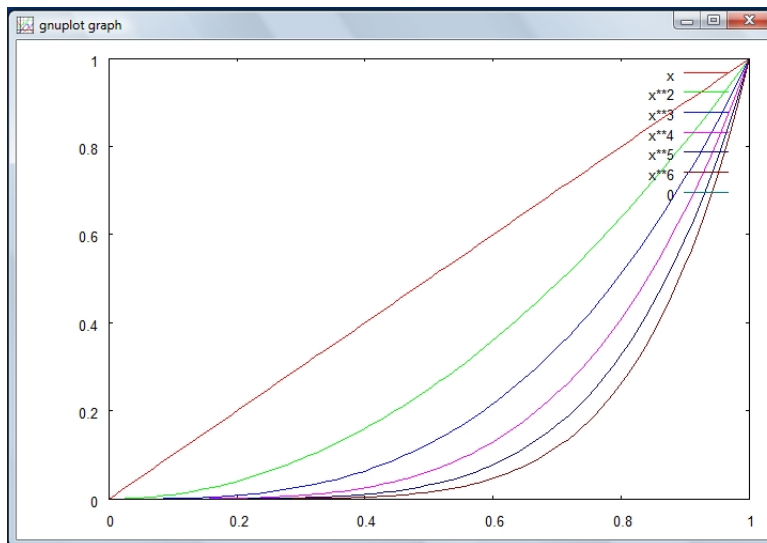


FIGURA 4. $f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, \dots$

La pendenza offerta da tali grafici é via via piú ripida: si tratta di una successione equilimitata ma

.... non equicontinua !

2. Il teorema di Ascoli Arzelá



FIGURA 5. Cesare Arzelá' (1847-1912)

TEOREMA 2.1. *L'insieme di funzioni continue $E \subseteq C^0([0, 1])$ sia limitato ed equicontinuo: allora ogni successione $\{f_n\} \in E$ ammette sottosuccessioni convergenti.*

OSSERVAZIONE 2.2. *La tesi equivale a dire che i sottinsiemi E di $C^0([0, 1])$ limitati ed equicontinui verificano il teorema di Bolzano.*

La dimostrazione del teorema consiste in un algoritmo di costruzione di una sottosuccessione

$$\{g_k\} \subset \{f_n\}$$

uniformemente convergente in $[0, 1]$.

L'algoritmo di costruzione si basa sul fatto che i razionali

$$\{x_1, x_2, \dots\} \subset [0, 1]$$

costituiscono una successione.

Solo in ultimo, per riconoscere che la sottosuccessione indicata $\{g_k\}$ converge in tutto $[0, 1]$ e che il suo limite $\ell(x)$ sia continuo in $[0, 1]$ si utilizza l'ipotesi di equicontinuitá.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{f_n\} \in E$ per le ipotesi fatte su E riesce

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x)| \leq M.$$

PRIMO PASSO

Sia x_1, x_2, x_3, \dots la successione dei razionali contenuti in $[0, 1]$.

La successione di numeri reali $\{f_n(x_1)\}$ é limitata: quindi (teorema di Bolzano sui limitati di \mathbb{R}) esiste una sottosuccessione

$$\{f_{n_1(k)}(x_1)\}$$

convergente: sia

$$\ell(x_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_1(k)}(x_1)$$

Poniamo

$$g_1(x) = f_{n_1(1)}(x)$$

La successione $\{f_{n_1(k)}(x)\}$ é una sottosuccessione della $\{f_n(x)\}$

La successione di numeri reali $\{f_{n_1(k)}(x_2)\}$ é limitata: quindi (teorema di Bolzano sui limitati di \mathbb{R}) esiste una sottosuccessione

$$\{f_{n_2(k)}(x_2)\}$$

convergente: sia

$$\ell(x_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_2(k)}(x_2)$$

Poniamo

$$g_2(x) = f_{n_2(2)}(x)$$

La successione $\{f_{n_2(k)}(x)\}$ é una sottosuccessione della $\{f_{n_1(k)}(x)\}$ e quindi é anche una sottosuccessione della $\{f_n(x)\}$

Si osservi che la $\{f_{n_2(k)}(x)\}$ converge in x_1 e in x_2 .

Cosí proseguendo, di sottosuccessione in sottosuccessione,

$$\begin{aligned} \dots &\subseteq \{f_{n_m(k)}\} && \subseteq \dots \subseteq \{f_{n_2(k)}\} \subseteq \{f_{n_1(k)}\} \subseteq \{f_n\} \\ \dots &\subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_m\} && \subseteq \dots \subseteq \{x_2, x_1\} \subseteq \{x_1\} \end{aligned}$$

si costruisce, col procedimento indicato sopra per $g_1(x)$, $g_2(x)$ la successione $\{g_m(x)\}$

SECONDO PASSO

La sottosuccessione $\{g_m(x)\} \subseteq \{f_n(x)\}$ é convergente su ogni razionale, cioè su ogni elemento della successione $\{x_p\}$ che raccoglie tutti i razionali.

Infatti, verifichiamo la condizione di convergenza di Cauchy,

$$|g_m(x_p) - g_s(x_p)| = |f_{n_m(m)}(x_p) - f_{n_s(s)}(x_p)|$$

Tenuto presente che per m ed s maggiori di p le funzioni $f_{n_m(m)}$, $f_{n_s(s)}$ appartengono alla sottosuccessione $\{f_{n_p(k)}\}$ convergente su x_p si riconosce che per m ed s sufficientemente alti riesca

$$|f_{n_m(m)}(x_p) - f_{n_s(s)}(x_p)| < \varepsilon$$

TERZO PASSO

La sottosuccessione $\{g_m(x)\}$ converge anche sui punti $x \in [0, 1]$ non razionali: verifichiamo ancora la condizione di Cauchy

$$|g_m(x) - g_s(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_p)| + |g_m(x_p) - g_s(x_p)| + |g_s(x_p) - g_s(x)|$$

dei tre addendi che figurano a secondo membro due per uno stesso motivo e uno per un altro sono tutti piccoli:

- $|g_m(x) - g_m(x_p)|$ e $|g_s(x_p) - g_s(x)|$ sono piccoli per l'equicontinuitá delle funzioni di E se x_p é stato scelto opportunamente $x \approx x_p$
- $|g_m(x_p) - g_s(x_p)|$ é piccolo perché é stato precedentemente provato che la successione $\{g_m\}$ é convergente sui razionali, ed x_p é un razionale.

Quindi la funzione $\ell(x)$, precedentemente definita solo sui razionali é definita in tutto $[0, 1]$.

QUARTO PASSO

La funzione $\ell(x)$ é continua.

Le funzioni $g_m(x)$ in quanto appartenenti ad E sono equicontinue

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_m(y)| < \varepsilon &\rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(x) - g_m(y)| < \varepsilon \rightarrow \\ &\rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |\ell(x) - \ell(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

QUINTO PASSO

La convergenza della sottosuccessione $\{g_m\}$ della $\{f_n\}$ alla funzione continua $\ell(x)$ é la convergenza nella metrica di $C^0([0, 1])$.

Consideriamo un certo numero di razionali x_1, x_2, \dots, x_m distribuiti uniformemente su $[0, 1]$: la differenza

$$|g_m(x) - \ell(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - \ell(x_j)| + |\ell(x_j) - \ell(x)|$$

Dei tre addendi a secondo membro

- il primo e il terzo sono piccoli se x_j é scelto come il piú vicino a x degli x_1, x_2, \dots, x_m , e quindi il primo e il terzo sono piccoli essendo piccola la differenza $|x - x_j|$,
- il secondo non dipende da x , ed é minore del

$$\max_{j \in [1, \dots, m]} |g_m(x_j) - \ell(x_j)|$$

□

OSSERVAZIONE 2.3. *Le condizioni*

limitatezza ed equicontinuitá

sono possedute da ogni successione convergente di $C^0([0, 1])$.

Infatti

- *Se la successione $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente alla funzione continua $F(x)$ riesce*

$$|f_n(x) - F(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > \nu, \quad \forall x \in [0, 1]$$

e quindi

$$|f_k(x)| \leq \max \{|f_1(x)|, |f_2(x)|, \dots, |f_\nu(x)|, |F(x)| + 1\} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

ovvero le $\{f_n(x)\}$ sono equilimitate.

- *inoltre, scelto $\varepsilon > 0$ riesce, per $k > \mu$*

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq |f_k(x) - F(x)| + |F(x) - F(y)| + |F(y) - f_k(y)| \leq 2\varepsilon + |F(x) - F(y)|$$

da cui l'equicontinuitá della successione $\{f_n(x)\}$.

PROPOSIZIONE 2.4. *Le funzioni $\{f_n(x)\} \in C^0([a, b])$*

- *convergono in un punto $t_0 \in [a, b]$,*
- *abbiano rapporti incrementali limitati da una stessa costante $M \geq 0$*

$$\left| \frac{f_n(u) - f_n(v)}{u - v} \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u, v \in [a, b]$$

Esse costituiscono allora un insieme equilimitato ed equicontinuo di $C^0([a, b])$, pertanto dal teorema di Ascoli Arzelá si deduce che esistono sottosuccessioni $\{f_{n_k}(x)\}$ uniformemente convergenti in $[a, b]$.

DEFINIZIONE 2.5. *Indichiamo con $C^1([0, 1])$ lo spazio vettoriale delle funzioni di classe C^1 in $[0, 1]$ dotato della norma*

$$\|f\|_1 = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

COROLLARIO 2.6. *Sia $E \subset C^1([0, 1])$ limitato, cioè esista $M > 0$ tale che*

$$\forall f \in E \quad \|f\|_1 \leq M$$

allora E é limitato anche in $C^0([0, 1])$ ed é equicontinuo.

ESEMPIO 2.7. *When f is holomorphic in an open disk $D_1 = B(z_0, r)$, with modulus bounded by M , then (for example by Cauchy's formula)*

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{M}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta$$

its derivative f' has modulus bounded by

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{M}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(r/2)^2} 2\pi r = \frac{4M}{r}$$

in the smaller disk $D_2 = B(z_0, r/2)$.

If a family \mathcal{F} of holomorphic functions on D_1 is bounded by M on D_1 , it follows that the family \mathcal{F} of restrictions to D_2 is equicontinuous on D_2 .

Therefore, if $|f_n(z)| \leq M, \forall z \in D_1$ a sequence $\{f_{n_k}(z)\}$ converging uniformly on D_2 can be extracted.

3. Applicazioni

Tra le applicazioni piú importanti c'è il teorema d'esistenza del problema di Cauchy

$$(15) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

in ipotesi di *sola continuità* per la f .

Il problema di Cauchy (15) impone che ogni eventuale soluzione $x(t)$ il cui grafico passi per il punto (t, x) abbia un'inclinazione corrispondente al valore $f(t, x)$.

Questa osservazione fa pensare che una soluzione relativa al dato iniziale $x(0) = x_0$ si possa approssimare con poligonali che passano per il punto $(0, x_0)$ e i cui lati abbiano inclinazione in ogni punto (t, x) uguale ai valori della f in punti vicini.

Ad esempio si può costruire la poligonale a partire da $(0, x_0)$ con inclinazione uguale a $f(0, x_0)$ fino ad un punto (t_1, x_1) ,

di qui proseguire con una inclinazione uguale a $f(t_1, x_1)$

ecc. ecc.

É prevedibile che poligonali siffatte convergano ad una (eventuale) soluzione del problema (15) quando i punti $0, t_1, t_2, \dots$ tendono ad avvicinarsi tra loro.

La convergenza di una opportuna sottosuccessione di tali poligonali deriva da una (giudiziosa) applicazione del teorema di Ascoli-Arzelá.

3.1. Il teorema.

Sia $f(t, y)$ continua e limitata nella striscia $[-b, b] \times (-\infty, \infty)$.

Siano $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ avendo diviso l'intervallo $[0, b]$ in m parti uguali.

Costruiamo la poligonale $\varphi_m(t)$ al modo seguente

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0) & t \in [t_0, t_1] \\ \varphi_m(t_1) + (t - t_1)f(t_1, \varphi_m(t_1)) & t \in]t_1, t_2] \\ \dots & \dots \\ \varphi_m(t_{m-1}) + (t - t_{m-1})f(t_{m-1}, \varphi_m(t_{m-1})) & t \in]t_{m-1}, t_m] \end{cases}$$

Indicata con $\psi_m(t)$ la funzione costante a tratti

$$t \in [t_j, t_{j+1}] : \quad \psi_m(t) = f(t_j, \varphi_m(t_j))$$

se $|f(t, x)| \leq M$ riesce $|\psi_m(t)| \leq M$

La funzione $\psi_m(t)$ rappresenta la derivata della $\varphi_m(t)$, nei punti in cui essa é derivabile... !

La funzione $\psi_m(t)$ consente (quindi) inoltre di esprimere le $\varphi_m(t)$ come

$$(16) \quad \varphi_m(t) = x_0 + \int_0^t \psi_m(\tau) d\tau$$

La successione di funzioni continue $\{\varphi_m(t)\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelá: infatti

- sono equicontinue

$$|\varphi_m(t'') - \varphi_m(t')| \leq \int_{t'}^{t''} |\psi_m(\tau) d\tau| \leq M|t'' - t'|$$

- sono equilimitate,

$$|\varphi_m(t)| \leq |x_0| + \left| \int_0^t \psi_m(\tau) d\tau \right| \leq |x_0| + Mb$$

Il teorema di Ascoli Arzelá implica quindi che una sottosuccessione della $\{\varphi_m(t)\}$ converge uniformemente in $[0, b]$.

Continuando ad indicare ancora con $\{\varphi_m(t)\}$ anche tale sottosuccessione convergente si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(t) = y(t), \quad \rightarrow \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(t) = f(t, y(t))$$

Ne segue quindi, passando al limite sulla (16)

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

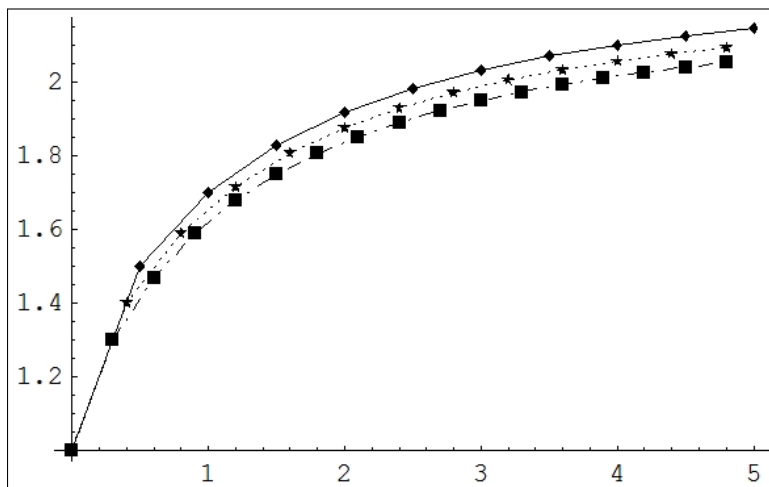


FIGURA 6. $x' = \frac{1}{t^2+x^2}$, $x(0) = 1$

ovvero la funzione continua $y(t)$ individuata come limite della sottosuccessione $\{\varphi_m(t)\}$ é soluzione (forse non unica) del problema di Cauchy (15).

Si noti che il teorema di Ascoli Arzela' garantisce che

una sottosuccessione

delle poligonal di Eulero converge, ma **non assicura affatto** che l'intera successione delle poligonal converga !

In figura 6 sono riportate le poligonal del metodo di Eulero relative al problema di Cauchy

$$x' = \frac{1}{t^2 + x^2}, \quad x(0) = 1$$

relative a $t \in [0, 5]$ e passi $h = 0.5, 0.4, 0.3$

OSSERVAZIONE 3.1. *L'ipotesi fatta inizialmente, di un secondo membro dell'equazione differenziale definito in una striscia $[-b, b] \times (-\infty, \infty)$ e ivi limitato in modulo non é restrittivo:*

supponiamo infatti che $f(t, x)$ sia definita in un rettangolo $[-b, b] \times [-a, a]$: nulla impedisce di prolungare la f al di sotto di $x = -a$ o al di sopra di $x = a$ in modo costante.

Se f era continua nel rettangolo il prolungamento proposto é continuo nella striscia, se f era limitata nel rettangolo il prolungamento proposto é limitato nella striscia.



FIGURA 7. Giuseppe Peano (1858-1932)

OSSERVAZIONE 3.2. *Il capostipite degli esempi di problemi di Cauchy che non godono del teorema di unicit , esempio dovuto a G.Peano,   il seguente:*

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

per il quale si riconoscono le due soluzioni seguenti

$$u(t) \equiv 0, \quad v(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{se } t \geq 0 \\ -\frac{t^2}{4} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

CAPITOLO 11

Il teorema di Weierstrass

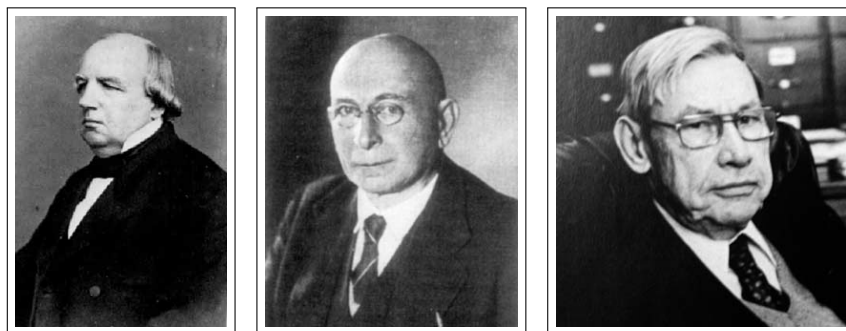


FIGURA 1. da sinistra: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), Sergei Natanovich Bernstein, (1880-1968), Marshall Harvey Stone, (1903 - 1989)

1. Introduzione

Introdotta lo spazio $C^0([0, 1])$, spazio metrico, ha senso porsi la seguente domanda:

esistono sottoinsiemi $V \subseteq C^0([0, 1])$ densi ?

dove l'attributo *densi* significa che

$$\forall f \in C^0([0, 1]) \text{ e } \forall \varepsilon > 0 \exists v \in V : \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - v(x)| \leq \varepsilon$$

Risposte semplici (e sostanzialmente inutili) consistono nel prendere, ad esempio,

$$V = C^0([0, 1])$$

oppure

$$V = C^0([0, 1]) - \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

essendo le $f_i \in C^0([0, 1])$

Un problema analogo, piú concreto, consiste nell'indicare sottoinsiemi $B \subseteq C^0([0, 1])$ tali che lo spazio vettoriale generato dagli elementi di B sia denso in $C^0([0, 1])$: determinare cioè una famiglia di funzioni b_i , $i \in I$ tali che l'insieme delle loro combinazioni lineari sia denso.

2.2. I polinomi.

I monomi in a e b che figurano a secondo membro della (17), in relazione alla scelte particolari $a = x$, $b = (1 - x)$

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

si chiamano *polinomi di Bernstein*: vedi anche

<http://mathworld.wolfram.com/BernsteinPolynomial.html>

Per $x \in [0, 1]$ essi sono non negativi: in Figura 2 sono riportati

$$B_{0,2}(x) = (1 - x)^2, \quad B_{1,2}(x) = 2x(1 - x), \quad B_{2,2}(x) = x^2$$

È abbastanza evidente che

- $B_{0,2}(x) = (1 - x)^2$, $B_{1,2}(x) = 2x(1 - x)$, $B_{2,2}(x) = x^2$ costituiscono una base dello spazio vettoriale dei polinomi di grado $n \leq 2$,
- $B_{0,3}(x) = (1 - x)^3$, $B_{1,3}(x) = 3x(1 - x)^2$, ..., $B_{3,3}(x) = x^3$ costituiscono una base dello spazio vettoriale dei polinomi di grado $n \leq 3$,
- in generale $B_{0,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)$ costituiscono una base dello spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$

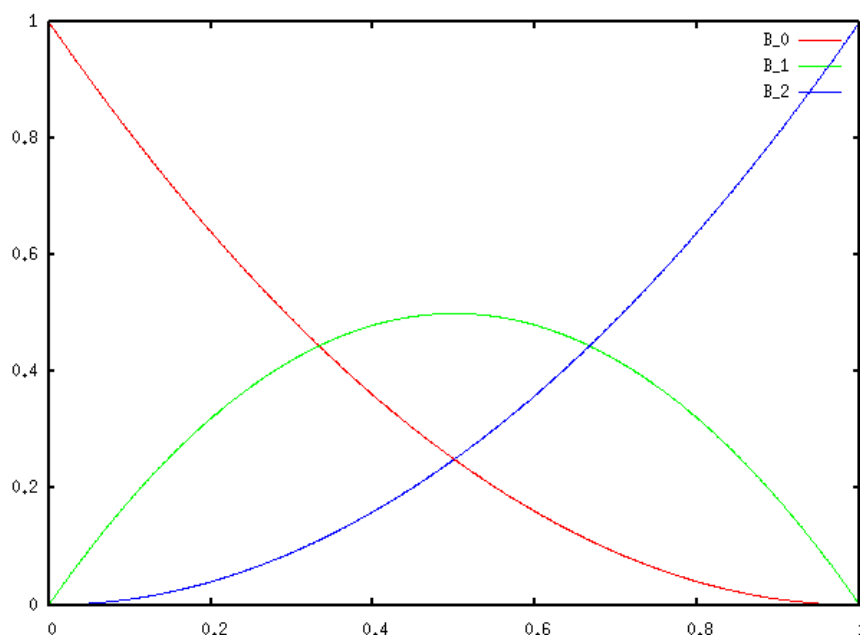


FIGURA 2. *polinomi di Bernstein* di grado $n = 2$

Dalle (18), $a + b = 1$ si derivano quindi le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ n(n-1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ \dots \quad \dots \end{array} \right.$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ nx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} \\ n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} \end{array} \right.$$

Relazioni che possiamo sintetizzare nella Proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 2.1. *I polinomi di Bernstein soddisfano per ogni $n \in \mathbb{N}$ le seguenti relazioni*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) = 1 \\ \sum_{k=0}^n k B_{k,n}(x) = nx \\ \sum_{k=0}^n k^2 B_{k,n}(x) = n(n-1)x^2 + nx \end{array} \right.$$

2.3. Il teorema di approssimazione.

TEOREMA 2.2. *Sia $f \in C^0([0, 1])$, detti P_n i polinomi*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) f(k/n)$$

riesce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x),$$

uniformemente rispetto a $x \in [0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. Considerato che $\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) = 1$ riesce

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) (f(x) - f(k/n))$$

Fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| \leq \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

suddividiamo, fissato x , gli addendi che compongono la sommatoria precedente in due classi:

- gli indici k per i quali riesce $|x - k/n| \leq \delta$
- gli indici k per i quali riesce $|x - k/n| > \delta$

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) &= \sum_{|x-k/n| \leq \delta} B_{k,n}(x) (f(x) - f(k/n)) + \\ &+ \sum_{|x-k/n| > \delta} B_{k,n}(x) (f(x) - f(k/n)) \end{aligned}$$

Nella prima sommatoria riesce $|f(x) - f(k/n)| \leq \varepsilon$, nella seconda possiamo solo dire $|f(x) - f(k/n)| < 2M$ se M é un maggiorante di $|f|$ in $[0, 1]$.

Si ha pertanto, tenuto conto che $x \in [0, 1] \rightarrow B_{k,n}(x) \geq 0$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon \sum_{|x-k/n| \leq \delta} B_{k,n}(x) + 2M \sum_{|x-k/n| > \delta} B_{k,n}(x)$$

ovvero, tenuto conto che

$$\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) = 1 \rightarrow \sum_{|x-k/n| \leq \delta} B_{k,n}(x) \leq 1$$

riesce

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon + 2M \sum_{|x-k/n| > \delta} B_{k,n}(x)$$

Tenuto conto che

$$|x - k/n| > \delta \quad \rightarrow \quad 1 < \frac{|x - k/n|}{\delta} < \frac{(x - k/n)^2}{\delta^2} = \frac{(nx - k)^2}{n^2 \delta^2}$$

si ha

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) (nx - k)^2 =$$

$$= \varepsilon + \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) (nx - k)^2$$

Tenuto conto, vedi Proposizione 2.1, che

$$\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) (nx - k)^2 = n^2x^2 - 2n^2x^2 + n(n-1)x^2 + nx = nx(1-x)$$

Si ha

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{n^2\delta^2} nx(1-x)$$

Tenuto inoltre conto che

$$\forall x \in [0, 1] \quad \rightarrow \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

si ha

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2} \frac{1}{n}$$

da cui

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

che, data l'arbitrarietà di ε implica la tesi del Teorema. □

2.4. I polinomi con *Mathematica*.

Il codice seguente esprime la definizione dei polinomi di Bernstein

`BernsteinB[i_, n_, t_] := Binomial[n, i] t^i (1 - t)^(n - i)`

e dell'approssimazione $P_n = \text{BernsteinExpansion}[n, f]$ di una $f(x)$ assegnata:

`BernsteinExpansion[n_, f_] :=`

`Sum[Binomial[n, j] x^j (1 - x)^(n - j) f[j/n], {j, 0, n}]`

Si possono quindi chiedere a *Mathematica* i grafici della f e dei suoi polinomi approssimanti di Bernstein.

In Figura 3 si vede l'esempio di $f(x) = x \sin^2(6x)$, in nero, e dei suoi polinomi $P_n(x)$ approssimanti di Bernstein relativi ad

$$n = 10, \quad 20, \quad 30,$$

rispettivamente in rosso, verde e blu.

Il primo di essi, $P_{10}(x)$ é

$$(1-x)^9 x \sin\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 9(1-x)^8 x^2 \sin\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 36(1-x)^7 x^3 \sin\left(\frac{9}{5}\right)^2 +$$

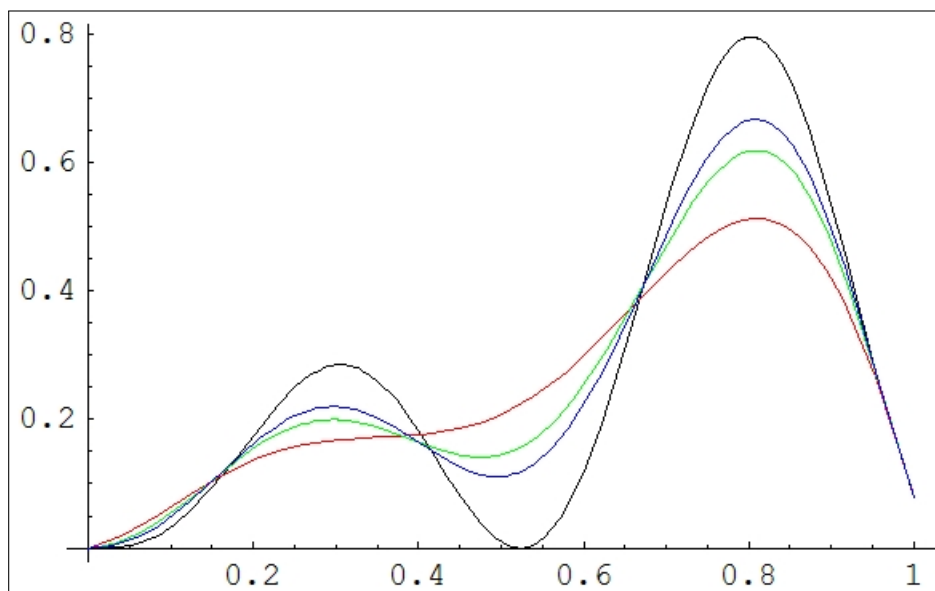


FIGURA 3. Polinomi approssimanti di Bernstein

$$\begin{aligned}
 & 84(1-x)^6 x^4 \sin\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 126(1-x)^5 x^5 \sin(3)^2 + \\
 & 126(1-x)^4 x^6 \sin\left(\frac{18}{5}\right)^2 + 84(1-x)^3 x^7 \sin\left(\frac{21}{5}\right)^2 + \\
 & 36(1-x)^2 x^8 \sin\left(\frac{24}{5}\right)^2 + 9(1-x)x^9 \sin\left(\frac{27}{5}\right)^2 + x^{10} \sin(6)^2 = \\
 & = 0.318821x + 4.94888x^2 - 16.927x^3 - 8.53588x^4 + 91.8819x^5 - \\
 & 100.847x^6 + 7.62208x^7 + 32.5795x^8 - 11.4285x^9 + 0.465283x^{10}
 \end{aligned}$$

gli altri sono, naturalmente, anche piú complessi.

Morale:

I polinomi di Bernstein approssimano $f(x)$ senza dubbio ma, come era prevedibile vista la loro generalitá, molto molto lentamente !

Il grafico di Figura 3 mostra come il polinomio $P_{30}(x)$, di trentesimo grado approssima $f(x)$ meno bene di quello che potrebbe fare un polinomio, ad esempio di interpolazione, di grado molto molto piú basso.

3. Polinomi e convoluzioni

Sia $f \in C^0([0, 1])$ nulla agli estremi, funzione che possiamo prolungare uguale a zero al di fuori di $[0, 1]$.

Detta ancora f la funzione prolungata essa riesce uniformemente continua in \mathbb{R}

Consideriamo i polinomi $Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ con le costanti c_n scelte tali che $\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1$: ovvero

$$Q_n(x) = \frac{(1 - x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1 - s^2)^n ds}$$

Costruiamo le funzioni

$$(19) \quad P_n(x) = \int_{-1}^1 Q_n(t) f(x+t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Cambiando variabile $\xi = x+t$ e tenendo conto che $\forall \tau \notin [0, 1] f(\tau) = 0$ riesce

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} Q_n(t-x) f(t) dt = \int_{-1}^1 Q_n(t-x) f(t) dt$$

quindi, tenuto conto che $Q_n(t-x)$ sono polinomi in x anche i $P_n(t)$ sono polinomi in x .

Tenuto conto che $\int_{-1}^1 Q_n(t) dt = 1$ riesce $f(x) = \int_{-1}^1 Q_n(t) f(x) dt$ e quindi

$$\forall x \in [0, 1] \quad P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^1 Q_n(t) \{f(x+t) - f(x)\} dt$$

da cui

$$\forall x \in [0, 1] \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1}^1 Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt$$

Decomponiamo ora l'integrale $t \in [-1, 1]$ in tre parti

$$t \in [-1, -\delta], \quad t \in [-\delta, \delta], \quad t \in [\delta, 1]$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt &\leq \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt + \\ &+ \int_{-\delta}^{+\delta} Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt + \int_{\delta}^1 Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \end{aligned}$$

Ciascuno dei tre addendi é infinitesimo con $n \rightarrow \infty$ per diversi motivi:

- il primo e il terzo addendo sono infinitesimi perché

$$\forall \delta \leq |t| \leq 1 \quad Q_n(t) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n$$

e quindi

$$\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt + \int_{\delta}^1 Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq 2M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n$$

- il secondo addendo é infinitesimo perché, se δ é sufficientemente piccolo riesce

$$\forall |t| \leq \delta \quad |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

da cui

$$\int_{-\delta}^{+\delta} Q_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq \varepsilon \int_{-1}^{+1} Q_n(t) dt = \varepsilon$$

Quindi

PROPOSIZIONE 3.1. *Per ogni $f \in C^0([0, 1])$ nulla agli estremi esiste una successione $\{P_n(x)\}$ di polinomi tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, 1]} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

Tenuto conto che se $f \in C^0([0, 1])$ si può sottrarre ad essa il polinomio di primo grado

$$p(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$$

ed approdare quindi ad una funzione $F(x) = f(x) - p(x)$ nulla agli estremi, la Proposizione precedente prova il seguente

TEOREMA 3.2. *Per ogni $f \in C^0([0, 1])$ esiste una successione $\{P_n(x)\}$ di polinomi tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, 1]} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

OSSERVAZIONE 3.3. *Il caso di funzioni continue definite su intervalli $[a, b]$ diversi da $[0, 1]$ non cambia nulla:*

- una traslazione,
- e una omotetia

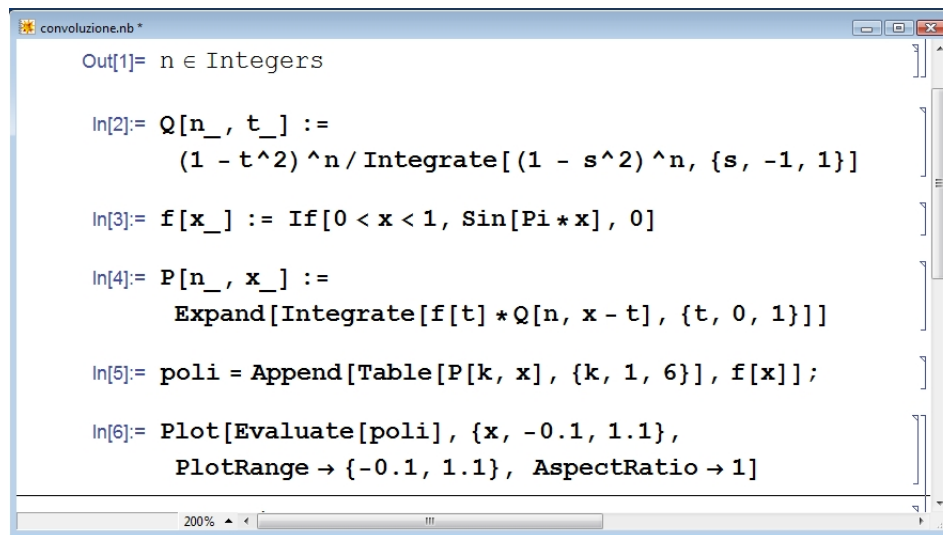
portano $[a, b]$ in $[0, 1]$ e non alterano il carattere polinomiale.

$$\xi = \frac{x - a}{b - a} \quad x \in [a, b] \rightarrow \xi \in [0, 1], \quad F(\xi) = f(a + (b - a)\xi)$$

Detta $\{P_n(\xi)\}$ la successione che approssima F in $[0, 1]$

$$P_n(\xi) \approx F(\xi) = f(a + (b - a)\xi) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \approx f(x)$$

OSSERVAZIONE 3.4. *I polinomi (19) considerati convergono alla funzione assegnata molto lentamente. Nella Figura 5 si riconosce, in par-*



```

convoluzione.nb *
Out[1]= n ∈ Integers

In[2]:= Q[n_, t_] :=
      (1 - t^2)^n / Integrate[(1 - s^2)^n, {s, -1, 1}]

In[3]:= f[x_] := If[0 < x < 1, Sin[Pi * x], 0]

In[4]:= P[n_, x_] :=
      Expand[Integrate[f[t] * Q[n, x - t], {t, 0, 1}]]

In[5]:= poli = Append[Table[P[k, x], {k, 1, 6}], f[x]];

In[6]:= Plot[Evaluate[poli], {x, -0.1, 1.1},
      PlotRange -> {-0.1, 1.1}, AspectRatio -> 1]
  
```

FIGURA 4. Il listato con Mathematica, relativo a $f(x) = \sin(\pi x)$.

ticolare avendo scelto $f(x) = \sin(\pi x)$, come la convergenza sia lenta agli estremi dell'intervallo.

4. Polinomi e interpolazione

Assegnati n punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \quad \forall i, k \in [1, n] \quad x_i \neq x_k$$

esiste un polinomio $P(x)$ di grado minore di n tale che

$$\forall i \in [1, n] \quad P(x_i) = y_i$$

L'esistenza e, anzi, la possibilità di costruire esplicitamente tale polinomio, si ricava servendosi dei cosiddetti polinomi di Lagrange

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)}, \quad \dots$$

tutti di grado $n - 1$ e che soddisfano ai requisiti

$$\begin{cases} L_1(x_1) = 1 \\ L(x_i) = 0 \quad \forall i \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} L_2(x_2) = 1 \\ L(x_i) = 0 \quad \forall i \neq 2 \end{cases} \quad \dots$$

Il polinomio $P(x)$ cercato é pertanto

$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x)$$

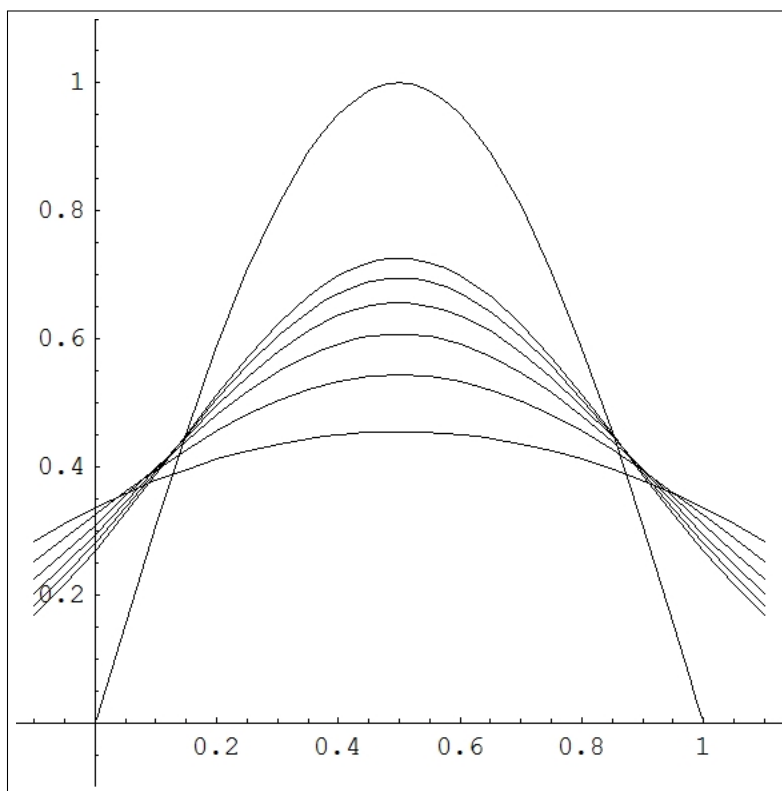


FIGURA 5. La lenta convergenza dei polinomi approssimanti.

In altri termini $P(x)$ é un polinomio il cui grafico passa per gli n punti assegnati: si osservi che anche avendo costruito $P(x)$ sommando polinomi di grado $n - 1$ nulla obbliga $P(x)$ ad avere tale grado...

.... puó naturalmente avere anche grado piú basso!

Un caso interessante é quello in cui i punti assegnati appartengono al grafico di una funzione $y = f(x)$ assegnata: il problema che sorge é quindi

il grafico di $P(x)$ sará vicino al grafico di $f(x)$?

É evidente che se $f(x)$ non é abbastanza regolare il suo grafico potrà differire anche molto da quello di $P(x)$: infatti i due grafici coincidono naturalmente nei punti di ascisse x_1, x_2, \dots, x_n ma negli altri punti i valori della f possono fare tutte le follie che vogliono se non sono legati al rispetto di particolari regolaritá.

ESEMPIO 4.1. *Sia $f(x)$ uguale a 1 sui razionali e uguale a zero sugli irrazionali: supponiamo che gli n punti siano tutti relativi ad ascisse x_i razionali.*

Allora i corrispondenti valori y_i sono tutti 1 e quindi il polinomio che passa per questi punti é

$$P(x) \equiv 1$$

il cui grafico non é certo granché vicino a quello (inimmaginabile) di $f(x)$.

LEMMA 4.2. Sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$: se esistono n punti x_1, x_2, \dots, x_n in cui $g(x_i) = 0$ allora esiste ξ , dipendente naturalmente da x , tale che

$$g(x) = \frac{g^{[n]}(\xi)}{n!} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi del Lemma é ben nota per i polinomi che si fattorizzano appunto in quel modo.

Nel caso di una funzione $g(x)$ regolare ma non necessariamente un polinomio il risultato si ricava da una applicazione del teorema di Rolle. Posto, fissato x ,

$$G(t) = g(x)(t - x_1) \dots (t - x_n) - g(t)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

riesce

$$G(x_1) = 0, G(x_2) = 0, \dots, G(x_n) = 0, G(x) = 0$$

quindi G ha $n + 1$ zeri, quindi, teorema di Rolle,

- la derivata prima si annulla almeno n volte,
- la derivata seconda si annulla almeno $n - 1$ volte,
-
- la derivata n -esima si annulla almeno 1 volta.

Tenuto presente che $G(t)$ é somma di due addendi:

- un polinomio di grado n in t moltiplicato per il fattore $g(x)$ che non dipende da t ,
- il fattore $g(t)$ per un polinomio in x , che quindi non dipende da t .

riesce quindi

$$G^{[n]}(t) = g(x) n! - g^{[n]}(t) (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

calcolata quindi nel punto $t = \xi$ in cui si annulla si ha

$$0 = g(x) n! - g^{[n]}(\xi) (x - x_1) \dots (x - x_n) \Rightarrow g(x) = \frac{g^{[n]}(\xi)}{n!} (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

□

OSSERVAZIONE 4.3. L'ipotesi $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ non é ovviamente necessaria: basta $g \in C^n(\mathbb{R})$.

Il precedente Lemma 4.2, inclusa la precedente Osservazione, può essere applicato alla differenza

$$f(x) - P(x)$$

tra la funzione e il polinomio di interpolazione nel caso che $f \in C^n(\mathbb{R})$:

- $g(x) = f(x) - P(x)$ ha n zeri,
- quindi

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{[n]}(\xi) - P^{[n]}(\xi)}{n!} (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

• Tenuto conto che P ha grado minore di n ne segue $P^{[n]}(x) \equiv 0$ da cui

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{[n]}(\xi)}{n!} (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Supposto che riesca $|f^{[n]}(x)| \leq M$ riesce di conseguenza

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} |x - x_1| \dots |x - x_n|$$

5. Il caso di piú variabili

In luogo delle funzioni reali e continue in una variabile si possono considerare funzioni reali di piú variabili, in luogo di $C^0([0, 1])$ o, piú in generale di $C^0([a, b])$ si possono considerare gli spazi

$$C^0(\Omega), \quad \Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Un risultato analogo al precedente teorema di Weierstrass osservato in una dimensione si conserva (naturalmente con la stessa paternità) in dimensione maggiore di 1

TEOREMA 5.1. $\forall f \in C^0(\Omega)$ e $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, polinomio in x_1, x_2, \dots, x_n tale che

$$\max_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega} |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - P(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \varepsilon$$

5.1. La completezza del sistema trigonometrico.

Ogni funzione continua $f(\vartheta)$

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(0) = f(2\pi)$$

può essere approssimata uniformemente in $[0, 2\pi]$ da polinomi trigonometrici, cioè da somme

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k \vartheta) + b_k \sin(k \vartheta))$$

Il risultato deriva, facilmente, dal teorema di Weierstrass in \mathbb{R}^2 : consideriamo infatti la funzione di due variabili

$$g(x, y) = \rho f(\vartheta), \quad x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin(\vartheta)$$

continua in tutto \mathbb{R}^2 : scelto un rettangolo Ω abbastanza grande da includere la circonferenza $\rho = 1$ e scelto $\varepsilon > 0$ sia $P(x, y)$ il polinomio di Weierstrass tale che

$$\max_{(x,y) \in \Omega} |g(x, y) - P(x, y)| \leq \varepsilon$$

Riesce di conseguenza, preso $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho = 1$

$$\max_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |f(\vartheta) - P(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))| \leq \varepsilon$$

Tenuto conto delle note formule trigonometriche che consentono di esprimere le potenze di $\cos(\vartheta)$ e di $\sin(\vartheta)$ mediante $\cos(k\vartheta)$ e di $\sin(h\vartheta)$ si riconosce che

$$P(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\vartheta) + b_k \sin(k\vartheta))$$

da cui l'asserto.

OSSERVAZIONE 5.2. *La richiesta $f(0) = f(2\pi)$ é irrinunciabile: altrimenti la funzione $g(x, y)$ proposta non é continua.*

Infatti la condizione $f(0) = f(2\pi)$ corrisponde al fatto che f sia una funzione continua definita sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Il teorema di Stone Weierstrass

1. Le algebre di Stone

Stone (il teorema di) indaga sui sottoinsiemi

$$A \subseteq C^0([0, 1])$$

che siano *algebre* cioè tali che

$$\forall f, g \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha f + \beta g \in A, \\ f \cdot g \in A \end{cases}$$

Il teorema 1.3, noto come *Teorema di Stone-Weierstrass*, pagina 97, indica **condizioni sufficienti** sotto le quali riesce

$$\overline{A} = C^0([0, 1])$$

cioé le condizioni che un'algebra A di funzioni deve soddisfare per essere

$$\text{un sottoinsieme denso in } C^0([0, 1])$$

ovvero per poter riconoscere che

$$\forall f \in C^0([0, 1]), \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \quad \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - a(x)| < \varepsilon$$

Il caso piú importante di algebra che verifichi le condizioni di Stone é l'algebra dei polinomi: si ritrova cosí il risultato di Weierstrass (e Bernstein).

Vedi anche

http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass_theorem

1.1. Algebre e reticoli.

LEMMA 1.1. *La chiusura in $C^0([0, 1])$ di un'algebra $A \subseteq C^0([0, 1])$ é un'algebra.*

DEFINIZIONE 1.2. *Un insieme $L \subseteq C^0([0, 1])$ si dice un reticolo se*

$$\forall f, g \in L \quad \rightarrow \quad \max(f, g), \min(f, g) \in L$$

ESEMPIO 1.3.

- $C^0([0, 1])$ é un reticolo,

- $C^1([0, 1]) \subset C^0([0, 1])$ non é un reticolo,
- l'insieme P dei polinomi non é un reticolo,
- la totalit  delle funzioni nulle in un fissato $x_0 \in [0, 1]$ é un reticolo.

PROPOSIZIONE 1.4. *Un algebra A é un reticolo se*

$$\forall f \in A \quad \rightarrow \quad |f| \in A$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato deriva dal fatto che

$$\max(f, g) = f \cup g = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$\min(f, g) = f \cap g = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

sono combinazioni lineari di

$$f(x), g(x), |f(x) - g(x)|$$

□

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia $A \subseteq C^0([0, 1])$ un'algebra: allora*

$$f, g \in A \quad \rightarrow \quad f \cup g, f \cap g \in \bar{A}$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto osservato nella precedente proposizione basta provare che

$$\forall f \in \bar{A} \quad \rightarrow \quad |f| \in \bar{A}$$

Naturalmente basta verificare tale propriet  per le f tali che $|f| \leq 1$.

Consideriamo, a tale proposito, la funzione $\sqrt{t + \varepsilon^2}$ sia $P(t)$ un suo polinomio di Taylor¹ di punto iniziale l'origine tale che

$$\left| P(t) - \sqrt{t + \varepsilon^2} \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1]$$

Tenuto conto che $P(0) = \varepsilon$ posto $Q(t) = P(t) - P(0)$ riesce

$$\left| Q(t) - \sqrt{t + \varepsilon^2} \right| < 2\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1]$$

Tenuto conto inoltre che

$$\forall x \in [-1, 1] : \quad \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - |x| < \varepsilon$$

riesce anche

$$|Q(x^2) - |x|| \leq \left| Q(x^2) - \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \right| + \left| \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - |x| \right| \leq 3\varepsilon$$

Tenuto conto che $Q(x^2)$ é un polinomio in x^2 senza termine di grado 0 segue che, essendo A un'algebra,

$$f \in A \quad \rightarrow \quad u_\varepsilon(x) = Q(f^2(x)) \in A$$

¹Probabilmente si dovr  ricorrere ad ordini dello sviluppo di Taylor molto alti...

e riesce

$$|u_\varepsilon(x) - |f(x)|| \leq |Q(f^2(x)) - \sqrt{f^2(x) + \varepsilon^2}| + |\sqrt{f^2(x) + \varepsilon^2} - |f(x)|| \leq 3\varepsilon$$

cioé, data l'arbitrarietà di ε ,

$$f \in A \quad \rightarrow \quad |f| \in \bar{A}$$

□

1.2. Separare i punti.

DEFINIZIONE 1.6. *Un insieme $E \subseteq C^0([0, 1])$ separa i punti se*

$$\forall x, y \in [0, 1], \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \exists f_{x,y} \in E : \begin{cases} f_{x,y}(x) = a \\ f_{x,y}(y) = b \end{cases}$$

In altri termini un insieme $E \subseteq C^0([0, 1])$ separa i punti se presi comunque due punti $x_0, y_0 \in [0, 1]$ e due valori reali a e b esiste almeno una funzione $f \in E$ tale che

$$f(x_0) = a, \quad f(y_0) = b$$

ovvero tale che il grafico di f passi per i due punti (x_0, a) , (y_0, b) .

ESEMPIO 1.7.

- la totalità delle funzioni nulle in un fissato $x_0 \in [0, 1]$ non separa i punti,
- $C^1([0, 1]) \subset C^0([0, 1])$ separa i punti,
- l'insieme P dei polinomi separa i punti,
- l'insieme P dei polinomi di primo grado separa i punti.

1.3. Il teorema di Stone-Weierstrass.

TEOREMA 1.8 (M.H.Stone²). *Sia $A \subseteq C^0([0, 1])$ un'algebra che contenga le costanti e che separi i punti, allora*

$$\bar{A} = C^0([0, 1])$$

OSSERVAZIONE 1.9. *La dimostrazione del teorema é fatta in tre tappe:*

- si riconosce che $f \in A \quad \rightarrow \quad |f(x)| \in \bar{A}$, vedi Lemma 1.5,
- quindi si riconosce che

$$f, g \in A \quad \rightarrow \quad \min(f, g), \max(f, g) \in \bar{A}$$

vedi Proposizione 1.4,

²<http://mathworld.wolfram.com/Stone-WeierstrassTheorem.html>

- *in ultimo, usando la proprietá di separare i punti, per compattezza di $[0, 1]$, si prova che*

$$\forall f \in C^0([0, 1]) \quad \exists p \in A : p \approx f$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostrare che $\overline{A} = C^0([0, 1])$ significa provare che

$$\forall \varphi \in C^0([0, 1]), \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in A : |g(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Indicata con $L = \overline{A}$ sappiamo, dalla Proposizione 1.5 che L ha le proprietá di reticolo.

Per ogni coppia di punti $x, y \in [0, 1]$ esiste³, per l'ipotesi che A separa i punti, $f_{x,y} \in L$ tale che

$$f_{x,y}(x) = \varphi(x), \quad f_{x,y}(y) = \varphi(y)$$

Tenuto conto della $f_{x,y}(y) = \varphi(y)$, fissato x consideriamo per ogni y l'intorno $V(y)$ in cui riesce

$$\forall z \in V(y) : \varphi(z) - \varepsilon < f_{x,y}(z),$$

Tenuto conto che $[0, 1]$ é compatto esisteranno allora un numero finito di tali intorni, $V(y_1), V(y_2), \dots, V(y_m)$ che lo ricoprono, cioé tali che

$$[0, 1] \subseteq V(y_1) \cup V(y_2) \cup \dots \cup V(y_m)$$

Scelto $z \in [0, 1]$ riesca $z \in V(y_j)$ e quindi

$$\varphi(z) - \varepsilon < f_{x,y_j}(z) \leq \max_{1 \leq j \leq m} f_{x,y_j}(z)$$

Indicato con

$$g_x(z) = \max_{1 \leq j \leq m} f_{x,y_j}(z)$$

riesce⁴

$$f_{x,y_j} \in A \quad \rightarrow \quad g_x(z) \in L,$$

e quindi

$$\forall z \in [0, 1] : \quad \varphi(z) - \varepsilon < g_x(z)$$

Tenuto conto che

$$\forall j \in [1, m] \quad f_{x,y_j}(x) = \varphi(x) \quad \rightarrow \quad g_x(x) = \varphi(x)$$

esiste, per ogni x un intorno $W(x)$ tale che

$$\forall z \in W(x) : g_x(z) < \varphi(z) + \varepsilon$$

³Nel caso che A sia l'algebra dei polinomi la funzione $f_{x,y}$ é semplicemente il polinomio di primo grado (grafico una retta) che passa per i due punti $R = (x, \varphi(x))$ e $S = (y, \varphi(y))$

⁴Nel caso che A sia l'algebra dei polinomi la funzione $g_x(z)$ é una funzione lineare a tratti: grafico una spezzata formata dai tratti delle rette $f_{x,y_j}(z)$ superiori.

Tenuto conto una seconda volta che $[0, 1]$ é compatto esisteranno allora un numero finito di tali intorno, $W(x_1), W(x_2), \dots, W(x_m)$ che lo ricoprono, cioè tali che

$$[0, 1] \subseteq W(x_1), \cup W(x_2), \cup \dots \cup W(x_m)$$

Scelto $z \in [0, 1]$ riesca $z \in V(x_k)$ e quindi

$$\min_{1 \leq k \leq m} g_{x_k}(z) \leq g_{x_k}(z) < \varphi(z) + \varepsilon$$

Indicata con

$$g(z) = \min_{1 \leq j \leq m} g_{x_j}(z)$$

riesce

$$g(z) \in L, \quad \forall z \in [0, 1] : \quad g(z) < \varphi(z) + \varepsilon$$

Tenuto conto che

$$\forall z \in [0, 1] : \quad \varphi(z) - \varepsilon < g_x(z) \quad \rightarrow \quad \forall z \in [0, 1] : \quad \varphi(z) - \varepsilon < g(z)$$

Ne segue quindi

$$g(z) - \varepsilon < \varphi(z) < g(z) + \varepsilon$$

ovvero

$$|g - \varphi| < \varepsilon$$

Tenuto conto che $g \in L$ cioè $g \in \bar{A} \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_\varepsilon \in A :$

$$|g - u_\varepsilon| < \varepsilon$$

ne segue che

$$|u_\varepsilon(z) - \varphi(z)| < 2\varepsilon$$

Risulta provata cioè, per ogni $\varphi \in C^0([0, 1])$ e per ogni $\varepsilon > 0$, l'esistenza di una $u_\varepsilon \in A$ tale che

$$\max_{x \in [0, 1]} |u_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

ovvero il risultato di densità

$$\bar{A} = C^0([0, 1])$$

□

2. Polinomi e polinomi trigonometrici

Importanti sottoinsiemi di $C^0([0, 1])$ che costituiscono algebre sono

- i polinomi $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$
- i polinomi trigonometrici $P(\vartheta) = a + b \cos(\vartheta) + c \sin(\vartheta) + \dots$

L'affermazione é ovvia per i polinomi propriamente detti, meno ovvia ma ben nota per i polinomi trigonometrici⁵.

Applicando a tali algebre il precedente Teorema di Stone si ottengono:

COROLLARIO 2.1. *Sia $P \subseteq C^0([0, 1])$ l'algebra dei polinomi separa i punti: quindi*

$$\overline{P} = C^0([0, 1])$$

COROLLARIO 2.2. *Sia $T \subseteq C^0([0, 1])$ l'algebra dei polinomi trigonometrici*

$$t(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad n \in \mathbb{N}$$

T separa i punti, quindi

$$\overline{T} = C^0([0, 1])$$

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia $P_Q \subseteq C^0([0, 1])$ l'algebra dei polinomi a coefficienti razionali: P_Q separa i punti, quindi*

$$\overline{P_Q} = C^0([0, 1])$$

P_Q é numerabile, quindi $C^0([0, 1])$ é separabile, cioé esiste un suo sottinsieme, P_Q , denso e numerabile.

3. Gli spazi $C^m([0, 1])$

Lo spazio $C^1([0, 1]) \subset C^0([0, 1])$ é l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale, continue e derivabili con derivata continua definite in $[0, 1]$.

Analogamente $C^2([0, 1]) \subset C^1([0, 1]) \subset C^0([0, 1])$ é l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale, continue e derivabili due volte con derivate continue definite in $[0, 1]$.

ecc. ecc.

Sugli spazi $C^m([0, 1])$ si pone una metrica suggerita da quella considerata in $C^0([0, 1])$: cosí, ad esempio

$$\forall f \in C^1([0, 1]) \quad \|f\|_1 = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

⁵Basta riconoscere, servendosi delle formule trigonometriche, che le potenze $\sin^k(\vartheta), \dots$ si esprimono come somme di $\sin(\vartheta), \cos(\vartheta), \dots, \sin(k\vartheta), \dots$

e, in generale,

$$\forall f \in C^m([0, 1]) \quad \|f\|_m = \sum_{k=0}^m \max_{x \in [0, 1]} |f^{[k]}(x)|$$

PROPOSIZIONE 3.1. *Lo spazio dei polinomi é denso in ogni $C^m([0, 1])$.*

DIMOSTRAZIONE. La proposizione afferma che scelta $f \in C^m([0, 1])$ e scelto $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio P tale che

$$\|f - P\|_m < \varepsilon$$

Limitiamoci a riconoscere tale risultato per $m = 1$:

- dal teorema di Weierstrass, applicato alla funzione continua f' , segue che esiste un polinomio p tale che

$$\|f' - p\|_0 < \varepsilon$$

- posto

$$P(x) = f(0) + \int_0^x p(t) dt$$

P é un polinomio,

- tenuto conto che $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ riesce

$$P(x) - f(x) = \int_0^x (p(t) - f'(t)) dt \quad \rightarrow \quad |P(x) - f(x)| \leq \varepsilon x \leq \varepsilon$$

Riesce pertanto

$$\|f - P\|_1 = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x) - p(x)| \leq 2\varepsilon$$

da cui la tesi. □

3.1. Approssimazioni diverse.

L'approssimazione nelle metriche $\|\cdot\|_m$ é piú profonda di quella osservata in $C^0([0, 1])$: dire che il polinomio $P(x)$ approssima $f(x)$ in $C^0([0, 1])$ significa che

$$\forall x_0 \in [0, 1] \quad P(x_0) \approx f(x_0)$$

dire che $P(x)$ approssima $f(x)$ in $C^1([0, 1])$ significa che

$$\forall x_0 \in [0, 1] \quad \begin{cases} P(x_0) \approx f(x_0) \\ P'(x_0) \approx f'(x_0) \end{cases}$$

Il seguente esempio fa capire la differenza

ESEMPIO 3.2. Sia $\varepsilon = \frac{1}{100}$ e sia $f(x) = \frac{1}{200} \sin(1000x)$: il polinomio (costante) $P(x) = 0$ approssima f in $C^0([0, 1])$ a meno di ε . Non approssima invece altrettanto bene in $C^1([0, 1])$: infatti

$$P'(x) = 0, \quad f'(x) = 5 \cos(1000x) \quad \rightarrow \quad \max_{x \in [0, 1]} |P' - f'| = 5 \not\leq \varepsilon$$

Il livello di approssimazione via via piú profondo che le metriche dei $C^m([0, 1])$ richiedono può apprezzarsi con la seguente storiella:

Un personaggio illustre desidera farsi costruire un manichino somigliante e si rivolge per questo ad una serie di ditte specializzate

- *la prima produce un pupazzo tipo soprammobile molto somigliante,*
- *la seconda produce un manichino che oltre ad essere somigliante ha anche la stessa altezza del personaggio,*
- *la terza un manichino somigliante, della stessa altezza e dello stesso peso del personaggio,*
- *la quarta un manichino somigliante, della stessa altezza, dello stesso peso e che emana un profumo uguale a quello del dopobarba tradizionalmente usato dal personaggio,*
- *.....*

Approssimazioni via via piú profonde....

Equazione del calore

Una prima informazione sul problema di Cauchy relativo all'equazione del calore in una barra si trova sul sito *Wolfram* all'indirizzo

<http://mathworld.wolfram.com/HeatConductionEquation.html>

Una buona informazione, anche più ampia di quella immediatamente necessaria, si trova su *Wikipedia* all'indirizzo

http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

1. Il problema di Cauchy

Consideriamo nel piano $\{(x, t)\} = \mathbb{R}^2$ la semistriscia

$$\Omega : \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq +\infty\}$$

e consideriamo il problema differenziale nell'incognita $u(x, t)$

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

In termini fenomenologici la funzione $u(x, t)$ soluzione rappresenta la temperatura di ogni punto x di una barra simulata dall'intervallo $[0, \pi]$ soggetta alle seguenti condizioni:

- i due estremi $x = 0$ e $x = \pi$ sono mantenuti, forzatamente, a 0° gradi,
- la temperatura della barra al tempo $t = 0$ è assegnata e vale, punto per punto, $\varphi(x)$
- la diffusione del calore avviene secondo la dinamica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con k coefficiente positivo assegnato.

OSSERVAZIONE 1.1. *La dinamica della temperatura $u(x, t)$ indicata dall'equazione differenziale è, giustamente, indicata come*

diffusione.

Infatti la derivata

$$\frac{du}{dt}(x_0, t_0)$$

cioè la variazione di $u(x_0, t_0)$ al passare del tempo è

- *positiva se $u_{xx}(x_0, t_0) > 0$, cioè se in corrispondenza di (x_0, t_0) si ha un minimo,*
- *negativa se $u_{xx}(x_0, t_0) < 0$, cioè se in corrispondenza di (x_0, t_0) si ha un massimo.*

In parole povere i punti della barra in cui la temperatura era maggiore tendono al passare del tempo a raffreddarsi, mentre quelli in cui la temperatura era minore tendono a riscaldarsi.

*Comportamenti analoghi, cioè **analogamente diffusivi**, si possono riconoscere in corrispondenza, ad esempio, della concentrazione di un gas nell'aria, ecc.*

Si noti che le condizioni al contorno poste

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

fanno prevedere qualche richiesta di compatibilità:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

La soluzione $u(x, t)$ del problema può essere ragionevolmente cercata tra le funzioni continue in Ω e derivabili, una volta almeno rispetto a t e due volte almeno rispetto ad x , all'interno di Ω .

2. Alcune soluzioni

Cerchiamo soluzioni del problema parziale

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

della forma

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

procediamo cioè

per separazione delle variabili

Affinchè $X(x)T(t)$ soddisfi l'equazione differenziale occorre che

$$X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$$

cioè

$$\frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Essendo il primo membro, funzione di t , uguale ad un secondo membro che non dipende da t , non può che essere costante.

Analogo discorso si fa partendo dal secondo membro, arrivando a concludere che anch'esso non può che essere costante, ovviamente la stessa costante del precedente:

$$\frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Tenuto presente inoltre che

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni $X(x) \neq 0$ se e solo se $\lambda = -n^2$ in corrispondenza ai quali ha le soluzioni

$$X_n(x) = \sin(nx)$$

Si ha quindi, inoltre,

$$T'(t) = -k^2 n^2 T(t) \quad \rightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-k^2 n^2 t}$$

Pertanto il problema (21) ha le (tante) soluzioni

$$u_n(x, t) = C_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx)$$

La linearità del problema fa riconoscere quindi che sono soluzioni del problema (21) anche le somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx)$$

È tra tali somme, ammesso che costituiscano serie convergenti, che si può sperare di trovare una soluzione del problema iniziale (20).

ESEMPIO 2.1. *Supponiamo $k = 1$ e che la distribuzione iniziale della temperatura sia*

$$\varphi(x) = 2 \sin(x) + \frac{1}{10} \sin(3x) + \frac{2}{3} \sin(4x)$$

Prendendo le tre funzioni $C_1 u_1(x, t)$, $C_3 u_3(x, t)$, $C_4 u_4(x, t)$ precedenti con i coefficienti

$$C_1 = 2, \quad C_3 = \frac{1}{10}, \quad C_4 = \frac{2}{3}$$

si ha

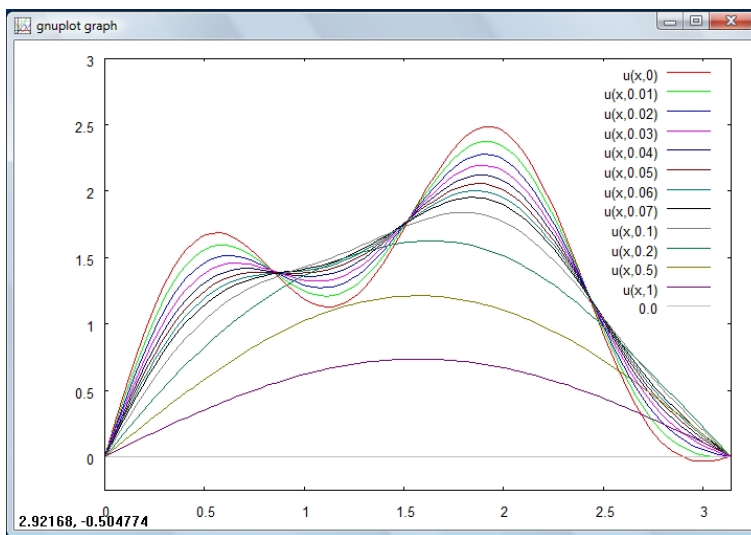


FIGURA 1. $u(x, t)$, $t = 0, 0.01, \dots, 1$

$$u(x, t) = 2 e^{-t} \sin(x) + \frac{1}{10} e^{-9t} \sin(3x) + \frac{2}{3} e^{-16t} \sin(4x)$$

funzione che è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che

- soddisfa l'equazione differenziale,
- $u(0, t) = 0, \quad \forall t$
- $u(\pi, t) = 0, \quad \forall t$
- $u(x, 0) = 2 \sin(x) + \frac{1}{10} \sin(3x) + \frac{2}{3} \sin(4x) = \varphi(x)$

Essa quindi è una soluzione di (20).

È interessante riconoscere, vedi Figura 1, che la temperatura $u(x, t)$ varia più rapidamente in corrispondenza delle ascisse x in cui si registravano inizialmente massimi o minimi, mentre rimane in un primo tempo apparentemente invariata in corrispondenza dei punti di flesso. Che la $u(x, t)$ trovata sia l'unica soluzione di (20) è ancora da valutare...!

La Figura 1 consente un'ulteriore osservazione: i valori della $u(x, t)$ trovati per i vari tempi considerati, 0.01, 0.02, ..., 0.1 sono tutti inferiori

al valore massimo della $u(x, 0)$: fenomeno ragionevole, in assenza di sorgenti, la temperatura non può che abbassarsi...

3. Il principio di massimo

TEOREMA 3.1. Sia $u(x, t)$ soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

in $\Omega_T := \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T\}$, detto M il massimo di u sulle tre parti di frontiera di Ω_T

$$S := \{(x, 0), 0 \leq x \leq \pi, (0, t), (\pi, t) \mid 0 \leq t \leq T\}$$

riesce

$$u(x, t) \leq M \quad \forall (x, t) \in \Omega_T$$

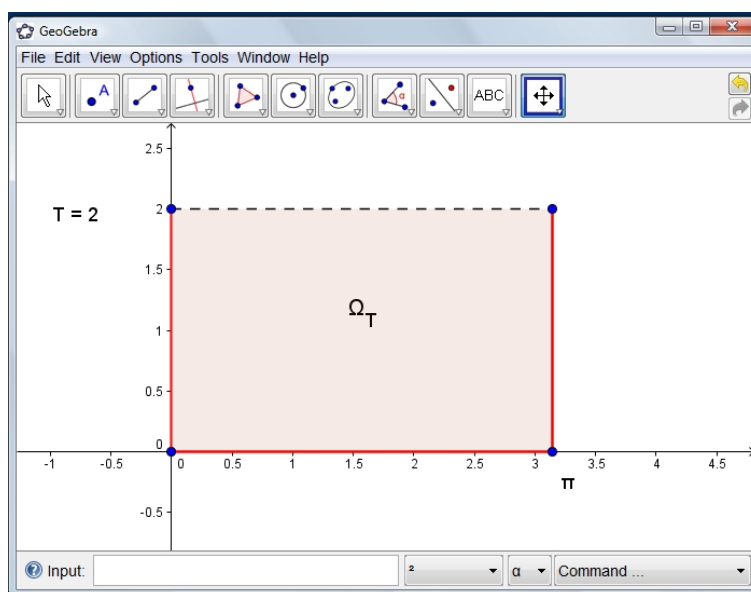


FIGURA 2. L'insieme Ω_T

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che esista un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ e non appartenente ai tre lati S in cui riesca

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

riconosceremo, tramite un opportuno algoritmo di costruzione, che, in tale caso, esiste un punto $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ in cui la funzione $u(x, t)$ non verifica più l'equazione differenziale del calore.

Algoritmo per (x_1, t_1)

Consideriamo la funzione continua in Ω_T

$$v(x, t) = u(x, t) + \gamma(t_0 - t)$$

modificata di u per l'aggiunta di un addendo $\gamma(t_0 - t)$ nullo in $t = t_0$ e piccolo, cioè con $\gamma > 0$ tale che

$$|\gamma(t_0 - t)| \leq \gamma T < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ un punto in cui v raggiunga il suo massimo in Ω_T

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

Tenuto conto che

$$\max_{(x,t) \in S} v(x, t) \leq \max_{(x,t) \in S} u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

il punto $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ non può cadere sul bordo S .

In tale punto di massimo deve, necessariamente, riuscire quindi

$$\begin{cases} v_x(x_1, t_1) = 0, \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} v_t(x_1, t_1) = 0 & \text{se } t_1 < T \\ v_t(x_1, t_1) \geq 0 & \text{se } t_1 = T \end{cases}$$

da cui discende, necessariamente,

$$\begin{cases} u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \gamma \geq \gamma > 0 \\ u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \end{cases}$$

In tale punto $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ si avrebbe

$$u_t(x_1, t_1) > 0 \quad e \quad u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

contrariamente al fatto che u verifica invece l'equazione che implica che

$$u_t \quad e \quad u_{xx}$$

hanno lo stesso segno !

L'assurdo discende dall'aver ammesso l'esistenza di un punto (x_0, t_0) in cui riuscisse $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

□

4. Conseguenze del principio di massimo

TEOREMA 4.1. *Sia $u \in C^0(\Omega_T)$ soluzione del problema di Cauchy*

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \mu_1(t) & 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) & 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

detti

$$m = \min\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\}, \quad M = \max\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\},$$

riesce

$$\forall (x, t) \in \Omega_T : \quad m \leq u(x, t) \leq M$$

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza

$$u(x, t) \leq M$$

è esattamente il principio di massimo 3.1.

La disuguaglianza con il minimo deriva ancora dal fatto, ben noto, che

$$\min u = -\max(-u)$$

e che la funzione $-u$ verifica ancora l'equazione del calore con dati sul bordo naturalmente cambiati di segno.

Ne segue pertanto

$$\max_{\Omega_T}(-u) \leq \max_S\{-\mu_1(t), -\mu_2(t), -\varphi(x)\}$$

ovvero

$$-\min_{\Omega_T}(u) \leq -\min_S\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\}$$

ovvero quindi

$$\min_{\Omega_T}(u) \geq \min_S\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\}$$

□

4.1. Il teorema di unicità.

TEOREMA 4.2. *Il problema (22) ha unicità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1 e u_2 due soluzioni dello stesso problema (22): indicata con

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

la loro differenza, essa verifica il problema omogeneo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = 0 & 0 < t < T \\ u(\pi, t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Quindi massimo e minimo sul bordo S sono nulli e quindi per il precedente Teorema 4.1 riesce

$$0 \leq v(x, t) \leq 0 \quad \rightarrow \quad v = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = u_2$$

□

4.2. La monotonia.

PROPOSIZIONE 4.3. *Siano u e rispettivamente v le soluzioni dei due problemi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \mu_1(t) \quad 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega_T \\ v(0, t) = \nu_1(t) \quad 0 < t < T \\ v(\pi, t) = \nu_2(t) \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

Se

$$\mu_1 \leq \nu_1, \quad \mu_2 \leq \nu_2, \quad \varphi(x) \leq \psi(x)$$

allora riesce, di conseguenza

$$u(x, t) \leq v(x, t)$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che la funzione differenza

$$v(x, t) - u(x, t)$$

verifica un problema del calore con dati sul bordo S non negativi e quindi

$$0 \leq v(x, t) - u(x, t) \quad \rightarrow \quad u(x, t) \leq v(x, t)$$

□

4.3. Dipendenza continua.

PROPOSIZIONE 4.4. *Siano u e v le soluzioni dei due problemi del calore seguenti*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \mu_1(t) \quad 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega_T \\ v(0, t) = \nu_1(t) \quad 0 < t < T \\ v(\pi, t) = \nu_2(t) \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

Riesce

$$\max_{(x,t) \in \Omega_T} |u(x, t) - v(x, t)| \leq \max |\mu_1(t) - \nu_1(t)| + \max |\mu_2(t) - \nu_2(t)| + \max |\varphi(x) - \psi(x)|$$

DIMOSTRAZIONE. Posto

$$m = \min\{\mu_1(t) - \nu_1(t)\} + \min\{\mu_2(t) - \nu_2(t)\} + \min\{\varphi(x) - \psi(x)\}$$

$$M = \max\{\mu_1(t) - \nu_1(t)\} + \max\{\mu_2(t) - \nu_2(t)\} + \max\{\varphi(x) - \psi(x)\}$$

dal teorema 4.1 si ricava che

$$m \leq u(x, t) - v(x, t) \leq M \quad \rightarrow \quad |u(x, t) - v(x, t)| \leq \max\{|m|, |M|\}$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} |m| &\leq \max\{|\mu_1(t) - \nu_1(t)|\} + \max\{|\mu_2(t) - \nu_2(t)|\} + \max\{|\varphi(x) - \psi(x)|\} \\ |M| &\leq \max\{|\mu_1(t) - \nu_1(t)|\} + \max\{|\mu_2(t) - \nu_2(t)|\} + \max\{|\varphi(x) - \psi(x)|\} \end{aligned}$$

segue

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \max\{|\mu_1(t) - \nu_1(t)|\} + \max\{|\mu_2(t) - \nu_2(t)|\} + \max\{|\varphi(x) - \psi(x)|\}$$

□

OSSERVAZIONE 4.5. *Il precedente risultato esprime la dipendenza continua della soluzione dai dati sul bordo: se*

$$\mu_1(t) \approx \nu_1(t), \mu_2(t) \approx \nu_2(t), \varphi(x) \approx \psi(x)$$

allora, di conseguenza

$$u(x, t) \approx v(x, t)$$

5. Una stima $L^2(0, \pi)$

Consideriamo la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro l'equazione differenziale per la $u(x, t)$ stessa, si ha

$$u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, t)$$

ovvero

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, t)$$

integrando su $[0, \pi]$ si ha quindi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u^2(x, t) dx = k^2 \int_0^\pi u_{xx}(x, t) u(x, t) dx$$

e, integrando per parti a secondo membro si ha, tenuto conto che $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u^2(x, t) dx = -k^2 \int_0^\pi u_x^2(x, t) dx$$

Il segno negativo a secondo membro implica

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u^2(x, t) dx \leq 0$$

e quindi

$$t_1 > t_2 \quad \rightarrow \quad \int_0^\pi u^2(x, t_2) dx \leq \int_0^\pi u^2(x, t_1) dx$$

In particolare

$$\forall t \geq 0 \quad \int_0^\pi u^2(x, t) dx \leq \int_0^\pi \varphi(x) dx$$

disuguaglianza che, in termini di norma L^2 , posto

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^\pi u^2(x, t) dx$$

significa che le norme $\|u(t)\|$ delle soluzioni del problema (20), pagina 103, sono decrescenti.

6. Il problema non omogeneo

Consideriamo il problema

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

che, in termini fenomenologici, include la possibilità che la barra di cui studiamo l'evoluzione della temperatura riceva calore da sorgenti $f(x, t)$ diverse nello spazio, dipendenza da x e variabili nel tempo, dipendenza da t .

Il metodo di separazione delle variabili funziona particolarmente bene nel momento in cui sia la sorgente di calore $f(x, t)$ sia il dato iniziale $\varphi(x)$ siano espressi in *serie di Fourier* delle sole funzioni $X_n(x) = \sin(nx)$

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) X_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n X_n(x)$$

cosa che può sempre ottenersi pensando allo sviluppo delle funzioni f^* e φ^* ottenuto prolungando f e φ in modo dispari.

Le nuove soluzioni $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ si trovano con lo stesso procedimento considerato nel caso omogeneo a pagina 104,

$$\sum T_n' X_n = k^2 \sum T_n X_n'' + \sum F_n X_n \quad \rightarrow \quad \forall n \quad T_n'(t) - k^2 n^2 T_n(t) = F_n(t)$$

da cui segue

$$T_n(t) = C_n e^{-k^2 n^2 t} + e^{-k^2 n^2 t} \int_0^t e^{k^2 n^2 s} F_n(s) ds$$

Le soluzioni $u(x, t)$ che si ricavano per l'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t)$$

sono pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-k^2 n^2 t} \int_0^t e^{k^2 n^2 s} F_n(s) ds \sin(nx)$$

La condizione iniziale $u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \sin(nx)$ si soddisfa scegliendo i coefficienti $C_n = \Phi_n$ uguali ai coefficienti di Fourier del dato iniziale $\varphi(x)$.

Quindi la soluzione del problema (23) non omogeneo assegnato è

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-k^2 n^2 t} \int_0^t e^{k^2 n^2 s} F_n(s) ds \sin(nx)$$

Si osservi come la prima delle due serie a secondo membro rappresenti un contributo rapidamente infinitesimo al passare del tempo: diverso è il peso della seconda serie.

ESERCIZIO 6.1. Consideriamo il problema (23) con

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ f(x, t) &= 10 \sin(t) \sin(x), \\ \varphi(x) &= 10 \sin(x) + 5 \sin(3x) + 15 \sin(5x) \end{aligned}$$

In base alla formula risolutiva osservata la soluzione è, vedi Figura 3

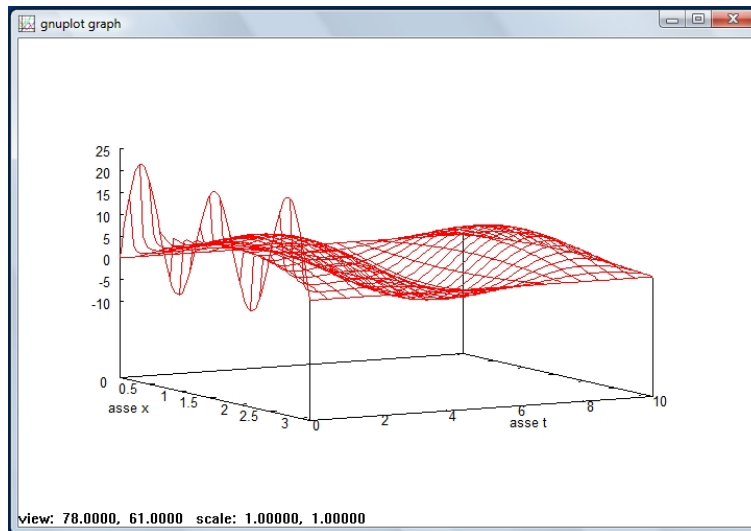
$$\begin{aligned} u(x, t) &= 10e^{-t} \sin(x) + 5e^{-9t} \sin(3x) + 15e^{-25t} \sin(5x) + \\ &\quad + 5(e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)) \sin(x) \end{aligned}$$

I valori delle temperature iniziali vengono assai rapidamente dimenticati....

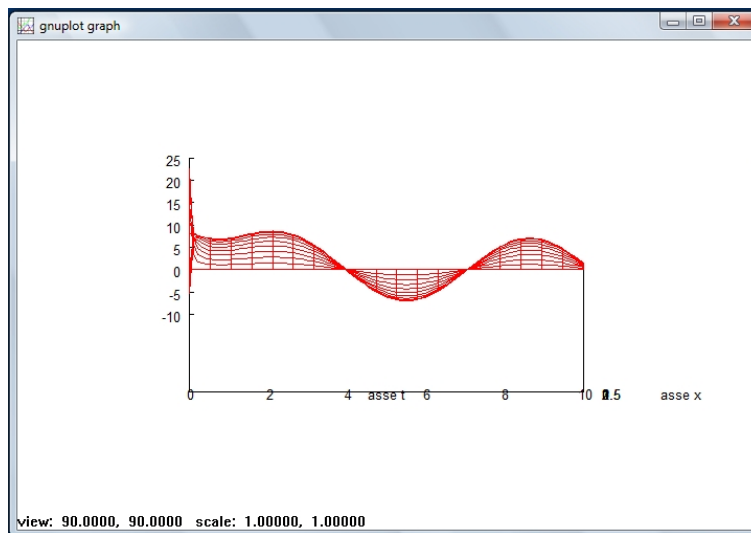
si noti, vedi seconda Figura 4, come ben presto il profilo della u al variare del tempo somigli a quello della $f(x, t) = 10 \sin(t) \sin(x)$, una sinusoide:

c'è solo una piccola sorpresa, guardando bene non si vede un profilo $\sin(t)$ ma si vede il profilo di

$$\sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

FIGURA 3. $u(x, t) = \dots$

si osserva cioè.... il ritardo!

FIGURA 4. $u(x, t) = \dots$

6.1. Il caso totalmente non omogeneo.

Il problema totalmente non omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right| \begin{array}{l} (x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$

si riduce a quello precedente introducendo la funzione

$$w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\pi} (\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

e cercando quindi la soluzione v del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0, t) = 0 \\ v(\pi, t) = 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} (x, t) + f(x, t) - w_t(x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$

È facile riconoscere che

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

è soluzione del problema totalmente non omogeneo assegnato.

ESEMPIO 6.2. *Consideriamo il problema (non molto generale ma trattabile)*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{100} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(t) \\ u(0, t) = \sin(t) \\ u(\pi, t) = \sin(t) \\ u(x, 0) = \sin(6x) \end{array} \right. \begin{array}{l} (x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$

Indicata con

$$w(x, t) = \sin(t)$$

cerchiamo la soluzione del problema nella forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

essendo $v(x, t)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{100} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ v(0, t) = 0 & 0 < t < T \\ v(\pi, t) = 0 & 0 < t < T \\ v(x, 0) = \sin(6x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

da cui

$$v(x, t) = e^{-36/100t} \sin(6x)$$

e, quindi, vedi Figura 5,

$$u(x, t) = e^{-36/100t} \sin(6x) + \sin(t)$$

Anche qui, seguendo la forma della soluzione lungo la scala dei tempi,

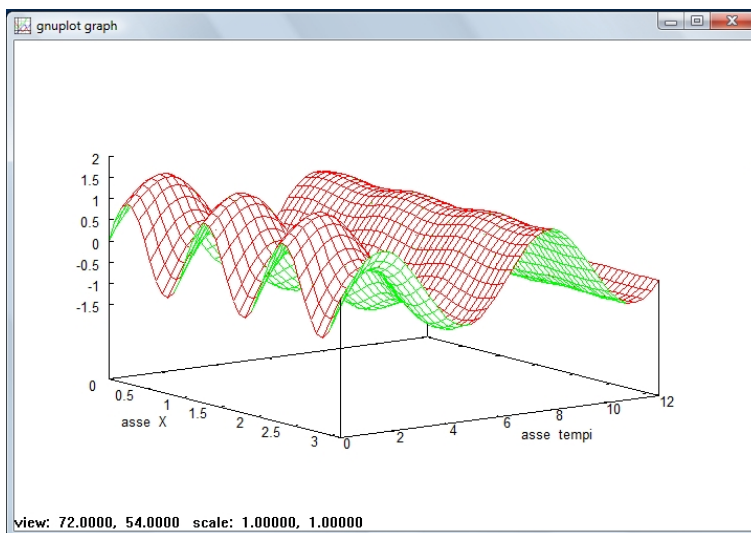


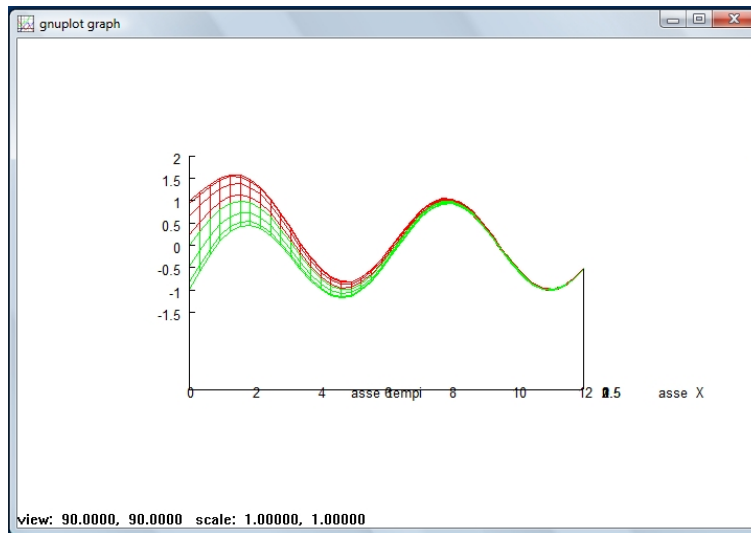
FIGURA 5. $u(x, t) = \dots$

vedi Figura 6, si assiste allo smorzarsi dell'influenza del dato iniziale...

7. Mathematica

Il sito <http://demonstrations.wolfram.com> offre numerose simulazioni collegate alla diffusione del calore. L'utilizzo e/o la manipolazione di tali prodotti dipendono dalla disponibilità dei software collegati

- per la sola lettura basta il *MathPlayer* che si scarica liberamente dall'indirizzo <http://www.wolfram.com/products/player/download.cgi>

FIGURA 6. $u(x, t) = \dots$

- per la manipolazione occorre *Mathematica 7*, software a pagamento (elevato): nella rete 151.100 è comunque disponibile *Mathematica 5*, pressochè analogo al 7.
- all'indirizzo

[http://demonstrations.wolfram.com/
CoolingOfARodWithInitialTemperatureDistribution/](http://demonstrations.wolfram.com/CoolingOfARodWithInitialTemperatureDistribution/)

si trova la simulazione della soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- all'indirizzo

[http://demonstrations.wolfram.com/
MixedBoundaryValueProblemForTheOneDimensionalHeatEquation/](http://demonstrations.wolfram.com/MixedBoundaryValueProblemForTheOneDimensionalHeatEquation/)

si trova la simulazione, analoga del problema con $x \in [0, 1]$.