PDE lineari primo ordine

1. Introduzione

Un'equazione lineare alle derivate parziali di primo ordine in $\mathbb{R}^n$ é, indicato con $x = \{x_1, ..., x_n\}$, un'equazione della forma seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)\, u = f(x) \tag{1}$$

dove $a_1(x), ..., a_n(x)$, $b(x)$, $f(x)$ sono funzioni continue $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, che, per semplicitá, pensiamo definite in tutto $\mathbb{R}^n$.
L'incognita é la funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ che verifica con le sue derivate prime l'equazione (1).

Come per le equazioni differenziali lineari ordinarie valgono per quelle alle derivate parziali le seguenti proprietá:

- si dicono equazioni omogenee quando il secondo membro, o termine noto, $f(x)$ é zero,
- le soluzioni dell'equazione omogenea costituiscono uno spazio vettoriale,
- dette u_0 le soluzioni dell'equazione omogenea e $\overline{u}$ una soluzione particolare dell'equazione completa, tutte le soluzioni u dell'equazione completa sono della forma

$$u = \overline{u} + u_0$$

Le equazioni lineari di primo ordine piú semplici sono, naturalmente quelle a coefficienti $a_1, ..., a_n$, b costanti.

1.1. Il caso $n = 2$.

In $\mathbb{R}^2$ l'equazione (1) ha la forma

$$\alpha(x, y)u_x + \beta(x, y)\, u_y + \gamma(x, y)\, u = f(x, y)$$

La funzione incognita é una funzione $u(x, y)$ di due variabili.

2. Il problema di Cauchy

La condizione iniziale, o problema di Cauchy, consiste, pensando al caso $n = 2$, nella determinazione di una soluzione $u(x, y)$ che assuma valori assegnati sui punti (x, y) di una curva $\mathcal{C}$ assegnata.
Ad esempio, pensando che la curva $\mathcal{C}$ sia l'asse x, il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} \alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)\,u_y + \gamma(x,y)\,u = f(x,y) & \forall(x,y) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \end{cases}$$

3. L'osservazione fondamentale

La regola di derivazione di una funzione $u(x, y)$ secondo la direzione del versore $\overrightarrow{t} = \{\alpha, \beta\}$ assegnato

$$\frac{du}{d\overrightarrow{t}} = \alpha\,u_x + \beta\,u_y$$

consente di ricondurre le equazioni a derivate parziali di primo ordine a equazioni differenziali ordinarie, su una famiglia di curve (spesso un fascio improprio di rette), che prendono il nome di

curve caratteristiche

$\boxed{\text{Primo esempio}}$

Leggiamo quanto sopra su un esempio a coefficienti costanti

$$4u_x + 3u_y = 0 \tag{2}$$

esempio che equivale, naturalmente a

$$\frac{4}{5}u_x + \frac{3}{5}u_y = 0$$

ovvero ancora, indicato con

$$\overrightarrow{t} = \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$$

$$4u_x + 3u_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{d\overrightarrow{t}} = 0$$

L'ultima condizione corrisponde a dire che la soluzione u é costante lungo le rette parallele al versore $\overrightarrow{t}$.
Le rette parallele a $\overrightarrow{t}$ sono

$$\begin{cases} x = A + \dfrac{4}{5}\,s \\ \\ y = B + \dfrac{3}{5}\,s \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4y - 3x = C$$

quindi una funzione che sia costante su di esse non puó che essere

$$u(x,y) = g(4y - 3x)$$

che rappresentano quindi, al variare di g, tutte e sole le soluzioni della (2).

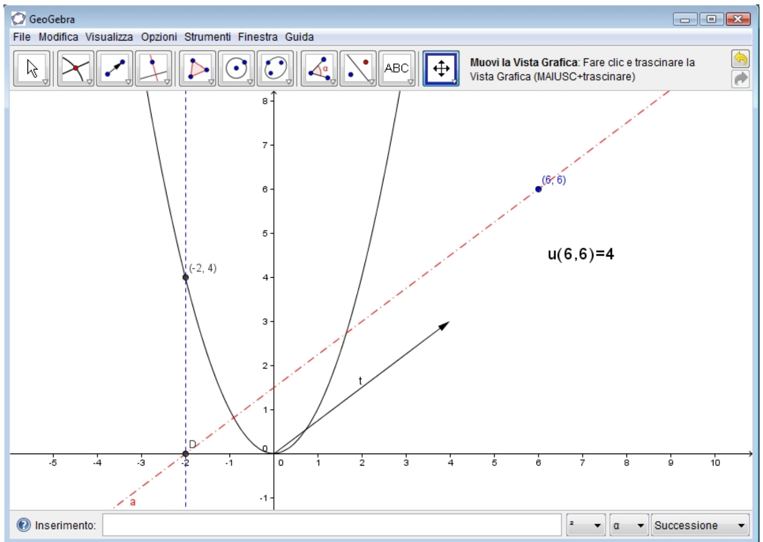

FIGURA 1. La determinazione della soluzione del problema di Cauchy

Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

La condizione al contorno aggiunta implica

$$u(x,0) = g(-3x) = x^2$$

ovvero

$$g(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^2$$

da cui

$$u(x,y) = \left(\frac{4y-3x}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{24}{9}xy + \frac{16}{9}y^2$$

Una verifica diretta conduce a

$$\begin{cases} u(x,0) &= x^2 \\ u_x(x,y) &= 2x - \dfrac{24}{9}y \\ u_y(x,y) &= -\dfrac{24}{9}x + \dfrac{32}{9}y \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 4u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

La determinazione della soluzione si riconosce in Figura 1:

- si determina il vettore $\overrightarrow{t}$,
- scelto un punto qualsiasi si traccia per esso la retta parallela a $\overrightarrow{t}$,
- tale retta interseca (prima o poi) l'asse x su cui é assegnata la condizione iniziale $u(x, 0) = x^2$,
- tenuto conto che u é costante sulla retta, il suo valore nel punto scelto é lo stesso che prende nell'intersezione tra tale retta e l'asse x,
- ecc. ecc.

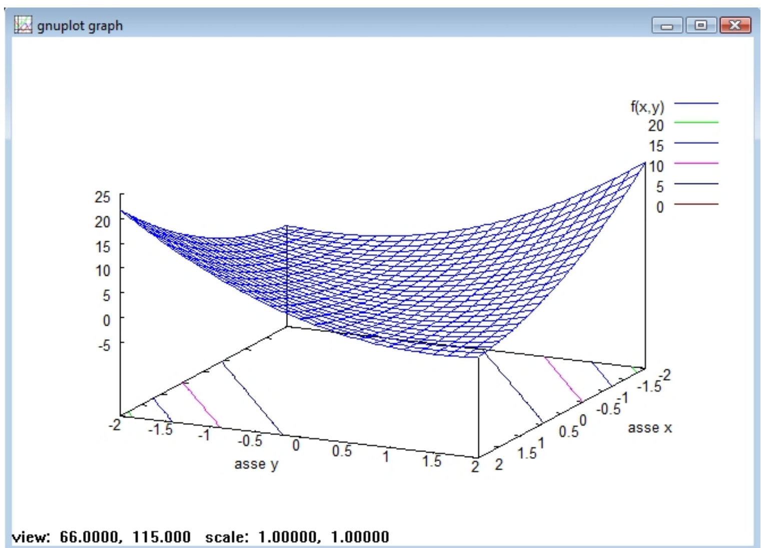

FIGURA 2. La soluzione del problema di Cauchy: notare le linee di livello, rette.

Osservazione:
I *valori iniziali* potevano essere assegnati invece che sull'asse x, sull'asse y o su altre rette: su un solo tipo di rette non era possibile....
.... quelle della famiglia $4y - 3x = C$ sulle quali le soluzioni della (2) sono necessariamente costanti.

$\boxed{\text{Secondo esempio}}$

$$\begin{cases} 4u_x(x, y) + 3u_y(x, y) + u(x, y) = f(x, y) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \tag{3}$$

Cerchiamo l'espressione delle soluzioni u nel punto (x_0, y_0).
Detto come sopra

$$\overrightarrow{t} = \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$$

consideriamo la (3) sui punti (x, y) della caratteristica passante per (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + 4\,s \\ \\ y = y_0 + 3\,s \end{cases}$$

$$4u_x\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right) + 3u_y\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right) + u\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right) = f\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right)$$

Indicate con

$$U(s) = u\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right), \quad F(s) = f\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right)$$

da cui

$$u(x_0, y_0) = U(0)$$

l'equazione si legge come

$$U'(s) + U(s) = F(s)$$

e quindi

$$U(s) = e^{-s}\left\{U(0) + \int_0^s e^{\sigma}\,F(\sigma)\,d\sigma\right\}$$

ovvero

$$U(0) = e^{s}u\left(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s\right) - \int_0^s e^{\sigma}\,F(\sigma)\,d\sigma$$

Scegliamo ora s_0 in modo che

$$y_0 + 3s_0 = 0 \quad \rightarrow \quad s_0 = -\frac{1}{3}y_0$$

Ne segue

$$u(x_0, y_0) = e^{-\frac{1}{3}y_0}u\left(x_0 + 4\,s_0,\ 0\right) - \int_0^{-\frac{1}{3}y_0} e^{\sigma}\,f\left(x_0 + 4\,\sigma,\ y_0 + 3\,\sigma\right)\,d\sigma$$

ovvero ancora

$$u(x_0, y_0) = e^{-\frac{1}{3}y_0}g\left(x_0 - \frac{4}{3}\,y_0\right) - \int_0^{-\frac{1}{3}y_0} e^{\sigma}\,f\left(x_0 + 4\,\sigma,\ y_0 + 3\,\sigma\right)\,d\sigma$$

Verifica:

La condizione iniziale $u(x_0, 0) = g(x_0)$ é ovviamente soddisfatta.

Per quanto concerne le derivate si ha

$$\begin{cases} u_x = e^{-\frac{1}{3}y_0} g'(..) - \displaystyle\int_0^{-\frac{1}{3}y_0} e^{\sigma}\, f_x(...)\, d\sigma \\ u_y = -\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}y_0} g(..) - \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}y_0} g'(..) + e^{-\frac{1}{3}y_0} f(..) - \displaystyle\int_0^{-\frac{1}{3}y_0} e^{\sigma}\, f_y(...)\, d\sigma \end{cases}$$

Il conto torna tenendo conto che

$$4 f_x\,(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s) + 3 f_y\,(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s) = f_\sigma\,(x_0 + 4\,s,\ y_0 + 3\,s)$$

e quindi servendosi di un'integrazione per parti...

$\boxed{\text{RIASSUMENDO}}$

Le equazioni a coefficienti costanti

$$\alpha\, u_x + \beta\, u_y + \gamma\, u = f(x, y)$$

si traducono in equazioni differenziali lineari ordinarie di primo ordine a coefficienti costanti

$$U'(s) + \delta\, U(s) = F(s) \tag{4}$$

su ognuna delle rette *caratteristiche*
La condizione iniziale posta sulla u fornisce una condizione iniziale $U(s_0) = \ell$ per la (4).

4. Il caso dei coefficienti variabili

La differenza fondamentale tra coefficienti costanti e coefficienti variabili consiste nella forma delle *caratteristiche*: un fascio improprio di rette parallele nel caso dei coefficienti costanti, una famiglia di curve (non certamente sempre esplicite) nel caso dei coefficienti variabili.
La tecnica con cui interpretare l'espressione

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y)$$

é la stessa incontrata nel caso dei coefficienti costanti: detto $\overrightarrow{t}$ il versore

$$\overrightarrow{t} = \left\{ \frac{a(x, y)}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b(x, y)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}$$

riesce

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = \sqrt{a^2 + b^2}\, \frac{\partial\, u}{\partial\, \overrightarrow{t}}$$

$\boxed{\text{Primo esempio}}$

Consideriamo l'equazione

$$e^x\, u_x + u_y - u = 0 \tag{5}$$

Costruzione della caratteristica passante per il punto (x_0, y_0)

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(s) = e^x \\ y'(s) = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array} \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{l} x(s) = -\log(e^{-x_0} - s) \\ y(s) = y_0 + s \end{array} \right.$$

Osserviamo che

$$\frac{\partial u[x(s), y(s)]}{\partial s} = u_x x'(s) + u_y y'(s) = e^{x(s)} u_x[x(s), y(s)] + u_y[x(s), y(s)]$$

da cui, posto

$$U(s) = u[x(s), y(s)], \quad U(0) = u(x_0, y_0)$$

l'equazione (5) diventa

$$U'(s) - U(s) = 0$$

da cui

$$U(s) = U(0)e^s \quad \to \quad U(s) = u(x_0, y_0)e^s \tag{6}$$

Nel caso che la condizione iniziale sia

$$u(x, 0) = g(x)$$

scelto s_0 tale che $y(s_0) = 0$, cioé

$$s_0 = -y_0$$

si ha

$$U(s_0) = u(x_0, y_0)e^{s_0} \quad \to \quad u(x_0, y_0) = e^{y_0} u(-\log(e^{-x_0} + y_0), 0) \quad \to$$
$$\to \quad u(x_0, y_0) = e^{y_0} g(-\log(e^{-x_0} + y_0))$$

da cui, togliendo i zeretti....

$$u(x, y) = e^y g(-\log(e^{-x} + y))$$

Secondo esempio

$$y u_x + x u_y + 2xy = 0 \tag{7}$$

Consideriamo la caratteristica uscente dal punto (x_0, y_0)

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(s) = y & x(0) = x_0 \\ y'(s) = x & y(0) = y_0 \end{array} \right. \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{l} x(s) = Ae^s + Be^{-s} \\ \\ y(s) = Ae^s - Be^{-s} \end{array} \right.$$

con

$$A = \frac{1}{2}(x_0 + y_0), \quad B = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$$

Posto $U(s) = u(x(s), y(s))$ l'equazione (7) diventa

$$U'(s)+2x(s)y(s) = 0 \quad \to \quad U(s) = U(0) - \int_0^s 2\left(A^2e^{2\sigma} - B^2e^{-2\sigma}\right) d\sigma = 0$$

da cui

$$U(s) = U(0) + A^2(e^{2s} - 1) + B^2(e^{-2s} - 1) = 0$$

La curva caratteristica interseca la retta $y = 2x$ quando

$$Ae^s - Be^{-s} = 2\left(Ae^s + Be^{-s}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2s} = -\frac{3B}{A}$$

In tale valore s pertanto la precedente relazione diventa

$$U(s) = U(0) + A^2\left(-\frac{3B}{A} - 1\right) + B^2\left(-\frac{A}{3B} - 1\right) = 0$$

Tenuto conto inoltre che, per tale s riesce

$$U(s) = u(x(s), y(s)) = 2x(s)^2$$

si ha

$$2\left(Ae^s + Be^{-s}\right) = U(0) + A^2\left(-\frac{3B}{A} - 1\right) + B^2\left(-\frac{A}{3B} - 1\right) = 0$$

sviluppato il primo quadrato, e tenuto conto della espressione di e^{2s} si ottiene,

$$U(0) = -A^2 - B^2 - 6AB \quad \to$$

$$\to \quad u(x_0, y_0) = -\left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x_0 - y_0)\right)^2 - 6\frac{1}{4}(x_0^2 - y_0^2)$$

che, semplificando conduce a

$$u(x, u) = y^2 - 2x^2$$

Indice