Funzioni analitiche di matrici

Sia
$$f(z) = \frac{1}{z-1} = (z-1)^{-1}$$
é naturale, assegnata la matrice A definire
$$f(A) = (A-I)^{-1}$$
circostanza che richiede che la matrice $A - I$ sia invertibile, ovvero che 1 non sia autovalore di A.
In altri termini la definizione di una funzione razionale $f(z)$ in corrispondenza di una matrice A richiede che i poli della funzione razionale non siano autovalori di A: ovvero richiede che $f(z)$ sia definita (regolarmente) sullo spettro di A.

1. La rappresentazione di Cauchy

Sia $f(z)$ olomorfa in Ω, sia $\mathcal{C}$ una circonferenza tale che il cerchio chiuso da essa delimitato sia contenuto in Ω, allora per ogni z interno a tale cerchio riesce
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta}{\zeta - z} d\,\zeta$$
sia A una matrice i cui autovalori cadano dentro tale cerchio, definiamo
$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\,\zeta$$
Nei paragrafi successivi sono esposte

- alcune giustificazioni della formula proposta,
- alcuni esempi relativi a funzioni $f(z)$ particolarmente semplici.

2. Le identitá del risolvente

Detto $\mathfrak{A}$ l'algebra normata delle matrici $n \times n$ sia $A \in \mathfrak{A}$ indichiamo con
$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$
detto

il risolvente relativo a λ

riesce

$$R: \quad \lambda \in \mathbb{C} \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in \mathfrak{A}$$

Il risolvente é quindi una funzione di una variabile complessa, differenziabile in modo complesso.

Al risolvente é presumibile siano applicabili il teorema di rappresentazione integrale di Cauchy stabilito per le funzioni olomorfe di una variabile complessa.

Indicato per comoditá

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda I - A}$$

si riconosce facilmente che

$$R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_1 I - A} - \frac{1}{\lambda_2 I - A} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A)}$$

ovvero

$$R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = R(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_2)$$

ovvero ancora

$$R(\lambda_1)R(\lambda_2) = \frac{R(\lambda_1) - R(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Da cui deriva che $R(\lambda)$ é differenziabile in modo complesso

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(\lambda + h) - R(\lambda)}{h} = -R(\lambda)^2$$

Il risolvente $R(\lambda)$ é definito in tutto il piano complesso privato degli autovalori di A.

3. Il teorema di Cauchy

Il teorema di Cauchy per le funzioni olomorfe assicura che

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

se $f(z)$ é olomorfa nell'aperto delimitato da Γ
Tale teorema é fondamentale nella formula di rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta}{\zeta - z} d\,\zeta$$

per riconoscere l'indipendenza del secondo membro dalla scelta della curva $\mathcal{C}$ contorno.
L'indipendenza dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\,\zeta$$

dal contorno scelto, si riconosce quindi anche in questo caso avendo riconosciuto che

$$(\zeta I - A)^{-1}$$

é differenziabile in modo complesso.
La scelta quindi di assumere come definizione

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\,\zeta$$

avendo scelto una qualsiasi curva $\mathcal{C}$ che racchiuda al suo interno gli autovalori di A appare plausibile.

4. Il caso dei polinomi

Sia $f(z) = z^n$, la definizione naturale e obbligata di $f(A)$ é naturalmente

$$f(A) = A^n$$

Verifichiamo su questo esempio che l'espressione proposta come integrale di Cauchy

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \zeta^m(\zeta I - A)^{-1} d\,\zeta$$

ri produce l'attesa espressione A^n.

Tenuto conto che

$$(\zeta I - A)^{-1} = \frac{1}{\zeta I - A} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{I - \dfrac{A}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\zeta}\right)^k$$

riesce

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^m(\zeta I - A)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^m \frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\zeta}\right)^k d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^{m-1-k} d\zeta$$

Tenuto presente che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^{m-1-k} d\zeta = \begin{cases} 1 & se \quad k = m \\ 0 & se \quad k \neq m \end{cases}$$

riesce

$$f(A) = A^m$$

come si voleva.

5. Un esempio

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A=M.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.M^{-1}=\begin{pmatrix} 27 & 15 \\ -40 & -22 \end{pmatrix}$$

$$e^A=M\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix} 25e^3-24e^2 & 15\left(e^3-e^2\right) \\ -40\left(e^3-e^2\right) & 25e^2-24e^3 \end{pmatrix}$$

$$R(z)=(zI-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{z+22}{z^2-5z+6} & \dfrac{15}{z^2-5z+6} \\ \\ -\dfrac{40}{z^2-5z+6} & \dfrac{z-27}{z^2-5z+6} \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(zI-A)^{-1}=\frac{1}{(z-3)(z-2)}\begin{pmatrix} z+22 & 15 \\ -40 & z-27 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora l'esponenziale e^A servendosi della rappresentazione di Cauchy

$$e^A=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{e^\zeta}{(\zeta-3)(\zeta-2)}\begin{pmatrix} \zeta+22 & 15 \\ -40 & \zeta-27 \end{pmatrix}d\zeta$$

essendo $\mathcal{C}$ una circonferenza che racchiuda al suo interno i due autovalori 3 e 2 di A.
Il significato da dare all'integrale indicato é, naturalmente, il seguente

$$e^A=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\mathcal{C}}\frac{(\zeta+22)e^\zeta}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta & \displaystyle\int_{\mathcal{C}}\frac{15e^\zeta}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta \\ \\ \displaystyle-\int_{\mathcal{C}}\frac{40e^\zeta}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta & \displaystyle\int_{\mathcal{C}}\frac{(\zeta-27)e^\zeta}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta \end{pmatrix}$$

I quattro integrali che rappresentano i quattro elementi della matrice si calcolano agevolmente con il teorema dei residui relativi ai due unici poli di primo ordine 3 e 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{(\zeta+22)e^{\zeta}}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta &= 25e^3-24e^2\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{15e^{\zeta}}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta &= 15(e^3-e^2)\\
\frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{40e^{\zeta}}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta &= -40(e^3-e^2)\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{(\zeta-27)e^{\zeta}}{(\zeta-3)(\zeta-2)}d\zeta &= -24e^3+25e^2
\end{aligned}
$$

da cui si ottiene l'espressione di e^A in accordo con la precedente.