

Equazione del calore

Una prima informazione sul problema di Cauchy relativo all'equazione del calore in una barra si trova sul sito *Wolfram* all'indirizzo

<http://mathworld.wolfram.com/HeatConductionEquation.html>

Una buona informazione, anche più ampia di quella immediatamente necessaria, si trova su *Wikipedia* all'indirizzo

http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

1. Il problema di Cauchy

Consideriamo nel piano $\{(x, t)\} = \mathbb{R}^2$ la semistriscia

$$\Omega : \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq +\infty\}$$

e consideriamo il problema differenziale nell'incognita $u(x, t)$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

In termini fenomenologici la funzione $u(x, t)$ soluzione rappresenta la temperatura di ogni punto x di una barra simulata dall'intervallo $[0, \pi]$ soggetta alle seguenti condizioni:

- i due estremi $x = 0$ e $x = \pi$ sono mantenuti, forzatamente, a 0^0 gradi,
- la temperatura della barra al tempo $t = 0$ è assegnata e vale, punto per punto, $\varphi(x)$
- la diffusione del calore avviene secondo la dinamica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con k coefficiente positivo assegnato.

Osservazione 1.1. *La dinamica della temperatura $u(x, t)$ indicata dall'equazione differenziale è, giustamente, indicata come*

diffusione.

Infatti la derivata

$$\frac{du}{dt}(x_0, t_0)$$

cioè la variazione di $u(x_0, t_0)$ al passare del tempo è

- *positiva se $u_{xx}(x_0, t_0) > 0$, cioè se in corrispondenza di (x_0, t_0) si ha convessità (verso l'alto),*
- *negativa se $u_{xx}(x_0, t_0) < 0$, cioè se in corrispondenza di (x_0, t_0) si ha concavità (verso il basso).*

In parole povere i punti della barra in cui la temperatura era maggiore tendono al passare del tempo a raffreddarsi, mentre quelli in cui la temperatura era minore tendono a riscaldarsi.

*Comportamenti analoghi, cioè **analogamente diffusivi**, si possono riconoscere in corrispondenza, ad esempio, della concentrazione di un gas nell'aria, ecc.*

Si noti che le condizioni al contorno poste

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

fanno prevedere qualche richiesta di compatibilità:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

La soluzione $u(x, t)$ del problema può essere ragionevolmente cercata tra le funzioni continue in Ω e derivabili, una volta almeno rispetto a t e due volte almeno rispetto ad x , all'interno di Ω .

2. Alcune soluzioni

Cerchiamo soluzioni del problema parziale

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

della forma

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

procediamo cioè

per separazione delle variabili

Affinchè $X(x)T(t)$ soddisfi l'equazione differenziale occorre che

$$X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$$

cioè

$$\frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Essendo il primo membro, funzione di t , uguale ad un secondo membro che non dipende da t , non può che essere costante.

Analogo discorso si fa partendo dal secondo membro, arrivando a concludere che anch'esso non può che essere costante, ovviamente la stessa costante del precedente:

$$\frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Tenuto presente inoltre che

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni $X(x) \neq 0$ se e solo se $\lambda = -n^2$ in corrispondenza ai quali ha le soluzioni

$$X_n(x) = \sin(nx)$$

Si ha quindi, inoltre,

$$T'(t) = -k^2 n^2 T(t) \quad \rightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-k^2 n^2 t}$$

Pertanto il problema (2) ha le (tante) soluzioni

$$u_n(x, t) = C_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx)$$

La linearità del problema fa riconoscere quindi che sono soluzioni del problema (2) anche le somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx)$$

È tra tali somme, ammesso che costituiscano serie convergenti, che si può sperare di trovare una soluzione del problema iniziale (1).

Esempio 2.1. *Supponiamo $k = 1$ e che la distribuzione iniziale della temperatura sia*

$$\varphi(x) = 2 \sin(x) + \frac{1}{10} \sin(3x) + \frac{2}{3} \sin(4x)$$

Prendendo le tre funzioni $C_1 u_1(x, t)$, $C_3 u_3(x, t)$, $C_4 u_4(x, t)$ precedenti con i coefficienti

$$C_1 = 2, \quad C_3 = \frac{1}{10}, \quad C_4 = \frac{2}{3}$$

si ha

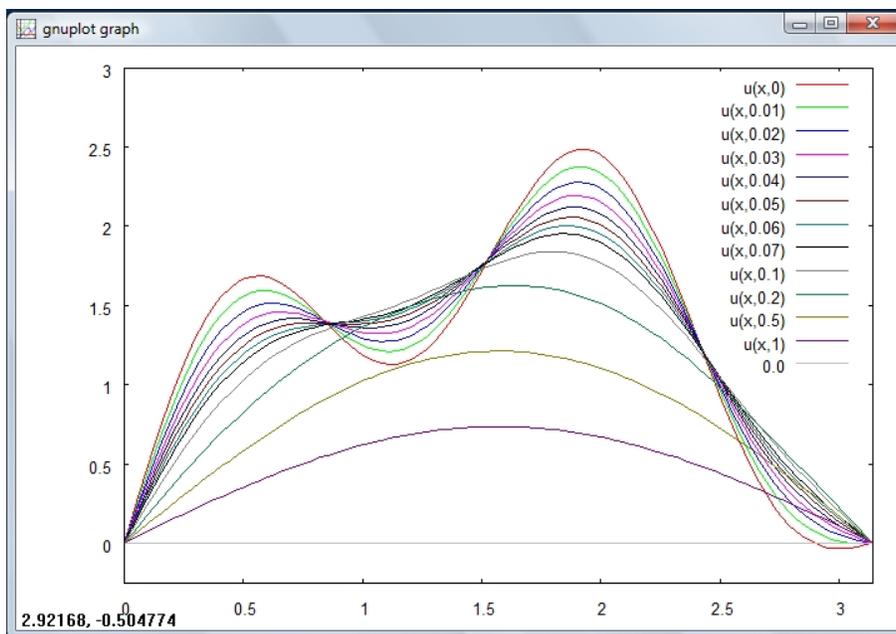


FIGURA 1. $u(x, t)$, $t = 0, 0.01, \dots, 1$

$$u(x, t) = 2 e^{-t} \sin(x) + \frac{1}{10} e^{-9t} \sin(3x) + \frac{2}{3} e^{-16t} \sin(4x)$$

funzione che è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che

- soddisfa l'equazione differenziale,
- $u(0, t) = 0, \quad \forall t$
- $u(\pi, t) = 0, \quad \forall t$
- $u(x, 0) = 2 \sin(x) + \frac{1}{10} \sin(3x) + \frac{2}{3} \sin(4x) = \varphi(x)$

Essa quindi è una soluzione di (1).

È interessante riconoscere, vedi Figura 1, che la temperatura $u(x, t)$ varia più rapidamente in corrispondenza delle ascisse x in cui si registravano inizialmente massimi o minimi, mentre rimane in un primo tempo apparentemente invariata in corrispondenza dei punti di flesso. Che la $u(x, t)$ trovata sia l'unica soluzione di (1) è ancora da valutare...!

La Figura 1 consente un'ulteriore osservazione: i valori della $u(x, t)$ trovati per i vari tempi considerati, $0.01, 0.02, \dots, 0.1$ sono tutti inferiori al valore massimo della $u(x, 0)$: fenomeno ragionevole, in assenza di sorgenti, la temperatura non può che abbassarsi....

3. Il principio di massimo

Teorema 3.1. Sia $u(x, t)$ soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

in $\Omega_T := \{0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T\}$, detto M il massimo di u sulle tre parti di frontiera di Ω_T

$$S := \{(x, 0), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (0, t), (\pi, t) \quad 0 \leq t \leq T\}$$

riesce

$$u(x, t) \leq M \quad \forall (x, t) \in \Omega_T$$

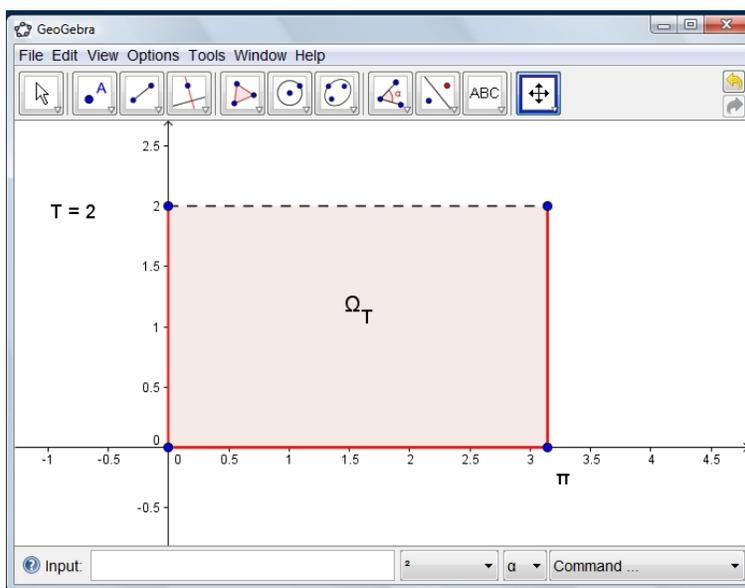


FIGURA 2. L'insieme Ω_T

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che esista un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ e non appartenente ai tre lati S in cui riesca

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

riconosceremo, tramite un opportuno algoritmo di costruzione, che, in tale caso, esiste un punto $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ in cui la funzione $u(x, t)$ non verifica più l'equazione differenziale del calore.

Algoritmo per (x_1, t_1)

Consideriamo la funzione continua in Ω_T

$$v(x, t) = u(x, t) + \gamma(t_0 - t)$$

modificata di u per l'aggiunta di un addendo $\gamma(t_0 - t)$ nullo in $t = t_0$ e piccolo, cioè con $\gamma > 0$ tale che

$$|\gamma(t_0 - t)| \leq \gamma T < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ un punto in cui v raggiunga il suo massimo in Ω_T

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

Tenuto conto che

$$\max_{(x,t) \in S} v(x, t) \leq \max_{(x,t) \in S} u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

il punto $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ non può cadere sul bordo S .

In tale punto di massimo deve, necessariamente, riuscire quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x_1, t_1) = 0, \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{array} \right. \quad \smile \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_t(x_1, t_1) = 0 & \text{se } t_1 < T \\ v_t(x_1, t_1) \geq 0 & \text{se } t_1 = T \end{array} \right.$$

da cui discende, necessariamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \gamma \geq \gamma > 0 \\ u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \end{array} \right.$$

In tale punto $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ si avrebbe

$$u_t(x_1, t_1) > 0 \quad e \quad u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

contrariamente al fatto che u verifica invece l'equazione che implica che

$$u_t \quad e \quad u_{xx}$$

hanno lo stesso segno !

L'assurdo discende dall'aver ammesso l'esistenza di un punto (x_0, t_0) in cui riuscisse $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

□

4. Conseguenze del principio di massimo

Teorema 4.1. *Sia $u \in C^0(\Omega_T)$ soluzione del problema di Cauchy*

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \mu_1(t) & 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) & 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

detti

$$m = \min\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\}, \quad M = \max\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\},$$

riesce

$$\forall (x, t) \in \Omega_T : \quad m \leq u(x, t) \leq M$$

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza

$$u(x, t) \leq M$$

è esattamente il principio di massimo 3.1.

La disuguaglianza con il minimo deriva ancora dal fatto, ben noto, che

$$\min u = -\max(-u)$$

e che la funzione $-u$ verifica ancora l'equazione del calore con dati sul bordo naturalmente cambiati di segno.

Ne segue pertanto

$$\max_{\Omega_T}(-u) \leq \max_S\{-\mu_1(t), -\mu_2(t), -\varphi(x)\}$$

ovvero

$$-\min_{\Omega_T}(u) \leq -\min_S\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\}$$

ovvero quindi

$$\min_{\Omega_T}(u) \geq \min_S\{\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)\}$$

□

4.1. Il teorema di unicità.

Teorema 4.2. *Il problema (3) ha unicità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1 e u_2 due soluzioni dello stesso problema (3): indicata con

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

la loro differenza, essa verifica il problema omogeneo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = 0 & 0 < t < T \\ u(\pi, t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Quindi massimo e minimo sul bordo S sono nulli e quindi per il precedente Teorema 4.1 riesce

$$0 \leq v(x, t) \leq 0 \quad \rightarrow \quad v = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = u_2$$

□

4.2. La monotonia.

Proposizione 4.3. *Siano u e rispettivamente v le soluzioni dei due problemi*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \mu_1(t) & 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) & 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ v(0, t) = \nu_1(t) & 0 < t < T \\ v(\pi, t) = \nu_2(t) & 0 < t < T \\ v(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Se

$$\mu_1 \leq \nu_1, \quad \mu_2 \leq \nu_2, \quad \varphi(x) \leq \psi(x)$$

allora riesce, di conseguenza

$$u(x, t) \leq v(x, t)$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che la funzione differenza

$$v(x, t) - u(x, t)$$

verifica un problema del calore con dati sul bordo S non negativi e quindi

$$0 \leq v(x, t) - u(x, t) \quad \rightarrow \quad u(x, t) \leq v(x, t)$$

□

4.3. Dipendenza continua.

Proposizione 4.4. *Siano u e v le soluzioni dei due problemi del calore seguenti*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \mu_1(t) \quad 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega_T \\ v(0, t) = \nu_1(t) \quad 0 < t < T \\ v(\pi, t) = \nu_2(t) \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

Riesce

$$\max_{(x,t) \in \Omega_T} |u(x, t) - v(x, t)| \leq \max |\mu_1(t) - \nu_1(t)| + \max |\mu_2(t) - \nu_2(t)| + \max |\varphi(x) - \psi(x)|$$

DIMOSTRAZIONE. Posto

$$m = \min\{\mu_1(t) - \nu_1(t)\} + \min\{\mu_2(t) - \nu_2(t)\} + \min\{\varphi(x) - \psi(x)\}$$

$$M = \max\{\mu_1(t) - \nu_1(t)\} + \max\{\mu_2(t) - \nu_2(t)\} + \max\{\varphi(x) - \psi(x)\}$$

dal teorema 4.1 si ricava che

$$m \leq u(x, t) - v(x, t) \leq M \quad \rightarrow \quad |u(x, t) - v(x, t)| \leq \max\{|m|, |M|\}$$

Tenuto conto che

$$|m| \leq \max\{|\mu_1(t) - \nu_1(t)|\} + \max\{|\mu_2(t) - \nu_2(t)|\} + \max\{|\varphi(x) - \psi(x)|\}$$

$$|M| \leq \max\{|\mu_1(t) - \nu_1(t)|\} + \max\{|\mu_2(t) - \nu_2(t)|\} + \max\{|\varphi(x) - \psi(x)|\}$$

segue

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \max\{|\mu_1(t) - \nu_1(t)|\} + \max\{|\mu_2(t) - \nu_2(t)|\} + \max\{|\varphi(x) - \psi(x)|\}$$

□

Osservazione 4.5. *Il precedente risultato esprime la dipendenza continua della soluzione dai dati sul bordo: se*

$$\mu_1(t) \approx \nu_1(t), \mu_2(t) \approx \nu_2(t), \varphi(x) \approx \psi(x)$$

allora, di conseguenza

$$u(x, t) \approx v(x, t)$$

5. Una stima $L^2(0, \pi)$

Consideriamo la soluzione del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

Moltiplicando membro a membro l'equazione differenziale per la $u(x, t)$ stessa, si ha

$$u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, t)$$

ovvero

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, t)$$

integrando su $[0, \pi]$ si ha quindi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u^2(x, t) dx = k^2 \int_0^\pi u_{xx}(x, t) u(x, t) dx$$

e, integrando per parti a secondo membro si ha, tenuto conto che $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u^2(x, t) dx = -k^2 \int_0^\pi u_x^2(x, t) dx$$

Il segno negativo a secondo membro implica

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u^2(x, t) dx \leq 0$$

e quindi

$$t_1 > t_2 \quad \rightarrow \quad \int_0^\pi u^2(x, t_2) dx \leq \int_0^\pi u^2(x, t_1) dx$$

In particolare

$$\forall t \geq 0 \quad \int_0^\pi u^2(x, t) dx \leq \int_0^\pi \varphi^2(x) dx$$

disuguaglianza che, in termini di norma L^2 , posto

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^\pi u^2(x, t) dx$$

significa che le norme $\|u(t)\|$ delle soluzioni del problema (1), pagina 1, sono decrescenti.

6. Il problema non omogeneo

Consideriamo il problema

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

che, in termini fenomenologici, include la possibilità che la barra di cui studiamo l'evoluzione della temperatura riceva calore da sorgenti $f(x, t)$ diverse nello spazio, dipendenza da x e variabili nel tempo, dipendenza da t .

Il metodo di separazione delle variabili funziona particolarmente bene nel momento in cui sia la sorgente di calore $f(x, t)$ sia il dato iniziale $\varphi(x)$ siano espressi in *serie di Fourier* delle sole funzioni $X_n(x) = \sin(nx)$

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) X_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n X_n(x)$$

cosa che può sempre ottenersi pensando allo sviluppo delle funzioni f^* e φ^* ottenuto prolungando f e φ in modo dispari.

Le nuove soluzioni $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ si trovano con lo stesso procedimento considerato nel caso omogeneo a pagina 2,

$$\sum T_n' X_n = k^2 \sum T_n X_n'' + \sum F_n X_n \quad \rightarrow \quad \forall n \quad T_n'(t) - k^2 n^2 T_n(t) = F_n(t)$$

da cui segue

$$T_n(t) = C_n e^{-k^2 n^2 t} + e^{-k^2 n^2 t} \int_0^t e^{k^2 n^2 s} F_n(s) ds$$

Le soluzioni $u(x, t)$ che si ricavano per l'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t)$$

sono pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-k^2 n^2 t} \int_0^t e^{k^2 n^2 s} F_n(s) ds \sin(nx)$$

La condizione iniziale $u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \sin(nx)$ si soddisfa scegliendo i coefficienti $C_n = \Phi_n$ uguali ai coefficienti di Fourier del dato iniziale $\varphi(x)$.

Quindi la soluzione del problema (4) non omogeneo assegnato è

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n e^{-k^2 n^2 t} \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-k^2 n^2 t} \int_0^t e^{k^2 n^2 s} F_n(s) ds \sin(nx)$$

Si osservi come la prima delle due serie a secondo membro rappresenti un contributo rapidamente infinitesimo al passare del tempo: diverso è il peso della seconda serie.

Esercizio 6.1. Consideriamo il problema (4) con

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ f(x, t) &= 10 \sin(t) \sin(x), \\ \varphi(x) &= 10 \sin(x) + 5 \sin(3x) + 15 \sin(5x) \end{aligned}$$

In base alla formula risolutiva osservata la soluzione è, vedi Figura 3

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 10e^{-t} \sin(x) + 5e^{-9t} \sin(3x) + 15e^{-25t} \sin(5x) + \\ &+ 5(e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)) \sin(x) \end{aligned}$$

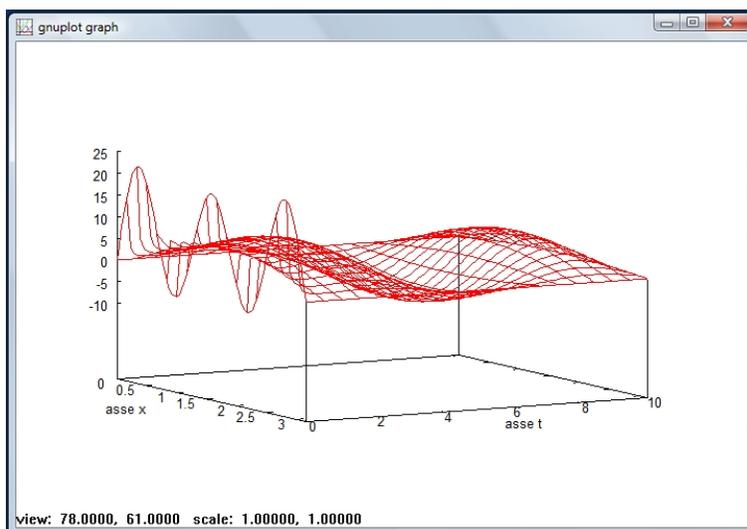


FIGURA 3. $u(x, t) = \dots$

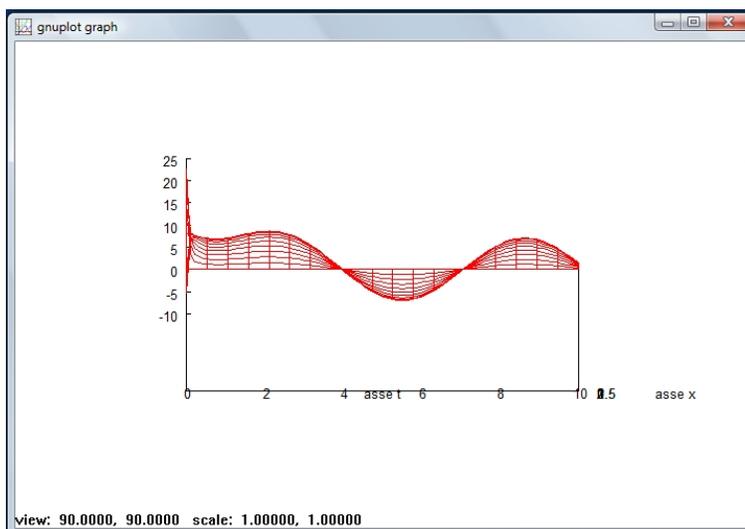
I valori delle temperature iniziali vengono assai rapidamente dimenticati....

si noti, vedi seconda Figura 4, come ben presto il profilo della u al variare del tempo somiglia a quello della $f(x, t) = 10 \sin(t) \sin(x)$, una sinusoidale:

c'è solo una piccola sorpresa, guardando bene non si vede un profilo $\sin(t)$ ma si vede il profilo di

$$\sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

si osserva cioè.... il ritardo!

FIGURA 4. $u(x, t) = \dots$

6.1. Il caso totalmente non omogeneo.

Il problema totalmente non omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(\pi, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$

si riduce a quello precedente introducendo la funzione

$$w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\pi} (\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

e cercando quindi la soluzione v del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0, t) = 0 \\ v(\pi, t) = 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x, t) + f(x, t) - w_t(x, t) \in \Omega_T \\ 0 < t < T \\ 0 < t < T \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$

È facile riconoscere che

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

è soluzione del problema totalmente non omogeneo assegnato.

Esempio 6.2. Consideriamo il problema (non molto generale ma trattabile)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{100} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(t) & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \sin(t) & 0 < t < T \\ u(\pi, t) = \sin(t) & 0 < t < T \\ u(x, 0) = \sin(6x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Indicata con

$$w(x, t) = \sin(t)$$

cerchiamo la soluzione del problema nella forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

essendo $v(x, t)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{100} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (x, t) \in \Omega_T \\ v(0, t) = 0 & 0 < t < T \\ v(\pi, t) = 0 & 0 < t < T \\ v(x, 0) = \sin(6x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

da cui

$$v(x, t) = e^{-36/100t} \sin(6x)$$

e, quindi, vedi Figura 5,

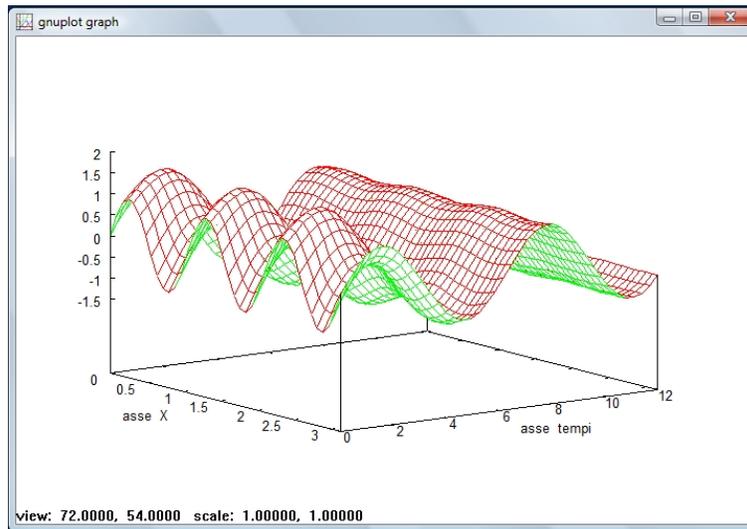
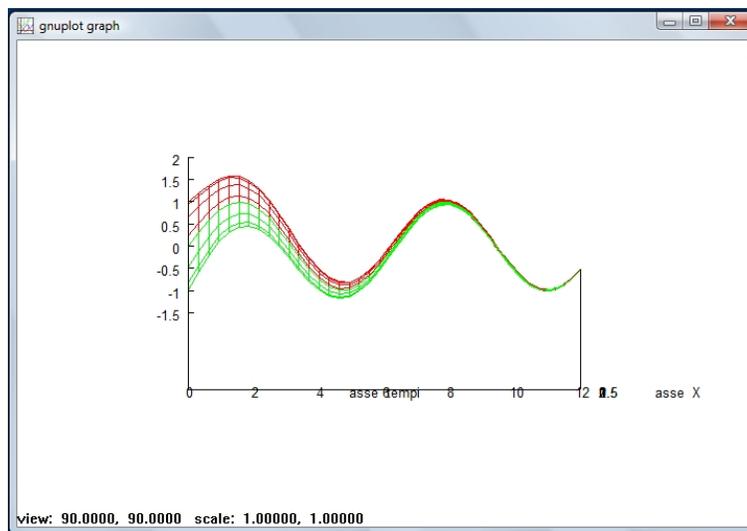
$$u(x, t) = e^{-36/100t} \sin(6x) + \sin(t)$$

Anche qui, seguendo la forma della soluzione lungo la scala dei tempi, vedi Figura 6, si assiste allo smorzarsi dell'influenza del dato iniziale...

7. Mathematica

Il sito <http://demonstrations.wolfram.com> offre numerose simulazioni collegate alla diffusione del calore. L'utilizzo e/o la manipolazione di tali prodotti dipendono dalla disponibilità dei software collegati

- per la sola lettura basta il *MathPlayer* che si scarica liberamente dall'indirizzo <http://www.wolfram.com/products/player/download.cgi>
- per la manipolazione occorre *Mathematica 7*, software a pagamento (elevato): nella rete 151.100 è comunque disponibile *Mathematica 5*, pressochè analogo al 7.
- all'indirizzo

FIGURA 5. $u(x,t) = \dots$ FIGURA 6. $u(x,t) = \dots$

[http://demonstrations.wolfram.com/
CoolingOfARodWithInitialTemperatureDistribution/](http://demonstrations.wolfram.com/CoolingOfARodWithInitialTemperatureDistribution/)

si trova la simulazione della soluzione del problema omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

- all'indirizzo

[http://demonstrations.wolfram.com/
MixedBoundaryValueProblemForTheOneDimensionalHeatEquation/](http://demonstrations.wolfram.com/MixedBoundaryValueProblemForTheOneDimensionalHeatEquation/)

si trova la simulazione, analoga del problema con $x \in [0, 1]$.