Funzioni analitiche di matrici

1. Introduzione

La piú celebre funzione, l'esponenziale, si introduce sui reali comme somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

assolutamente convergente in tutto $\mathbb{R}$, e si

estende al campo complesso

semplicemente ponendo

$$e^{x+iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^k}{k!}$$

L'estensione proposta é adottata per ogni altra funzione definibile tramite serie di potenze.
Quindi tutte le funzioni analitiche reali possono essere estese in analitiche complesse.

1.1. La convergenza.

Per lavorare con una serie occorre avere riconosciuto la sua convergenza: convergenza che si deduce, generalmente, dalla validitá del

Lemma 1.1. *Una serie assolutamente convergente é convergente.*

Come é stato osservato il Lemma precedente equivale alla completezza dei complessi.

2. I procedimenti di estensione

Sia $\mathfrak{A}$ l'algebra delle matrici quadrate di ordine n.

$$\forall A \in \mathfrak{A}: \quad \|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

La $\|A\|$ rappresenta una norma e $\mathfrak{A}$ é ovviamente completo nella metrica indotta da tale norma.

Consideriamo una funzione analitica complessa

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k,$$

che, per semplicitá supponiamo convergente in tutto il piano,

$\boxed{\text{Serie di potenze}}$

definiamo

$$\forall A\in\mathfrak{A}:\quad f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, A^k,$$

L'unico problema riguarda la convergenza: ma, tenuto conto che

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k\, A^k-\sum_{k=0}^{m} a_k\, A^k\right\|\le\sum_{k=n+1}^{m}|a_k\,\|A\|^k$$

si riconosce che la successione delle somme parziali

$$s_n(A)=\sum_{k=0}^{n} a_k\, A^k$$

é una successione di Cauchy e pertanto si puó parlare del suo limite.

$\boxed{\text{Matrici diagonali}}$

Sia

$$A=P\left[\begin{array}{cccc}\lambda_1 & 0 & .... & 0\\ 0 & \lambda_2 & .... & 0\\ 0 & 0 & .... & 0\\ 0 & 0 & .... & \lambda_n\end{array}\right]P^{-1}$$

definiamo

$$f(A)=P\left[\begin{array}{cccc}f(\lambda_1) & 0 & .... & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & .... & 0\\ 0 & 0 & .... & 0\\ 0 & 0 & .... & f(\lambda_n)\end{array}\right]P^{-1}$$

$\boxed{\text{La rappresentazione di Cauchy}}$

Tenuto conto che scelta una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro z_0 e raggio ρ riesce

$$\forall|z-z_0|<\rho:\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta$$

definiamo

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\zeta$$

avendo scelto il raggio ρ tanto grande da racchiudere dentro il cerchio tutti gli autovalori di A.

3. Il teorema di Hamilton-Cayley

Teorema 3.1. [1] *Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e I la matrice unitaria, Posto*

$$p(A) = \det(tI - A) = A^n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k} A^{n-k} + c_0 I$$

riesce

$$p(A) = 0$$

Esempio 3.2. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico associato é

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-2)(-3) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Il teorema di Hamilton-Cayley afferma che indicato

$$p(X) = X^2 - 5X - 2I_2,$$

riesce

$$p(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

come si verifica direttamente.

Osservazione 3.3. *La relazione affermata $p(A) = 0$ puó ingenuamente essere ritenuta ovvia con il seguente ragionamento*

$$p(t) = \det(tI - A) \quad \to \quad p(A) = \det(A.I - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

si tratta di un ragionamento ingenuo: λ, nella prima espressione, interagisce solo sulla diagonale principale di A, mentre l'idea che $\lambda I \quad \to A.I$ comporta una interazione su tutti i termini...

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Hamilton_theorem

4. Il caso delle matrici diagonalizzabili

Se riesce $Av = \lambda v$ allora

$$p(A)v = p(\lambda)v$$

se A é diagonalizzabile allora esiste una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ fatta di autovettori: ogni v si scrive come

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \rightarrow \quad p(A)v = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(\lambda_i) \, e_i = 0$$

avendo tenuto conto che $p(\lambda_i) = 0$.
Ne segue che

$$\forall v \quad p(A)v = 0 \quad \rightarrow \quad p(A) = 0$$

5. La dimostrazione algebrica

5.1. Premessa.

Definizione 5.1. *Assegnata la matrice $n \times n$ A si dice aggiunta di A la matrice B i cui elementi sono*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

essendo $A_{i,j}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A sopprimendo la riga i e la colonna j.

Dal teorema di Laplace segue com'é noto

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{h,j} = \begin{cases} \det(A) & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

Relazione che puó essere letta anche come

$$A \, . \, B = B \, . \, A = \det(A) \, I$$

avendo indicato con I la matrice $n \times n$ unitaria.

5.2. Applicazione. Sia B la matrice aggiunta della $tI - A$: naturalmente B si rappresenta come una somma

$$B = B_0 + tB_1 + t^2 B_2 + ... + t^{n-1} B_{n-1}$$

Tenuto conto che

$$(tI - A) \, . \, B \, = \, p(t) \, I$$

si ha

$$t \, B_0 + t^2 B_1 + t^3 B_2 + ... + t^n B_{n-1} - AB_0 - tAB_1 - t^2 AB_2 + ... - t^{n-1} AB_{n-1} \, = \, p(t) \, I$$

ovvero ordinando secondo le potenze di t

$$t^n B_{n-1} + t^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + t^{n-2}(B_{n-3} - AB_{n-2}) + ... + t(B_0 - AB_1) - AB_0 \, = \, p(t) \, I$$

Tenuto presente che

$$p(t)I = t^n I + c_{n-1}t^{n-1}I + ... + c_1 tI + c_0 I$$

uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di t si ottengono le seguenti uguaglianze

$$\begin{array}{llll}
B_{n-1} & & = & I \\
B_{n-2} & -AB_{n-1} & = c_{n-1} & I \\
B_{n-3} & -AB_{n-2} & = c_{n-2} & I \\
B_{n-4} & -AB_{n-3} & = c_{n-3} & I \\
.... & & = ... & \\
B_0 & -AB_1 & = c_1 & I \\
 & -AB_0 & = c_0 & I
\end{array}$$

da cui moltiplicando membro a membro per A^n la prima, per A^{n-1} la seconda, per A^{n-2} la terza fino a moltiplicare per A la penultima si ottengono le nuove seguenti

$$\begin{array}{llll}
A^n B_{n-1} & & = & A^n \\
A^{n-1}B_{n-2} & -A^n B_{n-1} & = c_{n-1} & A^{n-1} \\
A^{n-2}B_{n-3} & -A^{n-1}B_{n-2} & = c_{n-2} & A^{n-2} \\
A^{n-3}B_{n-4} & -A^{n-2}B_{n-3} & = c_{n-3} & A^{n-3} \\
.... & & = ... & \\
AB_0 & -A^2 B_1 & = c_1 & A \\
 & -AB_0 & = c_0 & I
\end{array}$$

Sommando membro a membro di ottiene a sinistra una eliminazione totale e quindi

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + ... + c_1 A + c_0 I = 0$$

la tesi del teorema di Hamilton Cayley.

Corollario 5.2. *Se $c_0 \neq 0$ riesce*

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}\left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}A^{n-1-k}\right)$$

Dimostrazione. Tenuto presente che, per il precedente Teorema,

$$-c_0\, I = A\left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}A^{n-1-k}\right)$$

se $c_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$ riesce

$$I = -\frac{1}{c_0}A\left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}A^{n-1-k}\right)$$

ovvero la tesi. □

6. Successioni ricorsive

Il teorema di Hamilton Cayley riconosce la relazione

$$A^n = -c_{n-1}A^{n-1} - c_{n-2}A^{n-2} - ... - c_1 A + c_0 I$$

e di conseguenza

$$A^{m+n} = -c_{n-1}A^{m+n-1} - c_{n-2}A^{m+n-2} - ... - c_1 A^{m+1} + c_0 A^m$$

Supponendo che l'equazione $p(t) = 0$ abbia n radici distinte

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ ....\lambda_n$$

esistono n matrici

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ ...., C_n$$

tali che

$$A^k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + ... + C_n\lambda_n^k$$

- ciascuna delle radici λ_j verifica la relazione ricorsiva

$$\lambda_j^{m+n} = -c_{n-1}\lambda_j^{m+n-1} - c_{n-2}\lambda_j^{m+n-2} - ... - c_1\lambda_j^{m+1} + c_0\lambda_j^m$$

- Per linearitá quindi la successione di matrici

$$B_k = C\lambda_j^k$$

  verifica la stessa relazione ricorsiva.
- Ancora per linearitá anche la successione

$$B_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + ... + C_n\lambda_n^k$$

  verifica la stessa relazione ricorsiva.
- si possono scegliere le matrici C_1, C_2, $...$, C_n in modo che

$$A^k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + ... + C_n\lambda_n^k, \quad k = 0, 1, .., n-1$$

Di conseguenza con tale scelta delle matrici $C_1,\ C_2,\ ..., C_n$ la successione

$$C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + ... + C_n\lambda_n^k, \quad k \geq n$$

esprime le potenze della matrice A.

7. Funzioni analitiche

Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

l'espressione in serie di $f(A)$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

tenuto conto che

$$A^k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + ... + C_n\lambda_n^k$$

diventa

$$f(A) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda_1^k + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda_2^k + ... + C_n \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda_n^k$$

ovvero

$$f(A) = C_1 f(\lambda_1) + C_2 f(\lambda_2) + ...C_n f(\lambda_n)$$

Esempio 7.1. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

riesce $p(t) = t^2 - 5t + 6$*, le radici sono* 3 *e* 2*. Determiniamo* C_1 *e* C_2*:*

$$\begin{cases} I = C_1 + C_2 \\ A = 2C_1 + 3C_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 3I - A \\ C_2 = A - 2I \end{cases}$$

Riesce quindi

$$A^n = (3I - A)2^n - (2I - A)3^n$$

Ne segue, ad esempio, che

$$A^{10} = (3I - A)2^{10} - (2I - A)3^{10}$$

$$e^A = (3I - A)e^2 - (2I - A)e^3$$

$$\sin(A) = (3I - A)\sin(2) - (2I - A)\sin(3)$$