

Equazione della corda vibrante

Sia S una corda elastica collocata, in posizione di riposo lungo il segmento $(0, 0) - (\ell, 0)$, con gli estremi fissati a tali punti: lo spostamento verticale ¹ $u(x, t)$ che i punti della corda subiscono in conseguenza di una forza esterna $F(x, t)$ soddisfa il seguente problema, detto *problema della corda vibrante*,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(\ell, t) = 0 \end{cases}$$

nel quale $f(x)$ e $g(x)$ rappresentano le *condizioni iniziali*.

1. Un metodo generale

Soluzioni dell'equazione omogenea

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

come pure di molte altre equazioni, si possono cercare nella forma

$$u(x, t) = T(t) X(x)$$

di prodotto di una funzione $T(t)$ della sola t per una $X(x)$ della sola x . La linearità dell'equazione consente poi di riconoscere che se

$$T_i(t) X_i(x) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

sono una successione di tali soluzioni allora anche la serie, supposta convergente,

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i T_i(t) X_i(x)$$

è soluzione dell'equazione.

¹Pensando di riferirci alla approssimazione lineare di piccoli spostamenti

La determinazione delle $T(t)$ e $X(x)$ conduce, sostituendo, all'espressione

$$T''(t) X(x) - c^2 T(t) X''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

e quindi, tenuto conto che primo e secondo membro dipendono da variabili diverse, l'unica possibilità che coincidano é che valgano entrambi la stessa costante λ

$$\begin{aligned} T''(t) - \lambda c^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \end{aligned}$$

Le condizioni al bordo

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \rightarrow \quad X(0) = X(\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad -\lambda = n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Le funzioni $X_n(x)$ trovate sono le autofunzioni del problema

$$\begin{cases} v''(x) + \mu v(x) = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

Incontreremo l'uso di tali autofunzioni in numerosi altri problemi analoghi: la difficoltà con cui determinare tali autofunzioni cresce in genere al crescere della dimensione dello spazio. Il caso unidimensionale precedente é banale, i casi bidimensionali (da $[0, \pi] \subset \mathbb{R}^1$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) lo sono molto meno anche tenuto conto della enorme varietà delle frontiere $\partial\Omega$, ecc.

Le coppie $T_n(t)$ e $X_n(x)$ sono pertanto

$$T_n(t) = a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct), \quad X_n(x) = \sin(nx)$$

Le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)) \sin(nx)$$

forniscono pertanto soluzioni dell'equazione delle onde unidimensionale (1): giocando con le varie scelte dei coefficienti a_n e b_n si può sperare di soddisfare anche le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

2. Unicità per il problema della corda vibrante

Dimostrare un risultato di unicità per un problema lineare

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(\ell, t) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t) \\ v(x, 0) = f(x) \\ v_t(x, 0) = g(x) \\ v(0, t) = 0 \\ v(\ell, t) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \rightarrow u \equiv v$$

equivale a dimostrare che lo stesso problema con dati nulli

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(\ell, t) = 0 \end{array} \right.$$

possiede solo la soluzione nulla.

Sia $u(x, t) \in C^2([0, \ell] \times [0, +\infty))$ soluzione del problema con dati nulli: consideriamo, per ogni $t \geq 0$ l'integrale

$$E(t) = \int_0^\ell (u_t^2(s, t) + c^2 u_x^2(s, t)) ds$$

tenuto conto che $u(x, 0) = 0 \rightarrow u_x(x, 0) = 0$ e che $u_t(x, 0) = 0$, riesce

$$E(0) = \int_0^\ell (u_t^2(s, 0) + c^2 u_x^2(s, 0)) ds = 0$$

Calcoliamo $E'(t)$

$$E'(t) = 2 \int_0^\ell (u_t(s, t) u_{tt}(s, t) + c^2 u_x(s, t) u_{xt}(s, t)) ds$$

Per quanto riguarda il secondo addendo sotto il segno di integrale, un'integrazione per parti produce

$$\int_0^\ell u_x(s, t) u_{xt}(s, t) ds = u_x(s, t) u_t(s, t) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_{xx}(s, t) u_t(s, t) ds$$

da cui tenuto conto che

$$u(0, t) = 0 \rightarrow u_t(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0 \rightarrow u_t(\ell, t) = 0$$

implica che il primo addendo

$$u_x(s, t) u_t(s, t) \Big|_0^\ell = u_x(0, t) u_t(0, t) - u_x(\ell, t) u_t(\ell, t) = 0$$

é nullo, riesce

$$\int_0^\ell u_x(s, t) u_{xt}(s, t) ds = - \int_0^\ell u_{xx}(s, t) u_t(s, t) ds$$

Ne segue pertanto

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \int_0^\ell (u_t(s, t) u_{tt}(s, t) + c^2 u_x(s, t) u_{xt}(s, t)) ds = \\ &= 2 \int_0^\ell (u_{tt}(s, t) - c^2 u_{xx}(s, t)) u_t(s, t) ds \end{aligned}$$

Si ha pertanto, essendo $u_{tt}(s, t) - c^2 u_{xx}(s, t) = 0 \rightarrow E'(t) = 0$

$$E(t) = \text{costante} \rightarrow E(t) = 0 \rightarrow u_t^2(s, t) + c^2 u_x^2(s, t) = 0$$

da cui, naturalmente $u_t = u_x = 0$ e quindi

$$\rightarrow u(x, t) = \text{costante} \rightarrow u(x, t) \equiv 0$$

3. Il caso omogeneo

Cerchiamo, in modo artigianale funzioni $u(x, t)$ che soddisfino l'equazione omogenea

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

prescindendo da condizioni al bordo.

Consideriamo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} \xi = x + ct, \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

La dipendenza di una u soluzione dell'equazione omogenea dalle due nuove variabili ξ e η é particolarmente semplice.

La regola di derivazione delle funzioni composte produce infatti, tenuto conto delle espressioni del cambio di variabili proposto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] \end{array} \right.$$

Ne segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

da cui segue, se lavoriamo in un rettangolo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = g(\xi) \quad \rightarrow \quad u(\xi, \eta) = u(\xi, \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} g(s) ds$$

ovvero

$$u = p(\xi) + q(\eta) \quad \rightarrow \quad u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct)$$

I valori $p(x + ct)$ e $q(x - ct)$ rimangono gli stessi rispettivamente su tutti i punti delle rette delle due famiglie, dette rette caratteristiche,

$$x + ct = h, \quad x - ct = k$$

Consideriamo quindi i quattro vertici A, B, C, D del parallelogramma determinato intersecando due rette (blu e verde) della prima famiglia con due rette (rossa e gialla) della seconda, vedi Figura 1

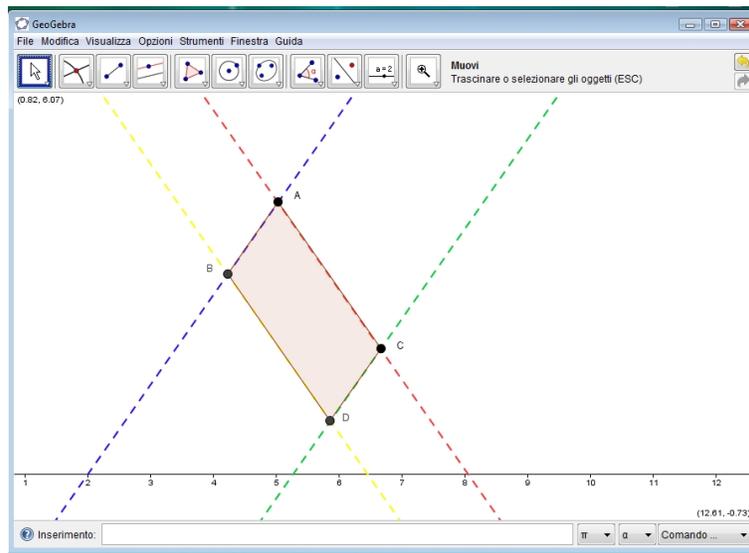


FIGURA 1. Un fenomeno su parallelogrammi caratteristici.

Riesce

$$\begin{aligned} u(A) &= p(\text{rossa}) + q(\text{blu}) \\ u(B) &= p(\text{gialla}) + q(\text{blu}) \\ u(C) &= p(\text{rossa}) + q(\text{verde}) \\ u(D) &= p(\text{gialla}) + q(\text{verde}) \end{aligned}$$

da cui si ricava il fenomeno

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$$

che rappresenta un interessante comportamento geometrico delle soluzioni u dell'equazione omogenea (2).

3.1. Un contreesempio. L'implicazione

$$U_{\xi\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

non funziona se riferita a campi non convessi.

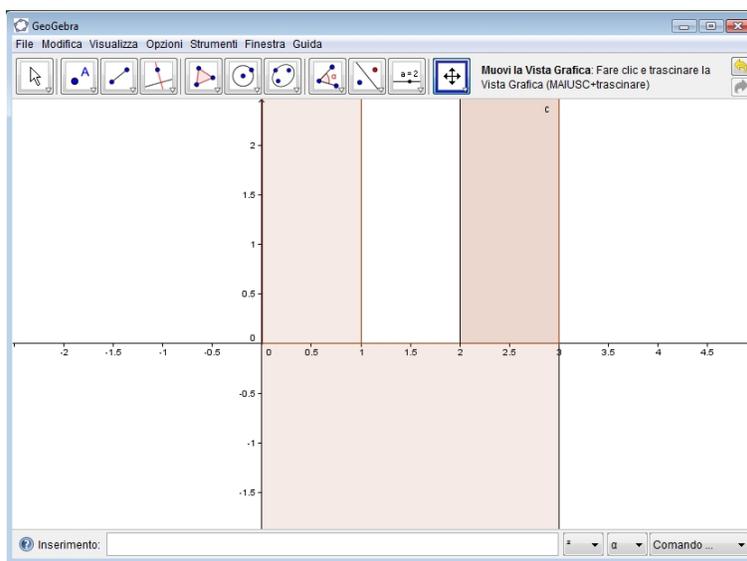


FIGURA 2. Un insieme Ω non convesso.

Si consideri infatti l'insieme Ω di Figura 2 e la funzione $U(\xi, \eta)$

$$U(\xi, \eta) = \begin{cases} \eta^4 & 0 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 0 \\ 0 & 0 \leq \xi \leq 3, \eta \leq 0 \\ \eta^3 & 2 \leq \xi \leq 3, \eta \geq 0 \end{cases}$$

La $U(\xi, \eta)$ così definita non é somma di $f(\xi) + g(\eta)$: se infatti lo fosse dovrebbe riuscire:

$$\begin{cases} U(1/2, \eta) = f(1/2) + g(\eta) \\ U(5/2, \eta) = f(5/2) + g(\eta) \end{cases} \quad \rightarrow \quad U(5/2, \eta) - U(1/2, \eta) = k$$

cosa che non accade poiché sopra a $\xi = 1/2$ la U coincide con η^4 mentre sopra a $\xi = 5/2$ coincide con η^3 .

4. Il significato di funzioni $p(x + ct)$, $q(x - ct)$

Le figure seguenti illustrano tre funzioni del tipo introdotto precedentemente: é stato scelto per semplicitá $c = 1$ e il grafico si riferisce a $x \in [-13, 13]$, $t \in [0, 10]$.

La piccola onda considerata é la funzione

$$p(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

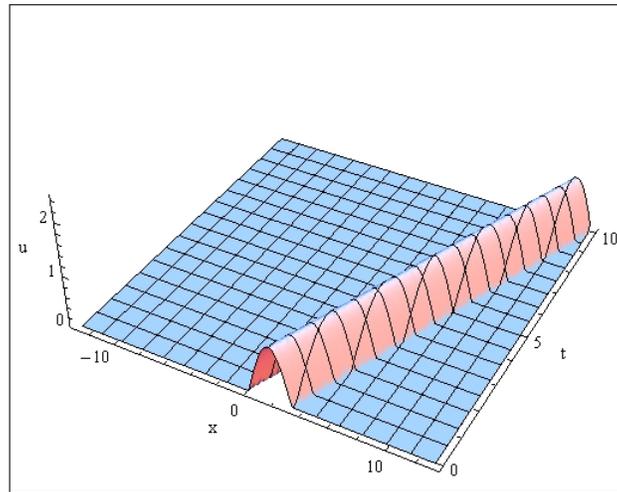


FIGURA 3. $p(x - t)$

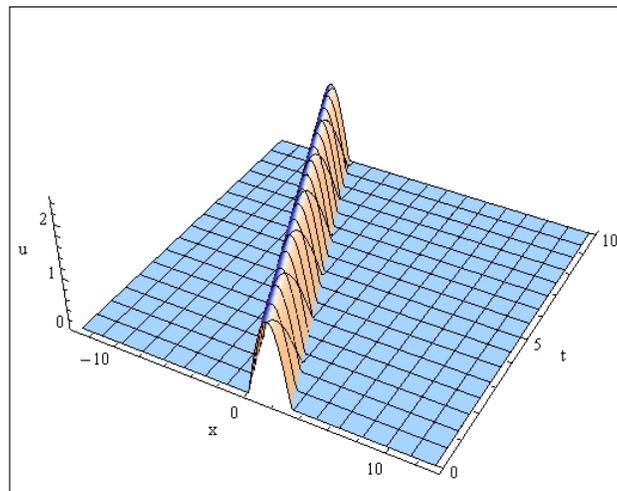
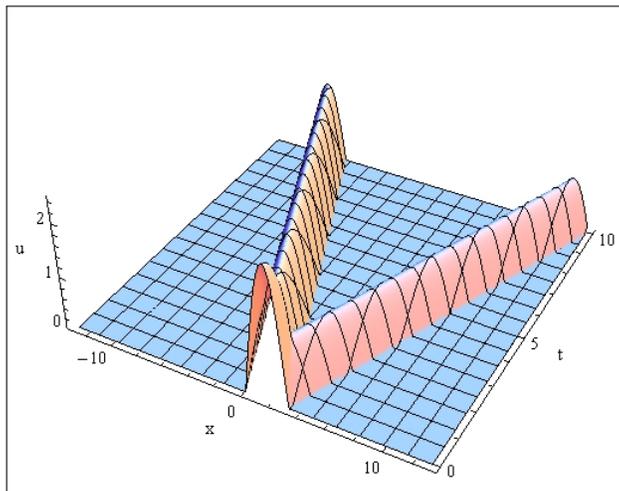


FIGURA 4. $1.5p(x + t)$

La prima, Figura 3, mostra un'onda che avanza, la seconda, Figura 4, mostra un'onda che retrocede, la terza, Figura 5, mostra la composizione, somma, delle due.

FIGURA 5. $p(x - t) + 1.5 p(x + t)$

5. La costruzione di p e q

Occupiamoci del problema omogeneo, $F(x, t) = 0$, prescindendo da condizioni al bordo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

cercando la soluzione nella forma $u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct)$.

Le condizioni iniziali assegnate implicano che

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases}$$

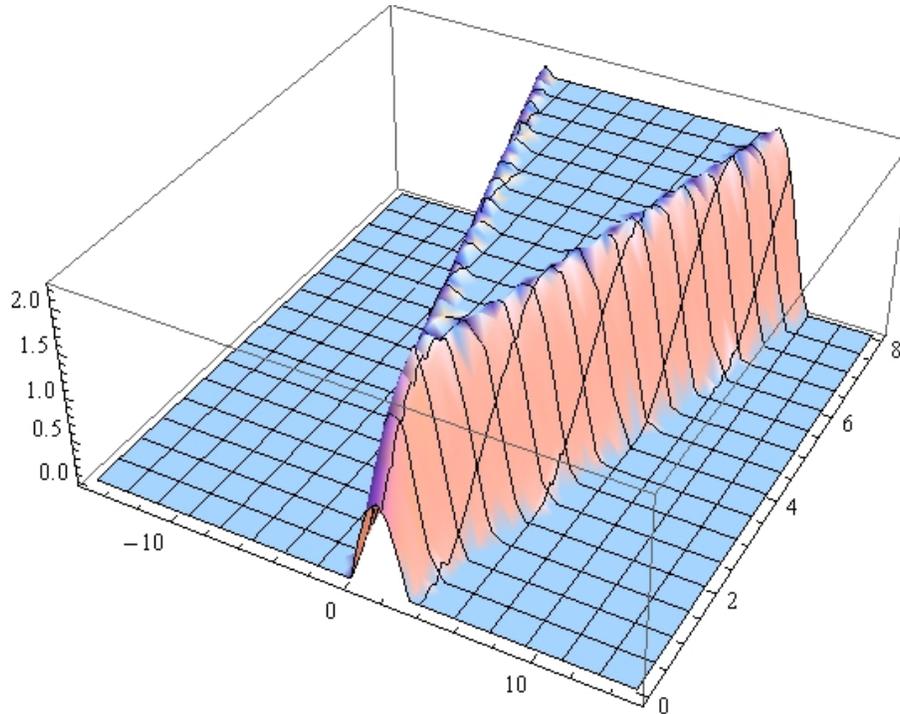
Derivando anche la prima si perviene al sistema

$$\begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{1}{c}g(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} p'(x) = \frac{1}{2}f'(x) \\ q'(x) = -\frac{1}{2c}g(x) \end{cases}$$

da cui,

$$(3) \quad \begin{cases} p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \\ q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \end{cases}$$

Ne segue l'espressione esplicita (a meno dell'integrazione) della $u(x, t)$

FIGURA 6. $u(x, t) : x \in [-15, 15], t \in [0, 8]$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x + ct) + f(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

funzione che verifica l'equazione omogenea delle onde e verifica le due condizioni iniziali

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x)$$

Esempio 5.1. *Ad esempio scelto*

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

la soluzione appare come in Figura 6.

L'espressione della $u(x, t)$ trovata permette di riconoscere per ogni $(x, t) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ la stima

$$|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$$

che prova la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali in ogni striscia $0 \leq t \leq T$.

5.1. Una notazione classica. Posto

$$\overline{M}v\{x, ct\} = \frac{1}{2ct} \int_{x-ct}^{x+ct} v(y)dy$$

media della v sull'intervallo $[x - ct, x + ct]$, intervallo di lunghezza $2ct$, la formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x + ct) + f(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

puó scriversi come

$$u(x, t) = t\overline{M}g\{x, ct\} + \frac{\partial}{\partial t} (t\overline{M}f\{x, ct\})$$

6. Dipendenza dai dati iniziali

La precedente formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x + ct) + f(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

per la soluzione del problema con dati iniziali $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, prescindendo da condizioni al bordo, permette di riconoscere come il valore $u(x_0, t_0)$ dipenda da

$$\begin{cases} f(x_0 - ct_0) \\ f(x_0 + ct_0) \\ g(s) : \forall s \in [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \end{cases}$$

I valori iniziali, sia di f che di g relativi a punti x esterni al segmento base del triangolino colorato in Figura 7 non intervengono nel valore della soluzione nel punto vertice del triangolino colorato.

Il fenomeno é interpretabile con la

velocitá di propagazione

quanto accade inizialmente in un punto x_0 non arriva nel punto x_1 che dopo un intervallo di tempo

$$\Delta t \geq \frac{1}{c} |x_1 - x_0|$$

7. Il problema in una semiretta

Cominciamo a occuparci di qualche condizione al bordo.

Supponiamo di considerare il problema nella semiretta $x \geq 0$: la funzione u precedentemente costruita

$$(4) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x + ct) + f(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

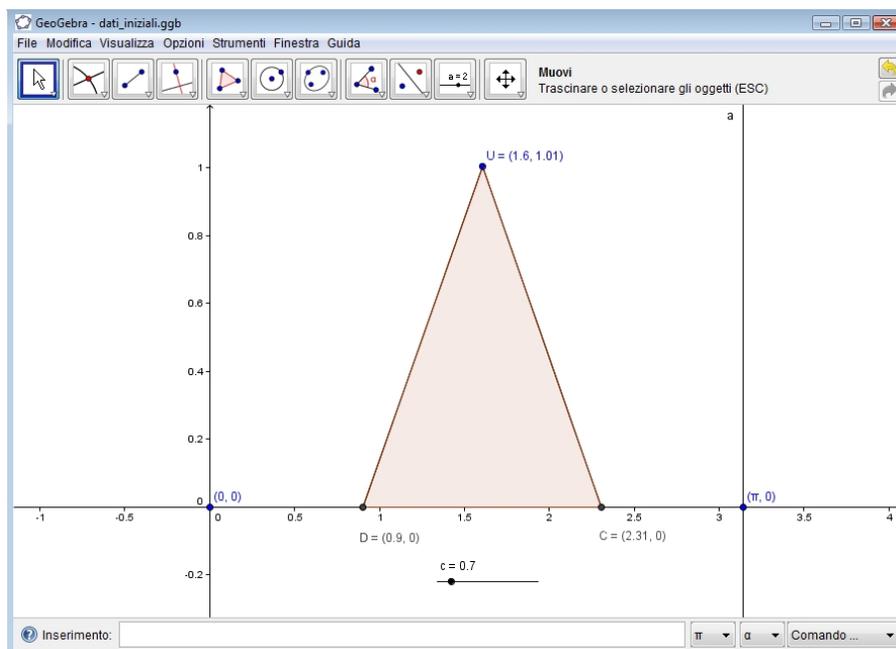


FIGURA 7. La dipendenza dai dati iniziali

soddisfa

- l'equazione differenziale omogenea,
- la prima condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$
- la seconda condizione iniziale $u_t(x, 0) = g(x)$

pensando, naturalmente f e g definite in tutto \mathbb{R} .

Supponiamo ora di cercare soluzioni:

- definite per $x \geq 0$,
- che soddisfino la condizione al bordo $u(0, t) = 0, \forall t \geq 0$.

| | | |
|---------------|----------------------|---|
| $u(0, t) = 0$ | $p(ct) + q(-ct) = 0$ | $\frac{1}{2} (f(ct) + f(-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(s) ds = 0$ |
|---------------|----------------------|---|

La condizione

$$\frac{1}{2} (f(ct) + f(-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(s) ds = 0$$

è soddisfatta se f e g sono funzioni dispari:

$$f(-s) = -f(s), \quad g(-s) = -g(s)$$

Se i dati iniziali $f(x)$ e $g(x)$ sono assegnati, come ragionevolmente dovrebbe essere trattandosi di un problema relativo alla semiretta $x \geq$

0, solo per $x \geq 0$ allora basterá prolungarli a sinistra dell'origine in modo dispari perché la funzione (4) soddisfi anche la condizione al bordo $u(0, t) = 0$.

8. Il problema in un intervallo

Supponiamo ora di cercare soluzioni che verifichino oltre alla $u(0, t) = 0$ anche l'altra condizione

$$u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Per soddisfare tali condizioni al bordo occorre che i dati f e g verifichino altre relazioni:

- le f e g inizialmente assegnate in $[0, \ell]$ si prolunghino in $[-\ell, 0]$ in modo dispari,
- successivamente si prolungano dopo ℓ e prima di $-\ell$ in modo periodico.

Tale prolungamento produce funzioni $f(s)$ e $g(s)$ che riescono dispari intorno a $s = \ell$ e quindi rendono

$$\begin{cases} f(\ell + ct) + f(\ell - ct) = 0 \\ \int_{\ell-ct}^{\ell+ct} g(s)ds = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad u(\ell, t) = 0$$

8.1. I prolungamenti con Mathematica. Sia $f(x)$ la funzione assegnata il $[0, \ell]$

- Prolunghiamo f , come $fd(x)$ in modo dispari in $[\ell, 2\ell]$
 $fd[x_] := If[x <= \ell, f[x], -f[2 \ell - x]]$
- prolunghiamo $fd(x)$ in modo periodico come $fdp(x)$
 $fdp[x_] := fd[Mod[x, 2 \ell]]$

Le funzioni prolungate $fdp(x)$ e $gdp(x)$ frutto di un prolungamento analogo a quello di fdp , determinano una $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{fdp(x + ct) + fdp(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} gdp(s)ds$$

che verifica le condizioni al contorno $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

8.2. La costruzione grafica. Una costruzione semidiretta delle p e q tali da soddisfare le condizioni al bordo puó ottenersi prolungando prima, opportunamente, i due dati f e g

- (1) si prolungano f e g in modo dispari in $[-\ell, 0]$
- (2) si prolungano f e g in modo dispari a destra di ℓ in tutto $[\ell, 3\ell]$
- (3) si si prolungano f e g in modo dispari in $[-3\ell, -\ell]$
- (4) si prolungano f e g in modo dispari a destra di 3ℓ in tutto $[3\ell, 5\ell]$
- (5) ecc. ecc.

9. La separazione delle variabili

Riprendiamo il procedimento inizialmente accennato, vedi pagina 1, relativamente all'intervallo $[0, \pi]$ per trattare in modo (quasi) soddisfacente il problema generale con condizioni nulle al bordo nell'intervallo $[0, \ell]$.

Cerchiamo soluzioni dell'equazione omogenea $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ della forma

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

che conducono, nel caso dell'intervallo $[0, \ell]$ a

$$X(x)T(t) = \left\{ A_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + B_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto serie (convergenti) della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + B_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

scegliendo i coefficienti A_n e B_n in modo da soddisfare le condizioni iniziali

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = g(x)$$

9.1. Il caso non omogeneo. Si tratta in modo quasi identico supponendo di poter rappresentare il termine $F(x, t)$ con una serie trigonometrica

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Le funzioni $T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ soddisfano l'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

se, per ogni n si ha

$$T_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

se

$$T_n''(t) + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} T_n(t) = f_n(t)$$

La determinazione dei coefficienti $T_n(t)$ é solo un po' piú complessa di quanto accadeva nel caso omogeneo.

10. Problema generale ai limiti

Il problema

$$(5) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u = F \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(\ell, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

si traduce in un problema con dati al contorno nulli previa la sottrazione della

$$u^*(x, t) = \frac{1}{\ell} \{x \mu_1(t) + (\ell - x) \mu_2(t)\}$$

Sia infatti $u(x, t)$ soluzione di (5) allora $v(x, t) = u(x, t) - u^*(x, t)$ é soluzione del problema

$$(6) \quad \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = F^* \\ v(x, 0) = f^*(x) \\ v_t(x, 0) = g^*(x) \\ v(0, t) = 0 \\ v(\ell, t) = 0 \end{cases}$$

essendo

$$\left\{ \begin{array}{l} F^*(x, t) = F(x, t) - \frac{c^2}{\ell} \{x \mu_1''(t) + (\ell - x) \mu_2''(t)\} \\ f^*(x) = f(x) - \frac{1}{\ell} \{x \mu_1(0) + (\ell - x) \mu_2(0)\} \\ g^*(x) = g(x) - \frac{1}{\ell} \{x \mu_1'(0) + (\ell - x) \mu_2'(0)\} \end{array} \right.$$

Viceversa se v é soluzione del problema (6) allora

$$u(x, t) = v(x, t) + u^*(x, t)$$

é soluzione del problema (5).

Bibliografia

- [1] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*. Edizioni MIR, 1981.
- [2] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*.
- [3] H.F. Weinberger, *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*. Blaisdell, 1965.