Spazi di Banach classici

1. Gli spazi $L^p([0,1])$

Le funzioni misurabili su $[0,1]$ costituiscono uno spazio vettoriale V.

Definizione 1.1. *Due funzioni f, $g \in V$ si dicono uguali quasi ovunque se esiste $N \subset [0,1]$ con $m(N) = 0$ tale che*

$$\forall x \notin N : \quad f(x) = g(x)$$

Proposizione 1.2. *Se f, $g \in V$ sono uguali quasi ovunque riesce*

$$\int_{[0,1]} |f(x) - g(x)| dx = 0$$

L'uguaglianza quasi ovunque costituisce una relazione d'equivalenza su V: indichiamo con L lo spazio vettoriale quoziente di V rispetto a tale relazione d'equivalenza.

Definizione 1.3. *Sia $p \geq 1$, indichiamo con $L^p([0,1])$ il sottoinsieme di L tali che*

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^p dx \, < \, +\infty$$

Per ogni $f \in L^p([0,1])$ si pone

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Definizione 1.4. *Si indica con $L^\infty([0,1])$ il sottoinsieme di L relativo alle $f \in L$ per le quali esiste $N \subset [0,1]$ con $m(N) = 0$ tale che f siano limitate in $[0,1] - N$.*
Per tali funzioni si indica con

$$\|f\|_\infty = \inf_N \left(sup_{x \in [0,1]-N} |f(x)| \right)$$

Proposizione 1.5. *Se $p_1 \leq p_2$ riesce*

$$L^{p_2}([0,1]) \subset L^{p_1}([0,1]) \subset L^\infty([0,1])$$

Proposizione 1.6. *Se $f \in L^\infty([0,1])$ si ha*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$$

2. La disuguaglianza di Minkowski

Teorema 2.1. *Siano* $f, g \in L^p([0,1])$, $p \geq 1$, *riesce*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dimostrazione. La disuguaglianza deriva dalla convessitá della funzione t^p

$$\forall \lambda \in [0,1]: \quad (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)^p \leq \lambda t_1^p + (1-\lambda)t_2^p \tag{1}$$

Dalla

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \tag{2}$$

posto

$$\alpha = \|f\|_p, \quad \beta = \|g\|_p$$

e indicato con

$$f_0(x) = \frac{|f(x)|}{\alpha}, \quad g_0(x) = \frac{|g(x)|}{\beta}$$

dalla (2) si ha

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (\alpha+\beta)^p \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} g_0(x)\right)^p \tag{3}$$

servendosi della relazione di convessitá (1) si ha quindi

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (\alpha+\beta)^p \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} f_0^p(x) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} g_0^p(x)\right)$$

Integrando su $[0,1]$ si ha quindi

$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|^p dx \leq (\alpha+\beta)^p \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int_0^1 f_0^p(x)dx + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_0^1 g_0^p(x)dx\right)$$

Tenuto presente che

$$\int_0^1 f_0^p(x)dx = 1, \quad \int_0^1 g_0^p(x)dx = 1$$

si ottiene

$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|^p dx \leq (\alpha+\beta)^p$$

da cui

$$\left(\int_0^1 |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \alpha+\beta$$

cioé

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

3. La disuguaglianza di Holder

Teorema 3.1. *Siano p, q due numeri reali maggiori di 1 tali che*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

allora se $f \in L^p([0,1])$, $g \in L^q([0,1])$ si ha

$$\int_0^1 |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Dimostrazione. La disuguaglianza deriva dalla seguente

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

che si ricava, a sua volta, studiando la funzione

$$h(t)=\frac{a^p}{p}+\frac{t^q}{q}-at$$

Osservato che riesce

$$h'(t)=t^{q-1}-a \quad \to \quad \begin{cases} <0 & se \quad 0<t<a^{1/(q-1)} \\ >0 & se \quad a^{1/(q-1)}<t \end{cases}$$

ne segue

$$\forall t>0: \ \ h(t) \geq h(a^{1/(q-1)})=0$$

da cui

$$\forall a,b \geq 0: \ \ \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab \tag{4}$$

La tesi del teorema si ottiene scegliendo

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

da cui

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

da cui, integrando su $[0,1]$ si ottiene

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq 1 \quad \to \quad \int_0^1 |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

$\square$

4. La metrica

Gli spazi $L^p([0,1])$ sono spazi normati, nel senso che su di essi é definita una norma $\|f\|_p$ cioé un'applicazione

$$L^p([0,1]) \mapsto \mathbb{R}_+$$

tale che

$$\begin{cases} \|f\|_p \Leftrightarrow f = 0 \\ \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p \\ \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \end{cases}$$

Su $L^p([0,1])$, come su ogni spazio normato, si definisce una metrica d ponendo

$$d(f,g) = \|f-g\|_p$$

La presenza di una metrica su $L^p([0,1])$ consente di parlare di convergenza: sia $\{f_n(x)\} \subset L^p([0,1])$, $f(x) \in L^p([0,1])$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

5. La completezza

Le successioni $\{f_n(x)\} \subset L^p([0,1])$ convergenti sono successioni di Cauchy: uno spazio si dice completo quando si verifica anche il viceversa,

ogni successione di Cauchy é convergente.

Definita la convergenza per le successioni si dispone anche della convergenza per le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

inoltre, riferendosi alla norma presente nello spazio, una serie si dice **assolutamente convergente** se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$$

Sussiste il seguente

Teorema 5.1. *Uno spazio normato é completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente é convergente.*

Dimostrazione.

$\boxed{\text{Supponiamo che lo spazio sia completo}}$

Se $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\| < \infty$ allora la successione di numeri reali $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\|f_k\|$ é convergente e quindi costituisce una successione di Cauchy.
La successione $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ verifica, per la disuguaglianza di Minkowski

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\| = |\sigma_m - \sigma_n|$$

quindi $\{s_n(x)\}$ é una successione di Cauchy e, essendo per ipotesi lo spazio completo, é una successione convergente: quindi abbiamo riconosciuto in uno spazio completo ogni serie assolutamente convergente é convergente.

$\boxed{\text{Supponiamo che le serie assolutamente convergenti siano convergenti}}$

Sia $\{f_k(x)\}$ una successione di Cauchy: possiamo estrarre da essa una sottosuccessione $\{f_{n_k}(x)\}$ tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$$

Allora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

é assolutamente convergente, quindi, per l'ipotesi fatta che ogni serie assolutamente convergente siano convergente, sará anche convergente.
Ma le somme parziali di tale serie sono

$$s_m = f_{n_{m+1}} - f_{n_1}$$

dire che le s_m costituiscono una successione convergente equivale a dire che la sottosuccessione $\{f_{n_k}(x)\}$ é convergente.
Ma allora se una sottosuccessione della successione di Cauchy $\{f_k(x)\}$ converge, allora, com'é noto tutta la $\{f_k(x)\}$ é convergente. □

Teorema 5.2 (Fisher Riesz)**.** *Gli spazi* $L^p([0,1])$ *sono completi*

Dimostrazione. Tenuto conto del precedente Teorema 5.1, occorre poter riconoscere che una serie assolutamente convergente, $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p = M < \infty$, é anche convergente:

$$\exists \in L^p([0,1]) : \; s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \;\; \lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p = 0$$

Per riconoscere che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ sia convergente verifichiamo, punto per punto la sua convergenza assoluta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Introdotte le somme parziali della serie dei moduli

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

riesce

$$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x), \quad \|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M < \infty$$

Indicata con

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

riesce quindi, per il teorema di Beppo Levi

$$\int_0^1 g^p(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n^p(x)dx \leq M^p$$

condizione che implica che $g(x)$ é limitata quasi ovunque, ovvero che la serie é quasi ovunque assolutamente convergente e, quindi, convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

Tenuto presente che $|f(x)| \leq g(x)$ ne segue anche che $f \in L^p([0,1])$. Riesce q.o.

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad |s_n(x)| \leq g(x)$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(x) - f(x)|^p = 0, \quad |s_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g(x)^p$$

da cui per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |s_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0$$

cioé anche

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p = 0$$

□