

Equazione delle onde

1. Soluzioni artigianali

L'equazione alle derivate parziali

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$

indicata anche con il simbolo $\square u = 0$, si chiama equazione delle onde o equazione di D'Alembert: essa é un'equazione lineare del secondo ordine di tipo iperbolico.

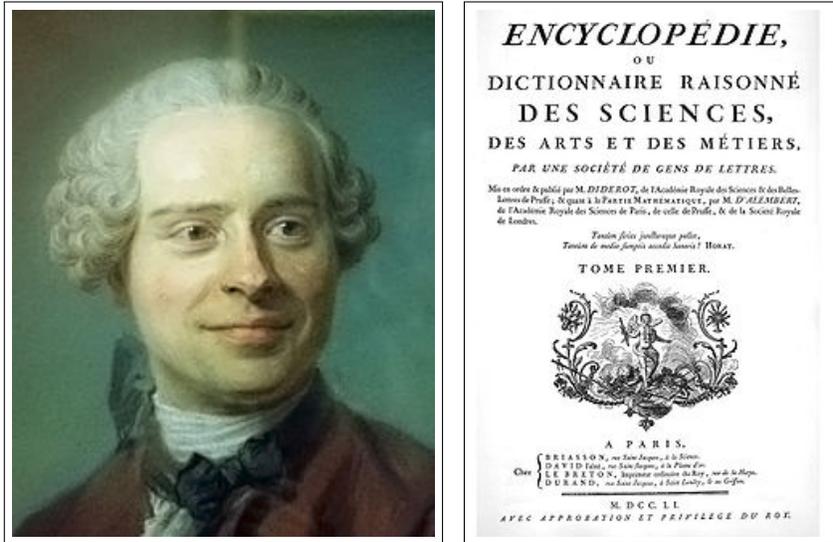


FIGURA 1. Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, (1751-1772)

Come nel caso unidimensionale anche nei casi bidimensionale, tridimensionale o di dimensioni superiori si possono costruire soluzioni dell'equazione di D'Alembert o delle onde partendo da funzioni di una variabile.

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

- **caso unidimensionale:** $u_{tt} = c^2(u_{xx})$ la funzione

$$u(x, t) = f(x \pm ct),$$

é soluzione dell'equazione delle onde. Infatti

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \\ u_{xx} = f''(x \pm ct) \end{cases} \rightarrow \Delta u = f''(x \pm ct) = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

• **caso bidimensionale:** $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$ la funzione

$$u(x, y, t) = f(\alpha x + \beta y \pm ct), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

é soluzione dell'equazione delle onde. Infatti

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \\ u_{xx} = \alpha^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \\ u_{yy} = \beta^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \end{cases} \rightarrow \Delta u = f''(\alpha x + \beta y \pm ct) = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

• **caso tridimensionale:** $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ la funzione

$$u(x, y, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm ct), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

é soluzione dell'equazione delle onde. Infatti

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \\ u_{xx} = \alpha^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \\ u_{yy} = \beta^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \\ u_{zz} = \gamma^2 f''(\alpha x + \beta y \pm ct) \end{cases} \rightarrow \Delta u = f''(\alpha x + \beta y \pm ct) = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

Esempio 1.1. *La linearità dell'equazione permette di considerare somme delle funzioni precedentemente indicate, ancora soluzioni dell'equazione: così ad esempio scelta*

$$f(\xi) = \exp(-(x-5)^2)$$

consideriamo, assunto $c = 1$,

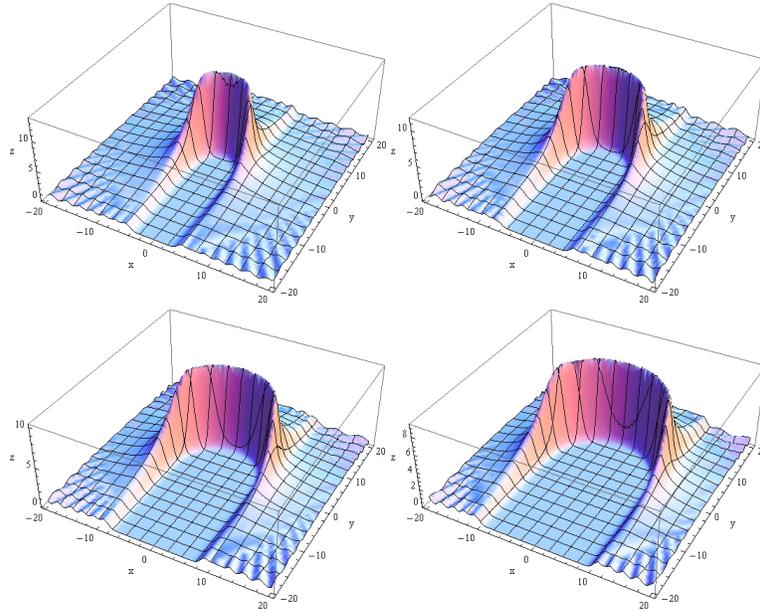
$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^{32} f\left(x \cos\left(k \frac{2\pi}{32}\right) + y \sin\left(k \frac{2\pi}{32}\right) - t\right)$$

Nelle seguenti Figure si vedono le corrispondenti $u(x, y, t)$ nei tempi $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6$

2. Il laplaciano in coordinate curvilinee

L'importanza delle funzioni a simmetria sferica suggerisce di esprimere spesso il laplaciano in coordinate polari piane o polari sferiche: il conto seguente ricava l'espressione del laplaciano tridimensionale in un qualunque sistema di coordinate ortogonali.

Il caso delle polari sferiche ne risulta caso particolare.

FIGURA 2. $u(x, y, t)$, $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6$

Siano introdotte nello spazio \mathbb{R}^3 tre nuove coordinate, (q_1, q_2, q_3) legate alle precedenti (x, y, z) dalle relazioni

$$\begin{cases} q_1 = f_1(x, y, z) \\ q_2 = f_2(x, y, z) \\ q_3 = f_3(x, y, z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Supponiamo che anche le nuove coordinate siano ortogonali.

Consideriamo il volume Ω delimitato dalle tre coppie di superfici

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = q_1 & f_1(x, y, z) = q_1 + dq_1 \\ f_2(x, y, z) = q_2 & f_2(x, y, z) = q_2 + dq_2 \\ f_3(x, y, z) = q_3 & f_3(x, y, z) = q_3 + dq_3 \end{cases}$$

I coseni direttori delle direzioni dei tre spigoli sono proporzionali ai tre gradienti

$$\nabla\varphi_1 = \{\varphi_{1q_1}, \varphi_{1q_2}, \varphi_{1q_3}\}, \quad \nabla\varphi_2 = \{\varphi_{2q_1}, \varphi_{2q_2}, \varphi_{2q_3}\}, \quad \nabla\varphi_3 = \{\varphi_{3q_1}, \varphi_{3q_2}, \varphi_{3q_3}\}$$

l'ipotesi che si tratti di un sistema ortogonale si traduce nell'ortogonalità dei tre vettori precedenti, paralleli agli spigoli.

L'elemento di lunghezza nelle nuove coordinate diventa

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^3 (\varphi_{iq_1} dq_1 + \varphi_{iq_2} dq_2 + \varphi_{iq_3} dq_3)^2$$

sviluppando i quadrati e tenendo conto delle condizioni di ortogonalità si ricava

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2$$

avendo indicato con

$$\begin{cases} H_1^2 = \varphi_{1q_1}^2 + \varphi_{1q_2}^2 + \varphi_{1q_3}^2 \\ H_2^2 = \varphi_{2q_1}^2 + \varphi_{2q_2}^2 + \varphi_{2q_3}^2 \\ H_3^2 = \varphi_{3q_1}^2 + \varphi_{3q_2}^2 + \varphi_{3q_3}^2 \end{cases}$$

Lungo ciascuno degli spigoli, ortogonali tra loro, del volume delimitato dalle tre coppie di superfici varia una sola delle coordinate q : gli spigoli pertanto saranno

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3$$

cosicché il volume $V(\Omega)$, tenuto conto dell'ortogonalità, é approssimativamente

$$dv = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Per calcolare l'espressione del Laplaciano, $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ ci serviamo

- del calcolo della $\operatorname{div} \vec{A}$ tramite il teorema della media e quello della divergenza,
- del risultato precedente applicato al campo $\vec{A} = \nabla u$.

Qualunque sia il campo \vec{A} dal teorema della divergenza si ha

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} A(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

da cui, per il teorema della media

$$V(\Omega) \operatorname{div} A(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

essendo $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ un conveniente punto di Ω .

Approssimiamo ora il flusso uscente da Ω , trattando Ω come un dominio rettangolare, A_1, A_2, A_3 le componenti normali di \vec{A} rispetto alle facce, e quindi esprimendo il flusso uscente con la somma

$$Q_1 + Q_2 + Q_3$$

dei tre flussi uscenti dalle tre coppie di facce parallele.

Una successiva approssimazione relativa ad assumere le componenti normali A_1, A_2, A_3 del campo \vec{A} costanti su ciascuna faccia conduce al seguente risultato

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3|_{q_1+dq_1} - A_1 ds_2 ds_3|_{q_1} =$$

$$= \left(A_1 H_2 H_3|_{q_1+dq_1} - A_1 H_2 H_3|_{q_1} \right) dq_2 dq_3$$

da cui, approssimando

$$\left(A_1 H_2 H_3|_{q_1+dq_1} - A_1 H_2 H_3|_{q_1} \right) \approx \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1$$

si ricava

$$Q_1 \approx \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3$$

Analoghe approssimazioni per le altre due coppie

$$Q_2 \approx \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 H_1 H_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$Q_3 \approx \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 H_1 H_3) dq_1 dq_2 dq_3$$

Ne segue pertanto, tenuto conto di tutte le approssimazioni precedentemente osservate,

$$\operatorname{div} \vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 H_1 H_3) \right\}$$

Se il campo \vec{A} é un gradiente, $\vec{A} = \nabla u$ allora

$$\operatorname{div} \vec{A} = \Delta u$$

e quindi, tenuto conto che le componenti di ∇u normali alle tre coppie di facce, relative rispettivamente a $q_1 = \text{costante}$, $q_2 = \text{costante}$, $q_3 = \text{costante}$ sono le derivate di u nella direzione normale esterna alle facce, facce che corrispondono a q_1 costante, oppure q_2 costante oppure q_3 costante.

Le tre derivate normali sono pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{ds_1} \\ \frac{u(q_1, q_2 + dq_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{ds_2} \\ \frac{u(q_1, q_2, q_3 + dq_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{ds_3} \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{u(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{H_1 dq_1} \\ \frac{u(q_1, q_2 + dq_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{H_2 dq_2} \\ \frac{u(q_1, q_2, q_3 + dq_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{H_3 dq_3} \end{array} \right.$$

da cui le tre componenti normali del gradiente diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \\ \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \end{array} \right.$$

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} H_2 H_3 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} H_1 H_3 \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} H_1 H_2 \right) \right\}$$

Il caso piú importante si riferisce alla scelta delle coordinate polari sferiche $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \theta, \varphi)$:

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = \rho \cos(\theta)$$

Con tale scelta riesce

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = \rho \sin(\theta)$$

Sostituendo nella formula generale ottenuta precedentemente si ottiene

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sin(\theta) u_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) u_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} u_\varphi \right) \right\}$$

formula che puó scriversi come

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) u_\theta) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\theta)} u_{\varphi\varphi}$$

In particolare le funzioni armoniche a simmetria sferica, cioè dipendenti solo da ρ , verificano l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) = 0$$

3. Onde sferiche

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, posto

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

sia u una funzione a simmetria sferica rispetto al punto (x_0, y_0, z_0) , soluzione dell'equazione delle onde: scritto il laplaciano in coordinate polari sferiche si ha

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) = u_{rr} + \frac{2u_r}{r}$$

L'equazione delle onde si riduce pertanto a

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right).$$

equazione che può essere riscritta come

$$(ru)_{tt} = c^2 (ru)_{rr}$$

la funzione $v(r, t) = r u(t, r)$ soddisfa quindi l'equazione delle onde unidimensionale,

$$v_{tt} = c^2 v_{rr}$$

quindi può essere espressa come

$$r u(t, r) = F(r - ct) + G(r + ct),$$

da cui si ricava

$$u(t, r) = \frac{1}{r} \{F(r - ct) + G(r + ct)\},$$

Ognuna di tali funzioni, ognuna riferita a punti P_0 diversi, può essere interpretata come un'onda sferica generata in un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e che si propaga con velocità c .

Le funzioni così ottenute hanno carattere infinitesimo all'infinito, per via del fattore $1/r$ che non compariva nel caso unidimensionale.

3.1. Il problema di Cauchy.

Il problema di Cauchy, nel caso di dati a simmetria sferica,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \\ u(r, 0) = \varphi(r) \\ u_t(r, 0) = \psi(r) \end{cases}$$

con $\varphi(r)$ limitata, si traduce nella determinazione della soluzione $v(r, t)$ del problema unidimensionale

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{rr} \\ v(r, 0) = r \varphi(r) \\ v_t(r, 0) = r \psi(r) \\ v(0, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di quest'ultimo si rappresenta, prescindendo dall'ultima condizione $v(0, t) = 0$ come

$$v(r, t) = \frac{1}{2} [(r + ct)\varphi(r + ct) + (r - ct)\varphi(r - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} s\psi(s) ds$$

La condizione ulteriore $v(0, t) = 0$ é automaticamente soddisfatta se le funzioni $r\varphi(r)$ e $r\psi(r)$ sono dispari il che significa che le $\varphi(r)$ e $\psi(r)$ sono pari.

Esempio 3.1. *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \\ u(r, 0) = e^{-r^2} \\ u_t(r, 0) = 0 \end{cases}$$

Riesce, posto $f(r) = re^{-r^2}$,

$$v(r, t) = \frac{1}{2} (f(r + t) + f(r - t)) \quad \rightarrow \quad u(r, t) = \frac{1}{2r} (f(r + t) + f(r - t))$$

ovvero

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} \left\{ (r + t)e^{-(r+t)^2} + (r - t)e^{-(r-t)^2} \right\}$$

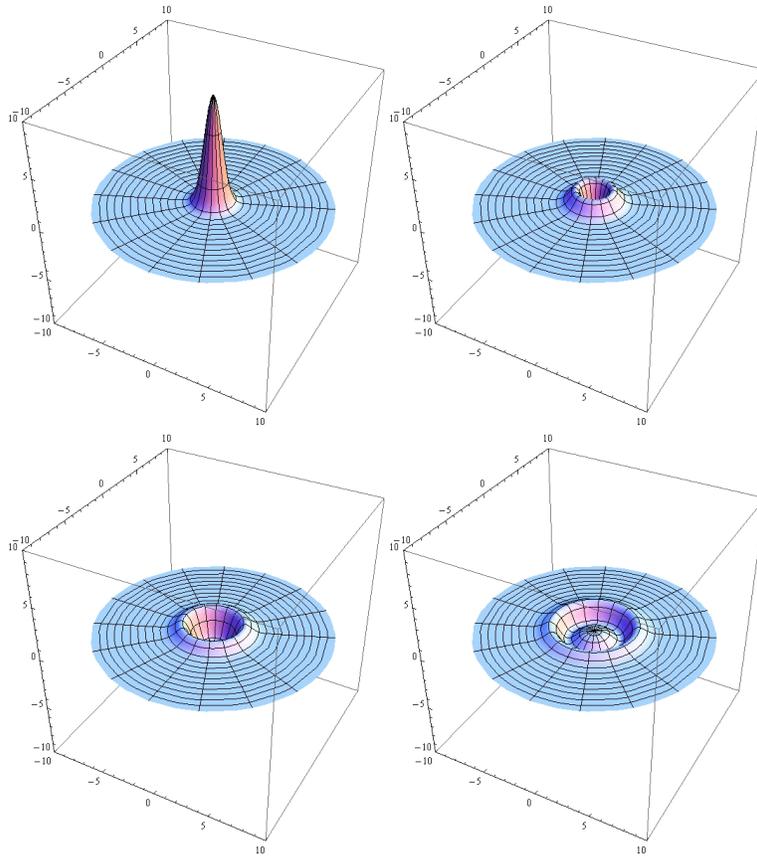
Le figure seguenti rappresentano il grafico della funzione u limitatamente al piano $z = 0$ e relativamente ai tempi $t = 0, t = 1, t = 2, t = 3$

4. L'operatore di media

Assegnate funzioni $f(x)$, $g(x, y)$, $v(x, y, z)$ di una, due o tre variabili consideriamo gli operatori di media

$$\begin{cases} Mf\{x, r\} &= \frac{1}{2} \{f(x - r) + f(x + r)\}, \\ Mg\{x, y, r\} &= \frac{1}{2r\pi} \int_{S[\{x, y\}, r]} g(\xi, \eta) ds \\ Mv\{x, y, z, r\} &= \frac{1}{4r^2\pi} \iint_{S[\{x, y, z\}, r]} v(\xi, \eta, \zeta) d\sigma \end{cases}$$

dove $S[\{x, y\}, r]$ é la circonferenza di centro $\{x, y\}$ e raggio r e analogamente $S[\{x, y, z\}, r]$ é la superficie sferica di centro $\{x, y, z\}$ e raggio r e il secondo e terzo integrale sono il primo curvilineo e il secondo superficiale.

FIGURA 3. $u(x, y, 0, t)$, $t = 0, t = 1, t = 2, t = 3$

Il primo dei tre operatori é stato già usato per rappresentare la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde in \mathbb{R}^1 , scegliendo $r = ct$.

Esempio 4.1. Sia $v(x, y) = x^2 - y^2$ riesce

$$u(x, y, r) = Mv\{x, y, r\} = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \pi v(x + r \cos(\theta), y + r \sin(\theta)) r d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((x + r \cos(\theta))^2 - (y + r \sin(\theta))^2) d\theta = x^2 - y^2$$

(il risultato non dovrebbe stupire: $v(x, y) = x^2 - y^2$ é una funzione armonica: il suo valore nel centro di un cerchio deve essere la media dei valori sulla circonferenza che lo delimita !)

Esempio 4.2. Sia $v(x, y) = x^2 + y^3$ riesce

$$\begin{aligned} u(x, y, r) = Mv\{x, y, r\} &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \pi v(x + r \cos(\theta), y + r \sin(\theta)) r d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \pi ((x + r \cos(\theta))^2 + (y + r \sin(\theta))^3) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} (r^2(3y + 1) + 2(x^2 + y^3)) \end{aligned}$$

Consideriamo in particolare il terzo dei tre operatori di media, e dimostriamo, in relazione ad esso alcune proprietà fondamentali, riferendoci, per semplicità, a funzioni $v(x, y, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Proposizione 4.3.

$$\lim_{r \rightarrow 0} Mv\{x, y, z, r\} = v(x, y, z)$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato deriva direttamente dalla

$$\min_S v \leq Mv\{x, y, z, r\} \leq \max_S v$$

tenuto conto che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \min_S v = \lim_{r \rightarrow 0} \max_S v = v(x, y, z)$$

□

Proposizione 4.4.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{x, y, z, r\} = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato deriva dall'essere $Mv\{x, y, z, r\}$ funzioni pari di r , e quindi necessariamente con derivata nulla nell'origine. La dimostrazione seguente prescinde dall'osservazione fatta sopra:

posto $\vec{P} = \{x, y, z\}$ si ha

$$Mv\{\vec{P}, r\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega_r} v(\vec{P} + r\vec{\nu}) d\sigma_1$$

avendo indicato con $d\sigma_1$ l'elemento superficiale corrispondente al raggio $r = 1$.

Ne segue

$$\frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega_r} \nabla v(\vec{P} + r\vec{\nu}) \cdot \vec{\nu} d\sigma_1$$

Passando al limite per $r \rightarrow 0$ si ha quindi, per continuità,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega_r} \nabla v(\vec{P}) \vec{\nu} d\sigma_1$$

Tenuto conto che, per esempio ricordando il teorema della divergenza,

$$\iint_{\partial\Omega_r} \vec{\nu} d\sigma_1 = 0$$

se ne deduce

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \frac{\nabla v(\vec{P})}{4\pi} \iint_{\partial\Omega_r} \vec{\nu} d\sigma_1 = 0$$

□

Esempio 4.5. Sia $v(x, y) = x^2 + y^3$ riesce

$$\begin{aligned} u(x, y, r) &= Mv\{x, y, r\} = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \pi v(x + r \cos(\theta), y + r \sin(\theta)) r d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \pi ((x + r \cos(\theta))^2 + (y + r \sin(\theta))^3) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} (r^2(3y + 1) + 2(x^2 + y^3)) \end{aligned}$$

É evidente che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} (r^2(3y + 1) + 2(x^2 + y^3)) = x^2 + y^3 = v(x, y)$$

É evidente che

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} (r^2(3y + 1) + 2(x^2 + y^3)) = r(3y + 1) \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} (r^2(3y + 1) + 2(x^2 + y^3)) = 0$$

Proposizione 4.6.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} Mv\{\vec{P}, r\} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \Delta Mv\{\vec{P}, r\}$$

DIMOSTRAZIONE. Indicata con Ω_r la sfera di centro P e raggio r , e con $\partial\Omega_r$ la superficie sferica che la delimita, si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega_r} \nabla v \nu d\sigma_r = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{\Omega_r} \Delta v d\xi d\eta d\zeta.$$

L'ultimo integrale si può calcolare in coordinate polari come

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta v \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Ne risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} Mv\{\vec{P}, r\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \rho^2 d\rho \iint_{\partial\Omega_\rho} \Delta v d\sigma_1 \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta v \sin(\theta) d\theta d\varphi - \frac{2}{4\pi r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta v \sin(\theta) d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega_r} \Delta v d\sigma - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} \end{aligned}$$

Riassumendo si ottiene quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} Mv\{\vec{P}, r\} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S[p,r]} \Delta v d\sigma$$

Tenuto presente che la regolarità di v riconosce, per ogni $r > 0$

$$\Delta_P Mv\{P, r\} = M \Delta v\{P, r\}$$

Si ha quindi la relazione

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} Mv\{\vec{P}, r\} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} Mv\{\vec{P}, r\} = \Delta_P Mv\{P, r\}$$

□

Corollario 4.7. *La funzione*

$$u(x, y, z, r) = Mv\{x, y, z, r\}$$

verifica l'equazione

$$\Delta(ru) = (ru)_{rr}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$(ru)_{rr} = 2u_r + ru_{rr}$$

che per la precedente proposizione coincide con

$$r\Delta u$$

Tenuto presente che l'operatore Δ opera solo su x, y, z e non su r riesce anche

$$r\Delta u = \Delta(ru)$$

da cui, complessivamente,

$$\Delta(ru) = (ru)_{rr}$$

□

Proposizione 4.8. *La funzione*

$$u(x, y, z, t) = tMv\{x, y, z, ct\}$$

verifica l'equazione delle onde.

DIMOSTRAZIONE.

$$(rMv(P, r))_{rr} = \Delta Mv(P, r) \quad \rightarrow \quad (ctMv(P, ct))_{tt} = c^2 \Delta(ctMv(P, ct))$$

ovvero

$$(tMv(P, ct))_{tt} = c^2 \Delta(tMv(P, ct))$$

□

Esempio 4.9. *Sia $v(x, y, z) = 1 + x^2 + y^3 + z^4$ riesce*

$$u(x, y, z, r) =$$

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + (x + r \sin(\theta) \cos(\varphi))^2 + (y + r \sin(\theta) \sin(\varphi))^3 + (z + r \cos(\theta))^4 \right\} r^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{15} (3r^4 + 5r^2 (3y + 6z^2 + 1) + 15 (x^2 + y^3 + z^4 + 1)) = v(x, y, z, r)$$

Verifiche:

Media : *Si osservi come u sia funzione pari in r ,*

Prop.4.3:

$$\lim_{r \rightarrow 0} v(x, y, z, r) = x^2 + y^3 + z^4 + 1$$

Prop.4.4 :

$$\frac{\partial}{\partial r} v(x, y, z, r) = \frac{1}{15} (12r^3 + 10r (3y + 6z^2 + 1)) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} v(x, y, z, r) = 0$$

Prop.4.6:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, y, z, r) = \frac{1}{15} (36r^2 + 10 (3y + 6z^2 + 1))$$

$$\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(x, y, z, r) = \frac{2}{15} (12r^2 + 10 (3y + 6z^2 + 1))$$

$$\Delta v(x, y, z, r) = \frac{1}{15} (60r^2 + 15(2 + 6y + 12z^2))$$

Si verifica che

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(x, y, z, r) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(x, y, z, r) = \Delta u(x, y, z, r)$$

Prop. 4.8 : *posto*

$$u(x, y, z, t) = t v(x, y, z, ct)$$

riesce

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{15} (3c^4 t^4 + 5c^2 t^2 (3y + 6z^2 + 1) + 15 (x^2 + y^3 + z^4 + 1))$$

$$u_{tt} = 2c^2 t (2c^2 t^2 + 3y + 6z^2 + 1)$$

$$\Delta u(x, y, z, t) = t (4c^2 t^2 + 12z^2 + 6y + 2)$$

5. Il problema di Cauchy

Le soluzioni del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$$

sono espresse da

$$(1) \quad u(x, y, z, t) = t M g\{x, y, z, ct\} + \frac{\partial}{\partial t} (t M f\{x, y, z, ct\})$$

La verifica della bontá di tale formula deriva dalle numerose Proposizioni relative all'operatore di media, stabilite nel precedente paragrafo.

5.1. Verifica.

Posto

$$(2) \quad u_1(x, y, z, t) = M g\{x, y, z, ct\}, \quad u_2(x, y, z, t) = M f\{x, y, z, ct\}$$

riesce

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{t u_1 + (t u_2)_t\} = c^2 \Delta \{t u_1 + (t u_2)_t\}$$

$$u(x, y, z, t) = t u_1 + (t u_2)_t = t u_1 + u_2 + t (u_2)_t \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0} u = \lim_{t \rightarrow 0} u_2 = f$$

$$u_t(x, y, z, t) = u_1 + t (u_1)_t + 2 (u_2)_t + t (u_2)_{tt} \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0} u = \lim_{t \rightarrow 0} u_1 = g$$

6. L'equazione delle onde in un cubo

Supponiamo di voler descrivere la propagazione del suono dovuto ad un rumore iniziale, in una stanza cubica.

Il problema da porre é il seguente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

nel cubo

$$\Omega : x \in [0, \pi], y \in [0, \pi], z \in [0, \pi]$$

con condizioni al contorno nulle al bordo:

$$u(0, y, z, t) = u(\pi, y, z, t) = 0, \text{ ecc.}$$

Supponiamo assegnate le condizioni iniziali sia $u(x, y, z, 0)$ che $u_t(x, y, z, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \Omega$.

Soluzioni dell'equazione, rispettose delle condizioni al bordo sono espresse da

$$A(t) \sin(nx) \sin(my) \sin(pz)$$

sostituendo nell'equazione si deve avere

$$A''(t) \sin(nx) \sin(my) \sin(pz) = -c^2(n^2 + m^2 + p^2)A(t) \sin(nx) \sin(my) \sin(pz)$$

da cui

$$A(t) = \alpha_{n,m,p} \cos(c\sqrt{n^2 + m^2 + p^2}t) + \beta_{n,m,p} \sin(c\sqrt{n^2 + m^2 + p^2}t)$$

da cui la soluzione espressa dalla somma delle due serie

$$\sum \alpha_{n,m,p} \cos(c\sqrt{n^2 + m^2 + p^2}t) \sin(nx) \sin(my) \sin(pz)$$

$$\sum \beta_{n,m,p} \sin(c\sqrt{n^2 + m^2 + p^2}t) \sin(nx) \sin(my) \sin(pz)$$

I coefficienti $\alpha_{n,m,p}$ e $\beta_{n,m,p}$ sono poi scelti in modo opportuno a soddisfare le due condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = \sum \alpha_{n,m,p} \sin(nx) \sin(my) \sin(pz) = \varphi(x, y, z) \\ u_t(x, y, z, 0) = \sum \beta_{n,m,p} c\sqrt{n^2 + m^2 + p^2} \sin(nx) \sin(my) \sin(pz) = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

6.1. Unicit .

La linearit  del problema riconduce il teorema di unicit  all'assenza di soluzioni non banali per il problema omogeneo.

Consideriamo, come nel caso unidimensionale

$$E(t) = \iiint_{\Omega} \{c^2(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + u_t^2\} dx dy dz$$

Se u   soluzione del problema con condizioni al bordo nulle e dati iniziali nulli, riesce $E(0) = 0$:

$$E'(t) = 2 \iiint_{\Omega} \{c^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt} + u_z u_{zt}) + u_t u_{tt}\} dx dy dz$$

da cui, integrando per parti si ottiene

$$E'(t) = 2 \iiint_{\Omega} \{-c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + u_{tt}\} u_t dx dy dz = 0$$

da cui

$$E(t) \equiv 0 \quad \rightarrow \quad u(x, y, z, t) = \text{costante} \quad \rightarrow \quad u(x, y, z, t) \equiv 0$$

7. Il teorema di unicit  in \mathbb{R}^n

Supponiamo $n = 3$.

Teorema 7.1. *Il problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_n u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad |x - x_0| \leq R$$

dove, per brevitt , indichiamo con x la n -upla delle coordinate del punto e con $|x - x_0|$ la distanza in \mathbb{R}^n , ammette una sola soluzione.

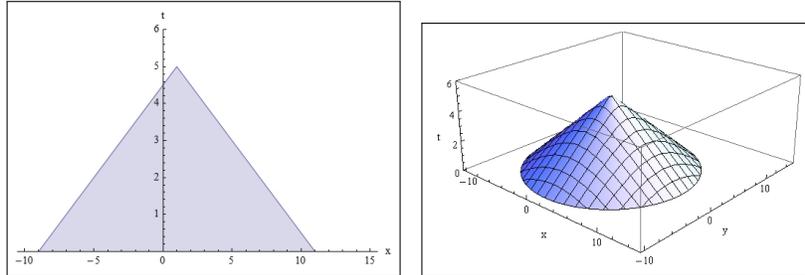


FIGURA 4. Il cono unione delle sfere $\mathcal{B}(t)$ in dimensione 1 e 2: $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $c = 2$, $R = 10$, $t \in [0, 5]$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo per ogni $t \in [0, R/c]$

$$\mathcal{B}(t) : |x - x_0| \leq R - ct$$

la sfera di \mathbb{R}^n di centro (x_0, t) e raggio $R - ct$.

Nella Figura 4 a destra le sfere $\mathcal{B}(t)$ sono i cerchi, orizzontali, sezione del cono disegnato con i piani $t = \text{costante}$.

Posto

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{B}(t)} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx$$

integrale esteso alla sfera 3-dimensionale $\mathcal{B}(t)$, che in coordinate sferiche si scrive come

$$\frac{1}{2} \int_0^{R-ct} d\rho \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) \rho^2 d\varphi$$

riesce

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\frac{c}{2} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) (R - ct)^2 d\varphi + \\ & + \iiint_{\mathcal{B}(t)} (u_t u_{tt} + c^2 (\nabla u, \nabla u_t)) dx \end{aligned}$$

ovvero anche

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c}{2} \iint_{\partial \mathcal{B}(t)} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) d\sigma + \iiint_{\mathcal{B}(t)} (u_t u_{tt} + c^2 (\nabla u, \nabla u_t)) dx$$

Tenuta presente l'identità

$$(\nabla u, \nabla u_t) = \operatorname{div} (u_t \nabla u) - u_t \Delta u$$

si riconosce che

$$\iiint_{\mathcal{B}(t)} c^2 (\nabla u, \nabla u_t) dx = \iiint_{\mathcal{B}(t)} c^2 (\operatorname{div} (u_t \nabla u) - u_t \Delta u) dx$$

da cui, sostituendo nell'espressione precedente, tenuto conto che

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

si ha

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c}{2} \iint_{\partial \mathcal{B}(t)} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) d\sigma + \iiint_{\mathcal{B}(t)} \operatorname{div} (u_t \nabla u) dx$$

da cui, servendosi, nell'ultimo addendo del teorema della divergenza,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c}{2} \iint_{\partial \mathcal{B}(t)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 - cu_t \nabla u \cdot \vec{\nu}) dx$$

essendo ν il versore normale sterno alla sfera $\mathcal{B}(t)$.

Tenuto conto che

$$(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 - 2cu_t \nabla u \vec{\nu}) \geq u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 - 2c|u_t||\nabla u| = (|u_t| - c|\nabla u|)^2$$

riesce

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c}{2} \iint_{\partial \mathcal{B}(t)} (|u_t| - 2c|\nabla u|)^2 dx \leq 0$$

Ne segue che

$$\{E(t) \geq 0, \quad E'(t) \leq 0, \quad E(0) = 0\} \quad \rightarrow \quad E(t) \equiv 0$$

Ne segue

$$\forall x \in \mathcal{B}(t) \quad t \in [0, R/c] : \quad u_t = 0, \quad \nabla u = 0 \quad \rightarrow \quad u \equiv 0$$

Riferendosi alla Figura 4 a destra il conto precedente mostra che se $f(x) = g(X) = 0$ per $|x - x_0| \leq R$ allora $u(x, t) \equiv 0$ in tutto il cono unione delle sfere $\mathcal{B}(t)$ $t \in [0, R/c]$. \square

8. Il caso bidimensionale

La formula (1) trovata in tre dimensioni, vedi pagina 14, consente di rappresentare la soluzione del problema dei valori iniziali anche in due dimensioni: basta naturalmente che i dati iniziali assegnati f e g dipendano solo dalle due variabili x e y

La formula di pagina 14

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint g(\xi, \eta, \zeta) d\sigma_{ct} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint f(\xi, \eta, \zeta) d\sigma_{ct} \right)$$

diventa

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint g(\xi, \eta) d\sigma_{ct} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint f(\xi, \eta) d\sigma_{ct} \right)$$

e anche il risultato, dal momento che le funzioni integrande non dipendono da z , non dipenderá da z , sará pertanto

$$v(x, y, t) = \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint g(\xi, \eta) d\sigma_{ct} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint f(\xi, \eta) d\sigma_{ct}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 \{u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\} & \rightarrow \quad v_{tt} = c^2 \{v_{xx} + v_{yy}\} \\ \lim_{t \rightarrow 0} u = f & \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0} v = f \\ \lim_{t \rightarrow 0} u_t = g & \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0} v_t = g \end{array} \right.$$

8.1. Un'espressione bidimensionale.

Le espressioni di media piú volte usate

$$Mf\{x, y, z, r\} = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S[(x,y,z),r]} f(x+r \cos(\theta \cos(\varphi)), y+r \cos(\theta \sin(\varphi)), z+r \sin(\theta)) d\sigma_r$$

si riducono, nel caso che f non dipende dalla terza variabile,

- a poter scegliere z a piacere, per esempio $z = 0$
- a integrare invece che su tutta la sfera a integrare due volte sulla semisfera superiore,
- semisfera che si rappresenta in modo cartesiano come

$$z = \sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_r : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leq r^2$$

- $d\sigma = \frac{r d\xi d\eta}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}}$

Riesce pertanto

$$Mf\{x, y, z, r\} = \frac{1}{2\pi r} \iint_{\Omega_r} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta$$

Riferendosi alle funzioni u_1 e u_2 precedentemente introdotte a pagina 14, riesce

$$u(x, y, t) = \frac{t}{2\pi ct} \iint_{\Omega_r} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t}{2\pi ct} \iint_{\Omega_r} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta \right\} =$$

da cui

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \left\{ \iint_{\Omega_r} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Omega_r} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta \right) \right\}$$

essendo f e g i due dati iniziali.

La precedente espressione é detta formula di Hadamard.

Le onde rappresentate dalla formula precedente, nel caso bidimensionale, si chiamano spesso onde cilindriche, mentre si chiamano piane quelle unidimensionali e sferiche quelle tridimensionali.

9. Interpretazione fisica

Supponiamo che i dati iniziali siano uguali a zero al di fuori di una sfera Ω_0 : il carattere locale con il quale l'operatore di media permette di costruire la soluzione in ogni punto (x, y, z) e in ogni tempo t permette di riconoscere che detta

$$\mathcal{S}(t) : \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = ct$$

$$\mathcal{S}(t) \cap \Omega_0 = \emptyset \quad \rightarrow \quad u(x, y, z, t) = 0$$

Pertanto, indicate con d la distanza (minima) di (x, y, z) da Ω_0 e D quella massima riesce

$$\begin{aligned} t < \frac{d}{c} &\quad \rightarrow \quad u(x, y, z, t) = 0 \\ t > \frac{D}{c} &\quad \rightarrow \quad u(x, y, z, t) = 0 \end{aligned}$$

Quindi il valore $u(x, y, z, t)$ é modificato dal valore zero nel punto (x, y, z) solo nei tempi

$$t \in \left[\frac{d}{c}, \frac{D}{c} \right]$$

...al passare del tempo quindi la perturbazione (l'onda) sparisce:

- in un certo punto, ad esempio nell'origine, avviene, al tempo $t = 0$ un colpo secco,
- nei punti lontani nei primi tempi $t \approx 0$ non si sente nulla,
- a un certo tempo t^* si sente il colpo,
- dopo poco, per $t > t^* + \varepsilon$ c'è di nuovo il silenzio !

Supponiamo ora di fissare il tempo $t = t_0$: la funzione $u(x, y, z, t_0)$ può essere diversa da zero solo se la superficie sferica $\mathcal{S}(t)$ di centro (x, y, z) e raggio ct_0 interseca Ω_0 .

In altri termini $u(x, y, z, t_0) \neq 0$ solo per i punti delle sfere di centro $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_0$.

L'involuppo esterno ed interno di tali famiglie di sfere costituiscono i fronti d'onda.

9.1. Il caso bidimensionale. La formula

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \\ & \frac{1}{2\pi c} \left\{ \iint_{\Omega_r} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Omega_r} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{r^2 - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}} d\xi d\eta \right) \right\} \end{aligned}$$

precedentemente stabilita fa ricorso invece che ad integrali su superfici sferiche a integrali su cerchi: la differenza é notevole.

Fissato infatti un punto (x, y) la funzione u in tale punto al tempo t puó essere diversa da zero solo se il cerchio Ω_r interseca Ω_0 .

Questo accadrá se $r = ct$ é abbastanza grande, diciamo per $t > t^*$.

Nei tempi successivi il cerchio continua, ampliandosi ulteriormente, ad intersecare Ω_0 .

Non accade quindi quel

passaggio dell'onda

che avevamo riconosciuto in \mathbb{R}^3 . La perturbazione di $u(x, y, t)$ inizia ad un tempo t^* e ...non termina, anche se, per via del denominatore presente nei due integrali, va affievolendosi.

Esempio 9.1. *Il sassolino nello stagno:*

- *cade il sassolino in un punto e lí l'acqua é perturbata, cominciano a crearsi cerchi perturbati,*
- *nei punti un po' lontani in un primo tempo non si avverte alcuna perturbazione,*
- *a un certo momento arriva la prima perturbazione,*
- *poi ne arrivano altre, piú tenui,*
- *tuttavia l'acqua non torna piú ad essere calma come prima...!*

Indice

Equazione delle onde	1
1. Soluzioni artigianali	1
2. Il laplaciano in coordinate curvilinee	2
3. Onde sferiche	6
4. L'operatore di media	8
5. Il problema di Cauchy	14
6. L'equazione delle onde in un cubo	15
7. Il teorema di unicità in \mathbb{R}^n	16
8. Il caso bidimensionale	18
9. Interpretazione fisica	20
Bibliografia	25

Bibliografia

- [1] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*. Edizioni MIR, 1981.
- [2] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*.
- [3] H.F. Weinberger, *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*. Blaisdell, 1965.