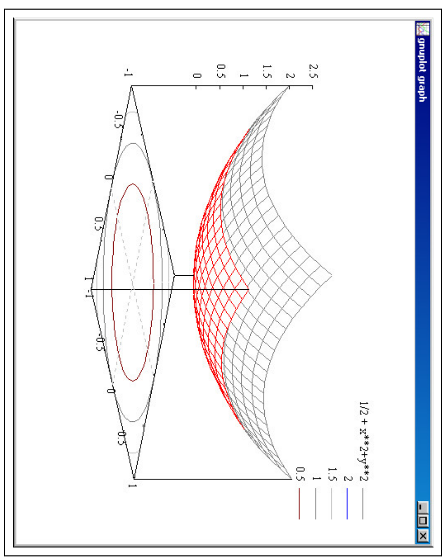
FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

esercizi *2004 - 2006*



prof. L.Lamberti
http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti

Esercizi del Corso di **Funzioni di piú variabili**
Corso di Laurea In Fisica
anni accademici 2004, 2005 e 2006

Il disegno di copertina, il grafico del paraboloide

$$z = \frac{1}{2} + x^2 + y^2,$$

sul quadrato $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ con valori $z \in [-0.1, 2.5]$ é stato realizzato con GnuPlot,versione 4.0 con il seguente programma

```
gnuplot> set xrange [-1:1]
gnuplot> set yrange [-1:1]
gnuplot> set zrange [-0.1:2.5]
gnuplot> set isosamples 20,20
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> set zeroaxis
gnuplot> set contour base
gnuplot> unset mouse
gnuplot> splot 1/2 + x**2+y**2
```

Appunti rivisti 5 gennaio 2007

Indice

Parte 1

Le esercitazioni 2004

CAPITOLO 1

Foglio 1

1. Esercizio

Disegnare i sottoinsiemi del piano

$$|x| + |y| = n, \quad n = 1, 2, 3$$

$$|x| + |y| \leq 1, \quad \sqrt{3}|x| + |y| \ < \ 1$$

$\boxed{\text{Soluzione 1}}$

Tenuto conto che

$$| \pm a| = |a|, \qquad \forall a \in R$$

si riconosce che, nell'Esercizio 1, si tratta di curve e/o domini

simmetrici

rispetto all'origine.
Basta quindi limitarsi a riconoscerne la forma nel primo quadrante e, quindi, replicare per simmetria la forma ottenuta negli altri quadranti:

- $x+y = n$ rappresenta nel primo quadrante il segmento da $(0, n)$ ad $(n, 0)$: complessivamente, cioé eseguite le simmetrie rispetto all'origine, si ottengono tre quadrati centrati nell'origine e con i vertici sugli assi, vedi Figura 1.
- $|x| + |y| \leq 1$ rappresenta il quadrato con il centro nell'origine e un vertice in $(1, 0)$, lati e vertici inclusi, vedi Figura 2.
- $\sqrt{3}|x| + |y| \ < \ 1$ rappresenta il rombo con i vertici nei punti $(0, \pm 1)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, lati e vertici inclusi, vedi Figura 3.

2. Esercizio

Disegnare il sottinsieme di $\mathbf{R^2}$

$$E \equiv \{(x, y) \quad \max(|x + y|, |2y - 2x|) < 2\}$$

Controllare che il seguente insieme sia un esagono

$$F_1 \equiv \{(x, y) \quad \max(|y|, |y| + |x|) \leq 1\}$$

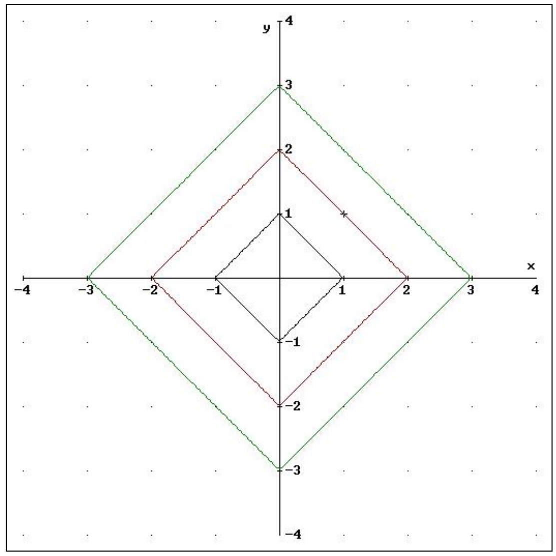


FIGURA 1. $|x| + |y| = n, \quad n = 1, 2, 3$

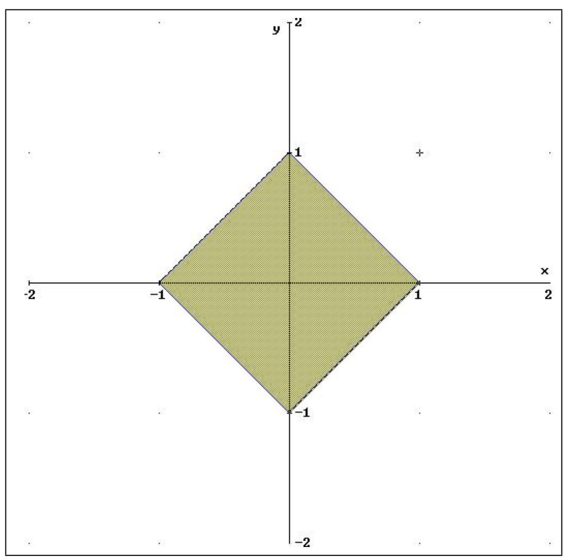


FIGURA 2. $|x| + |y| \leq 1$

Cosa bisogna chiedere sui parametri a e b affinché

$$F_2 \equiv \{(x, y) \quad \max(a|y|, |y| + b|x|) \leq 1\}$$

sia un esagono regolare ?

$\boxed{\text{SOLUZIONE 2}}$

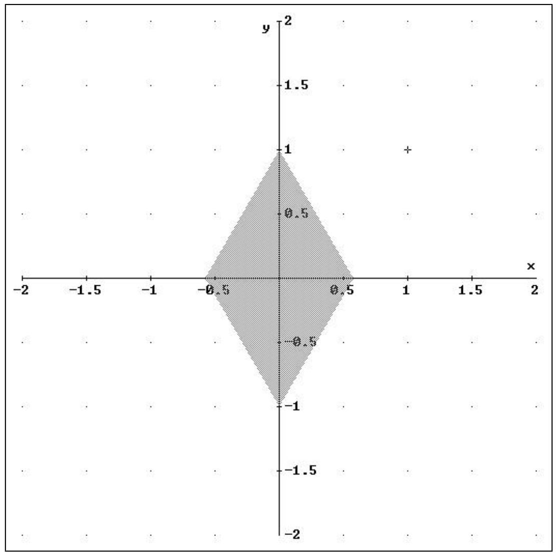


FIGURA 3. $\sqrt{3}|x| + |y| < 1$, frontiera esclusa

- $\max(|x+y|, |2y-2x|) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x+y < 2 \\ -1 < y-x < 1 \end{cases}$

  Disegnare l'insieme soluzione del sistema equivale a
  - disegnare l'insieme $A = \{-2 < x+y < 2\}$
  - disegnare l'insieme $B = \{-1 < y-x < 1\}$
  - disegnare l'intersezione $A \cap B$

  La prima coppia di diseguaglianze, l'insieme A, individua la striscia di piano delimitata dalle due rette

  $$y = -x-2, \quad y = -x+2$$

  La seconda, l'insieme B, la striscia delimitata dalle due rette

  $$y = x-1, \quad y = x+1$$

  vedi Figure 2.

  L'intersezione, $A \cap B$, individua un quadrilatero che, tenuto conto che le due coppie di rette sono a due a due ortogonali, sará un rettangolo, posto nel piano con i lati inclinati a 45 rispetto agli assi, vedi Figura 5.

  I vertici sono le quattro intersezioni delle quattro rette tra loro.
- $\max(|y|, |y|+|x|) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+|y| < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$

  La prima condizione indica il quadrato con i vertici in $(\pm 1, 0), \quad (0, \pm 1)$

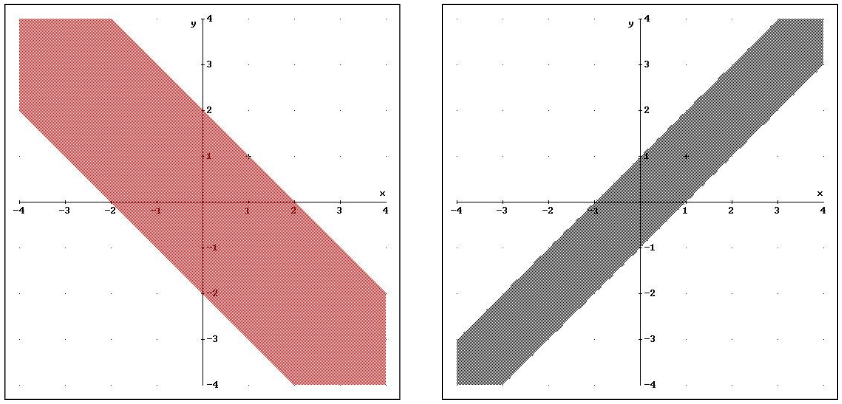


Figura 4. a) $|x+y|<2$ b) $|y-x|<1$

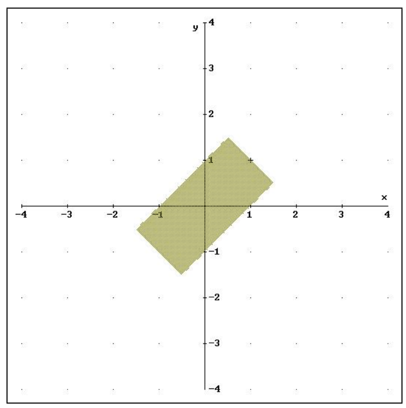


Figura 5. $\max(|x+y|, |2y-2x|)<2$

La seconda indica la striscia delimitata dalle due rette

$$y=1, \quad y=-1$$

L'intersezione é ancora il quadrato citato (un esagono un po' discutibile...!), vedi Figura 6.

- $\max(a|y|, |y|+b|x|) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |y|+b|x|<1 \\ -\frac{1}{a}<y<\frac{1}{a} \end{cases}$

  La retta $y+bx=1$ deve essere un lato di esagono regolare, quindi deve formare con l'asse x un angolo di 120 : quindi $b=\sqrt{3}$

  L'intersezione tra la retta $ay=1$ e la retta $y+\sqrt{3}x=1$ deve avere ascissa pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $a=2$. vedi Figura 7.

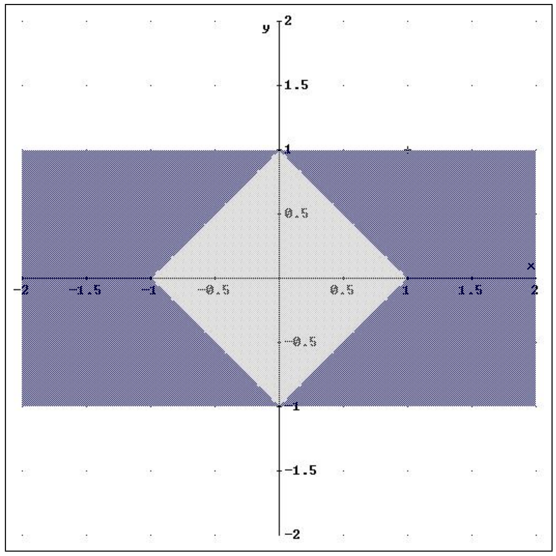


FIGURA 6. $\max(|y|, |y| + |x|) \leq 1$

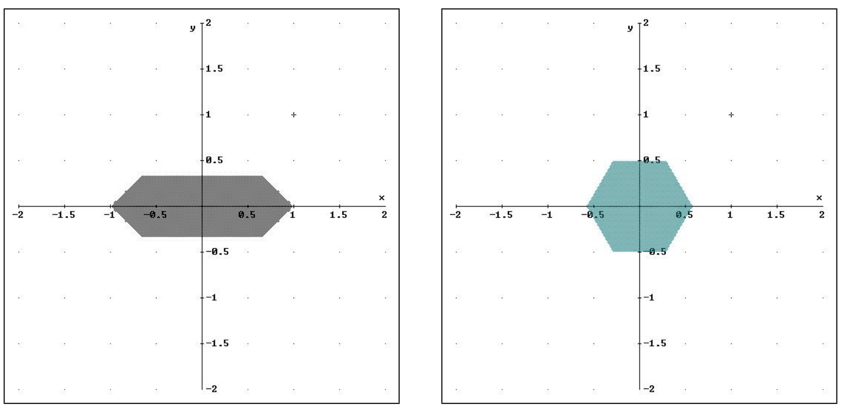


FIGURA 7. a)$\max(3|y|, |y| + |x|) \leq 1$ b) $\max(2|y|, |y| + \sqrt{3}|x|) \leq 1$

3. Esercizio

Determinare il segno e l'insieme di definizione delle funzioni

$$\sqrt{xy + y^2}, \qquad \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}, \qquad \ln(4 - x^2 - 9y^2).$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE 3}}$

- $\sqrt{xy + y^2}$: $\Rightarrow y.(x+y) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$

  Si tratta dell'unione di due intersezioni di due semipiani, vedi

Figura 3.

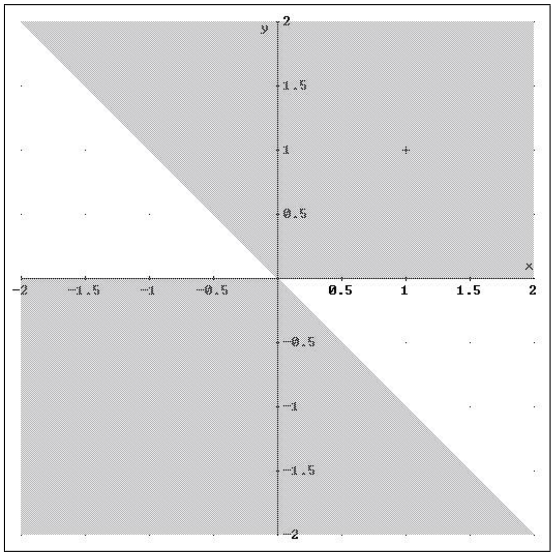


FIGURA 8. $y.(x+y) \geq 0$

- $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2} :\Rightarrow \{x^2-4 \geq 0\} \cap \{4-y^2 \geq 0\}$
  Si tratta dell'insieme (sconnesso) :
  $$\{-2 \leq y \leq 2, x \leq -2\} \cup \{-2 \leq y \leq 2, x \geq 2\}$$
  vedi Figura 9.

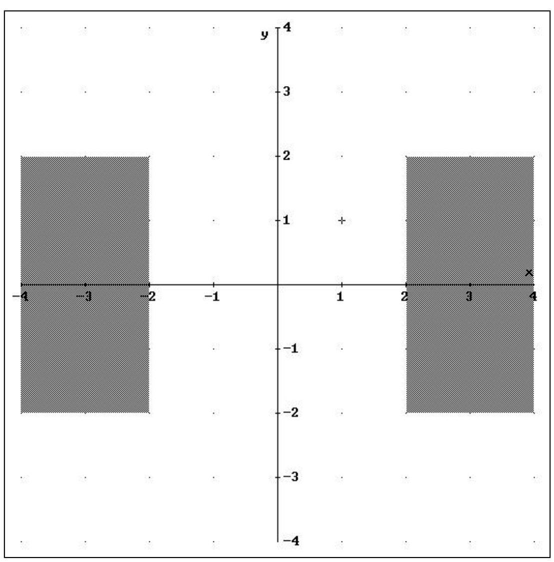


FIGURA 9. $\{x^2-4 \geq 0\} \cap \{4-y^2 \geq 0\}$

- $\ln(4 - x^2 - 9y^2) :\Rightarrow x^2 + 9y^2 < 4$
  Si tratta dell'interno dell'ellisse canonico di centro l'origine, semiassi $a = 2, b = \frac{2}{3}$, vedi Figura 10.

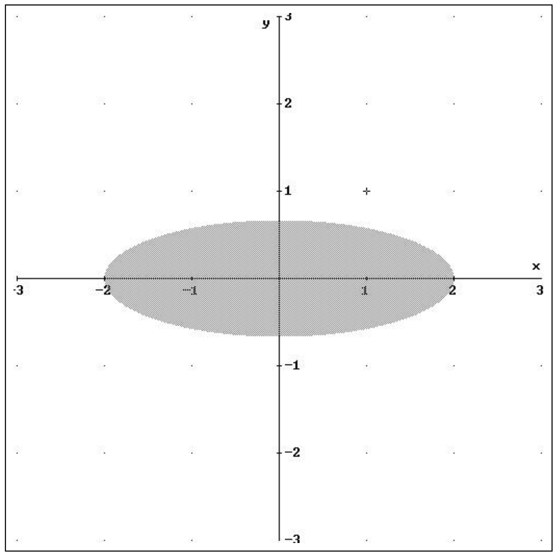


FIGURA 10. $x^2 + 9y^2 < 4$

4. Esercizio

Consideriamo la successione $\{x_n, y_n\}$ di punti del piano assegnata ricorsivamente al modo seguente:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n), & y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \end{array}$$

- *Disegnare i primi tre punti P_0, P_1, P_2*
- *Esaminare se l'insieme $E = \{P_0, P_1, ...\}$ formato da tali punti sia o meno limitato*
- *Decidere se la successione $\{P_n\}$ sia convergente.*
- *Esaminare se l'insieme E precedentemente introdotto sia o meno chiuso.*

$\boxed{\text{Soluzione 4}}$

- $$\{\{1, 1\}, \{0, 1\}, \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, \{-\frac{1}{2}, 0\}, \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}\}$$

- É facile riconoscere che tutti i termini della successione hanno coordinate che soddisfano la diseguaglianza

$$|x_n| \leq 1, \quad |y_n| \leq 1$$

Infatti, ragionando per induzione, si riconosce che:
  - il primo punto $P_0 = \{1, 1\}$ ha coordinate che soddisfano tale diseguaglianza,
  - se tale diseguaglianza é soddisfatta da P_n allora, di conseguenza, é soddisfatta anche da P_{n+1}

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(|x_n| + |y_n|) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{2}(|x_n| + |y_n|) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

- Tenuto conto che $P_2 = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}\}$ lo stesso ragionamento precedente, basato sul principio di induzione, permette di riconoscere che tutti i punti $\{P_n = (x_n, y_n)\}, \quad n \geq 2$ soddisfano la diseguaglianza

$$|x_n| \leq \frac{1}{2}, \quad |y_n| \leq \frac{1}{2},$$

tutti quelli $\{P_n = (x_n, y_n)\}, \quad n \geq 4$ soddisfano la diseguaglianza

$$|x_n| \leq \frac{1}{4}, \quad |y_n| \leq \frac{1}{4},$$

ecc. tenuto conto che

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n, \quad y_{n+2} = \frac{1}{2}x_n$$

Quindi é evidente che la successione $\{P_n\}$ ha limite l'origine $O = (0, 0)$

- Il punto limite $O = (0, 0)$ non appartiene alla successione: se infatti un punto $P_{n_0} = (x_{n_0}, y_{n_0})$ fosse l'origine, tale sarebbe anche il precedente P_{n_0-1} e cosí via fino al primo $P_0 \neq O$

Quindi l'insieme $E = \{P_0, P_1, ...\}$ non é chiuso. Si noti (naturalmente) che E non é neanche aperto: si tratta di un insieme del piano che non é

né chiuso né aperto !

5. Esercizio

Sia $g(x,y) = x^2 + y^2$, fissato un punto $P = (\alpha, \beta)$ e un numero positivo ϵ, determinare il raggio di un disco D di centro P tale che

$$(x,y) \in D \Rightarrow |g(x,y) - g(\alpha,\beta)| < \epsilon.$$

Si puó fissato $\epsilon > 0$ determinare uno stesso raggio buono in corrispondenza a qualsiasi punto $P = (\alpha, \beta)$?

Soluzione 5

- Indicato come di consueto con $r^2 = x^2 + y^2$ e con $R^2 = \alpha^2 + \beta^2$ riesce $|g(x,y) - g(\alpha,\beta)| = |r^2 - R^2|$ da cui

  $$|r^2 - R^2| < \epsilon \Leftrightarrow R - \sqrt{R^2 - \epsilon} < r < \sqrt{R^2 + \epsilon} - R$$

  ovvero, tenuto conto che dei due estremi dell'intervallo il piú vicino a R é quello di destra, si deve avere

  $$|r - R| < \sqrt{R^2 + \epsilon} - R$$

  L'intorno di (α, β) sufficiente é quello di raggio

  $$\delta_\epsilon = \sqrt{R^2 + \epsilon} - R$$

  Riesce quindi

  $$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} < \delta_\epsilon \Rightarrow |g(x,y) - g(\alpha,\beta)| < \epsilon$$

- Tale raggio δ_ϵ dipende anche da R, cioé dal punto (α, β).
  É facile riconoscere che

  $$\lim_{R \to +\infty} \left(\sqrt{R^2 + \epsilon} - R \right) = \lim_{R \to +\infty} \frac{\epsilon}{\sqrt{R^2 + \epsilon} + R} = 0$$

- Quindi non esiste un $\delta_\epsilon > 0$ buono per tutti i punti (α, β).
- Il grafico della funzione $g(x,y)$ é la superficie di rotazione della parabola $y = x^2$ intorno all'asse, vedi Figura 11.

6. Esercizio

Disegnare il grafico di

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & se \quad x^2 + y^2 \geq 1 \\ \\ \sqrt{x^2 + y^2} & se \quad x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

e dire se é continua in $\boldsymbol{R}^2$

Soluzione 6

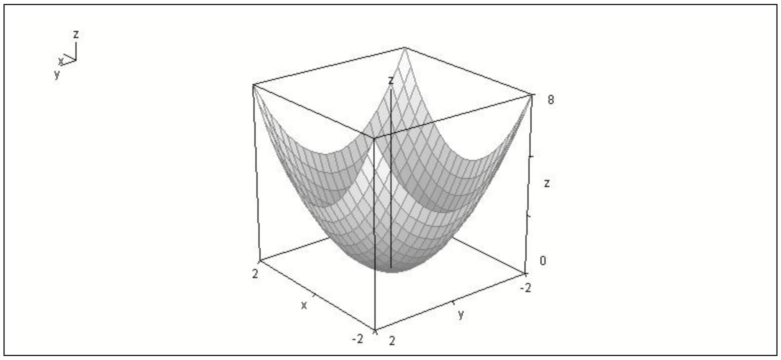


FIGURA 11. $z = x^2 + y^2, \quad |x| < 2, |y| < 2$

La funzione $f(x, y)$ assegnata é, di fatto una funzione di una sola variabile, la $r^2 = x^2 + y^2$

$$g(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^2} & \text{se} \quad r^2 \geq 1 \\ \\ r & \text{se} \quad 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

Funzione evidentemente continua anche nel punto 1. Il grafico della funzione reale di una variabile reale $y = g(x)$ é quello di Figura 12.

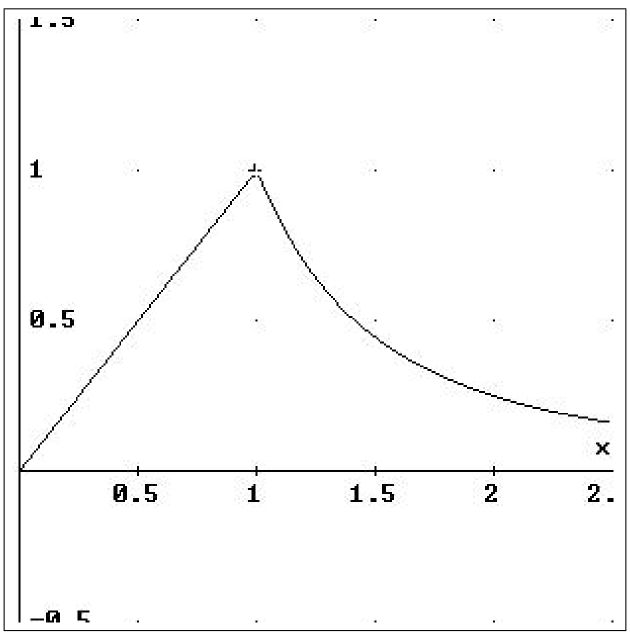


FIGURA 12. $y = g(x), \quad x > 0$

Il grafico richiesto é quello della superficie di rotazione di $g(x)$ intorno all'asse y, vedi Figura 13.

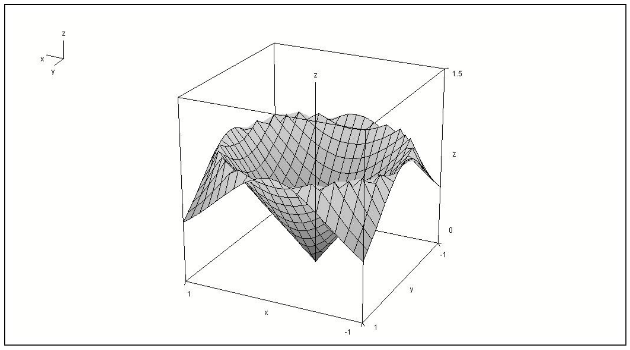


FIGURA 13. $z = f(x, y), \quad |x| < 1, |y| < 1$

7. Esercizio

Disegnare qualitativamente le curve di equazioni parametriche

$$\phi : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3, \quad \phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\phi : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos t, 2\sin t)$$

Soluzione 7

La prima é la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.
La seconda é l'ellisse di semiasse x 1 e semiasse y 2.

8. Esercizio

Fornire una rappresentazione parametrica

- *del segmento di estremi* $(\sqrt{2}, \pi)$ *e* $(2, 0)$,
- *dell'arco di circonferenza di centro l'origine, raggio 1 contenuto nel primo quadrante,*
- *dell'arco di ellisse* $3x^2 + 5y^2 - 6 = 0$ *contenuto nel secondo quadrante.*

Soluzione 8

Segmento:

$$\begin{cases} x = & \sqrt{2} + t(2 - \sqrt{2}) \\ y = & \pi - t\pi \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

Arco di circonferenza:

$$\begin{cases} x = & \cos(t) \\ y = & \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

Arco di ellisse:

$$\begin{cases} x = & \sqrt{2}\cos(t) \\ y = & \sqrt{\frac{6}{5}}\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [\pi/2, \pi]$$

9. Esercizio

Determinare l'insieme di definizione e disegnare le curve di livello delle funzioni seguenti:

$$(x+y)^2, \quad y^3, \quad e^{x^2+y^2}, \quad \ln(x^2+4y^2).$$

Dedurne un grafico approssimativo.

Soluzione 9

- $(x+y)^2$: sono le rette $x+y=\sqrt{c}, \quad \forall c \geq 0$
- $e^{x^2+y^2}$: sono le circonferenze $x^2+y^2=\ln(c), \quad \forall c > 1$
- $\ln(x^2+4y^2)$: sono le ellissi $x^2+4y^2=c, \quad \forall c \geq 0$

Per quanto concerne il grafico (prospettico) servirsi di GnuPlot:

```
gnuplot>  splot (x+y)**2
```

ecc.

La scelta del grafico viene perfezionata servendosi delle opzioni offerte dalle tendine

```
Axes          3D
```

CAPITOLO 2

Foglio 2

1. Esercizio

Disegnare gli insiemi

$$E_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\} \cap \left|x\right| > \tfrac{1}{2}\}$$

$$E_2 = \{(x, y) : 0 < y < x \leq 4\} \cap \left\{y \neq \tfrac{x}{2}\right\}$$

$$E_3 = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\} \cup \{x > 1\}$$

e riconoscere se sono aperti o né aperti né chiusi; se sono limitati, se sono connessi; se sono convessi.

SOLUZIONE 1

E_1 é intersezione del cerchio aperto di centro l'origine e raggio $r = 2$, $x^2+y^2 < 4$, con i due semipiani $x < -1/2$ e $x > 1/2$: si tratta pertanto delle due calotte circolari simmetriche di cui in Figura 1.

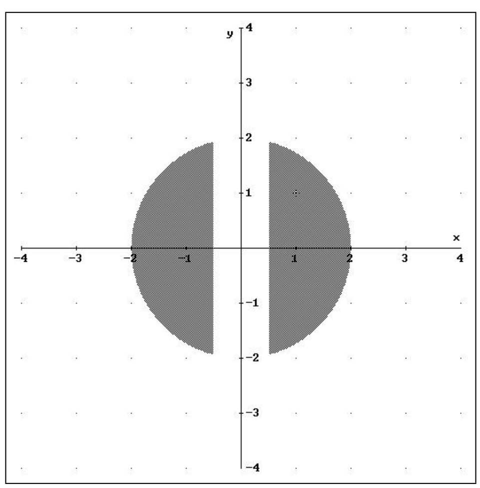


FIGURA 1. $\{x^2 + y^2 < 4\} \cap \{|x| > 1/2\}$

L'insieme E_1 é:

- aperto
- limitato
- non connesso

E_2 é il triangolo del primo quadrante

$$0 < x \leq 4, \quad 0 < y < x$$

privato dei punti che appartengono alla retta $y = x/2$, vedi Figura 2.

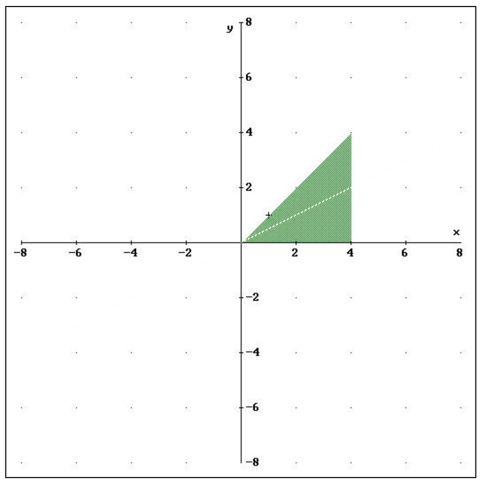


FIGURA 2. $\{0 < y < x \leq 4\} \cap \{y \neq x/2\}$

La frontiera $\mathcal{F}E_2$ é formata dai lati del triangolo rettangolo e dal segmento $\{0,0\} - \{4,2\}$ della retta $y = x/2$: parte di tale frontiera (il cateto verticale) appartiene ad E_2 e parte (gli altri lati e il segmento attraverso) non appartengono ad E_2.
Quindi E_2 non é né aperto né chiuso.
L'insieme E_2 é:

- né aperto né chiuso,
- é limitato,
- non é connesso.

La chiusura $\overline{E_2}$ é il triangolo rettangolo, inclusi i tre suoi lati e incluso il segmento traverso che era stato tolto: $\overline{E_2}$ pertanto é chiuso, limitato e convesso (quindi anche connesso).

E_3 é l'unione della regione aperta racchiusa dall'ellisse di centro l'origine e semiassi $a_x = 2$ e $b_y = 3$ col semipiano aperto $x > 1$, vedi Figura 3.

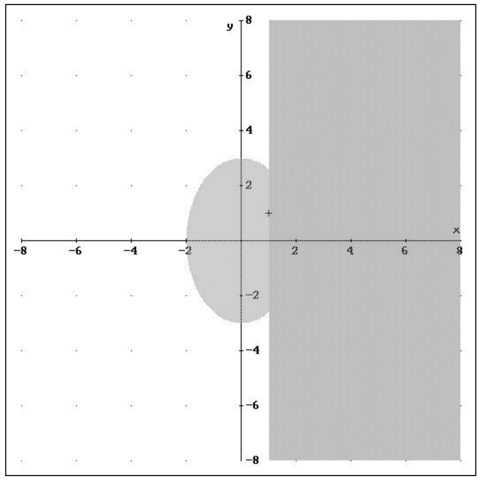


FIGURA 3. $\{x^2/4 + y^2/9 < 1\} \cup \{x > 1\}$

L'insieme E_3 é:

- aperto,
- non limitato,
- non convesso,
- connesso.

2. Esercizio

Siano $f(x,y) = y\log(x+1)$ *e* $g(x,y) = \sqrt{2y - x^2}$. *Determinare e disegnare l'insieme di definizione delle funzioni* $f,\ g,\ f+g,\ f/g$.

SOLUZIONE 2

A , insieme di definizione di $f(x,y) = y\log(x+1)$: é il semipiano aperto $x + 1 > 0$.

B, insieme di definizione di $g(x,y) = \sqrt{2y - x^2}$ é la regione di piano $y \geq x^2/2$, regione chiusa al di sopra della parabola $y = x^2/2$, vedi Figura 4.

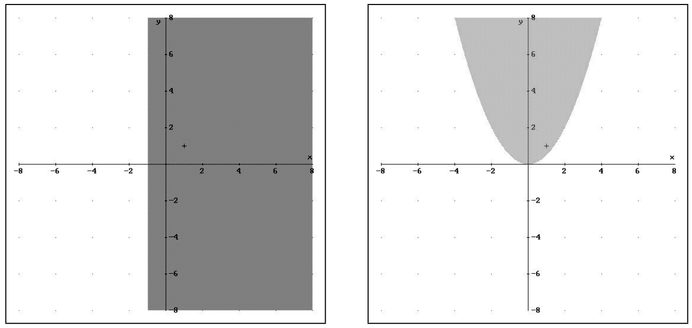


FIGURA 4. Gli insiemi A e B

L'insieme di definizione C di $f+g$ é l'intersezione $A\cap B$, vedi Figura 5.

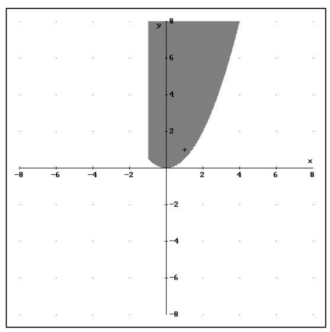


FIGURA 5. L'insieme di definizione di $f+g$

L'insieme C non é né aperto né chiuso.
L'insieme di definizione D di f/g é l'intersezione di A con B^0, avendo indicato con B^0 l'insieme B privato della frontiera $2y-x^2=0$
L'insieme D é aperto.
Tutti i quattro insiemi A,B,C,D sono

- non limitati,
- convessi, e quindi connessi.

3. Esercizio

Determinare l'insieme in cui la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} & se \quad y\neq 0\\[2ex] 0 & se \quad y=0\end{cases}$$

é continua.
Disegnare nel piano xy le curve di livello $\{f(x, y) = c\}$.

$\boxed{\text{Soluzione 3}}$

La funzione $f(x, y)$ é certamente continua in tutti i punti dei due semipiani aperti $y \neq 0$: resta quindi da esaminare cosa succede sulla retta $y = 0$, l'asse delle x, che li separa.

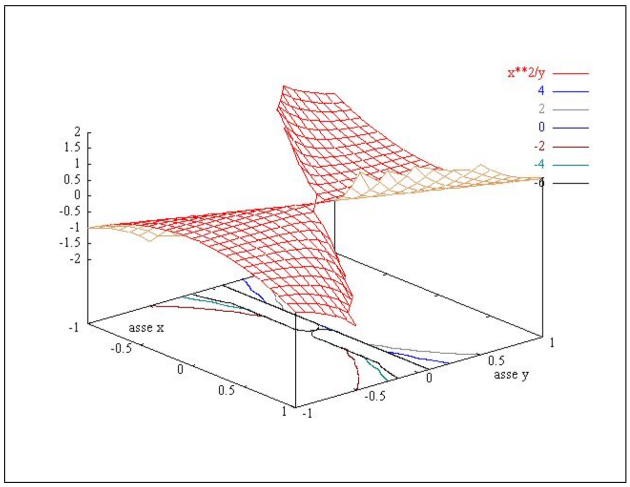


Figura 6. Il grafico prospettico della x^2/y

- é evidente che nei punti $\{x_0, 0\}$ con $x_0 \neq 0$ la funzione f non puó essere continua
  - $f(x_0, 0) = 0$
  - $|f(x_0, \pm x_0^2/n)| = n$, valori relativi a punti $(x_0, \pm x_0^2/n)$ molto vicini a $(x_0, 0)$ e valori molto grandi per n grande ...
- nell'origine $\{0, 0\}$ stesso discorso
  - $f(0, 0) = 0$
  - $|f(\pm 1/n, \pm(1/n)^3)| = n$ valori relativi a punti $(\pm 1/n, \pm(1/n)^3)$ molto vicini all'origine, valori molto grandi per n grande...

Se ne conclude che la f é discontinua in tutti i punti della retta $y = 0$.
Le linee di livello: cominciamo quelle per $c \neq 0$

$$f(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{c}x^2, \quad x \neq 0$$

si tratta di parabole private del vertice, sempre piú aperte (schiacciate) piú é grande $|c|$, vedi Figura 7.

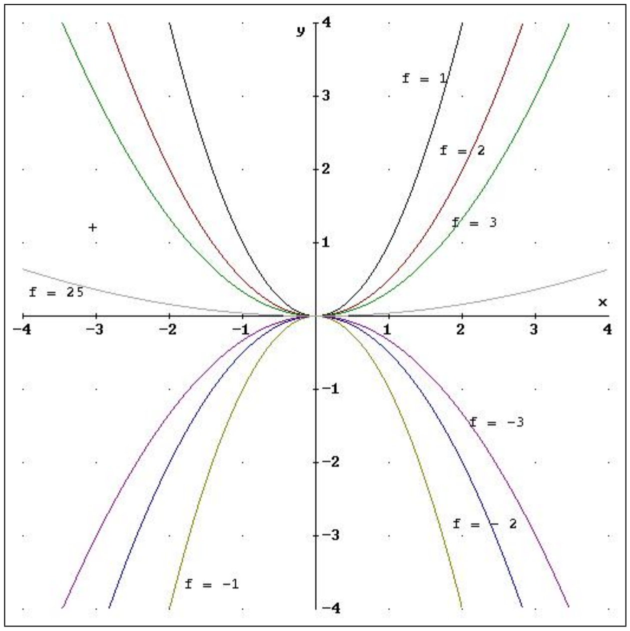


FIGURA 7. Le linee di livello della $f(x,y)$ dell'Esercizio 3

La linea di livello $f(x,y) = 0$ é formata dagli assi $x = 0$ e $y = 0$.

4. Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$$

i: *determinare l'insieme D in cui f é definita e dire se é aperto;*
ii: *esiste*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad ?$$

iii: *Disegnare nel piano xy le curve di livello $\{f(x,y) = c\}$.*
iv: *Determinare l'insieme $f(D)$.*

SOLUZIONE 4

- la funzione $f(x,y)$ é definita per $x^4+y^2 \neq 0$ ovvero per $\{x,y\} \neq \{0,0\}$, insieme aperto del piano R^2
- non esiste il limite nel punto $\{0,0\}$: infatti
  - sui punti dell'asse delle x : $\quad y = 0$, diversi dall'origine, la funzione vale 1

- sui punti $y = x^2$, una parabola passante per l'origine del piano R^2, la funzione vale $1/2$
- poiché ci si puó avvicinare all'origine sia lungo l'asse x sia lungo la parabola $y = x^2$ si vede che si trovano punti $\{x, y\}$ vicini all'origine sui quali la funzione vale 1 e punti altrettanto vicini all'origine sui quali la funzione vale $1/2$. Non cé quindi alcuna stabilizzazione dei valori della funzione mano mano che $\{x, y\}$ si avvicina a $\{0, 0\}$, ovvero non esiste il limite per $\{x, y\} \to \{0, 0\}$.

• Le linee di livello $f(x, y) = c$:
  - $c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
  - $c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = cx^4 + cy^2 \quad y^2 = \frac{1-c}{c}x^4$
  -
    * $c = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$
    * $\dfrac{1-c}{c} > 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\dfrac{1-c}{c}}x^2$
    * $\dfrac{1-c}{c} < 0 \quad \Rightarrow \quad \{x, y\} \in \varnothing$

• Determinare $f(D)$ equivale a riconoscere per quali c l'insieme di livello $f(x, y) = c$ sia non vuoto: l'indagine precedente sulle linee di livello ha riconosciuto vuoti gli insiemi di livello relativi a valori c per i quali riuscisse

$$\frac{1-c}{c} < 0$$

In altri termini i valori c effettivamente presi, quelli che quindi compongono $f(D)$ sono quelli per i quali

$$\frac{1-c}{c} \geq 0$$

Che sono l'intervallo chiuso $[0, 1]$.

Un'indagine diretta sui possibili valori prodotti dalla funzione $f(x, y)$ avrebbe consentito di riconoscere che

• $f(x, y) \geq 0$ e quindi $f(D)$ é formato da numeri $z \geq 0$
• $f(x, y) \leq 1$ e quindi $f(D)$ é formato da numeri $z \leq 1$
• i valori $z = 0$ e $z = 1$ sono effettivamente prodotti dalla funzione,
• quindi $f(D) \subseteq [0, 1]$,
• preso un qualunque $c \in (0, 1)$ é facile riconoscere che ci sono punti in cui

$$f(x, y) = c, \quad \leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1-c}{c}x^4$$

5. Esercizio

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sia* f *definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y) - 1 & x+y < 0, \\ ax + by + c & x+y \geq 0 \end{cases}$$

Per quali a, b, c *la funzione* f *é continua in* $\mathbb{R}$ *?*

$\boxed{\text{Soluzione 5}}$

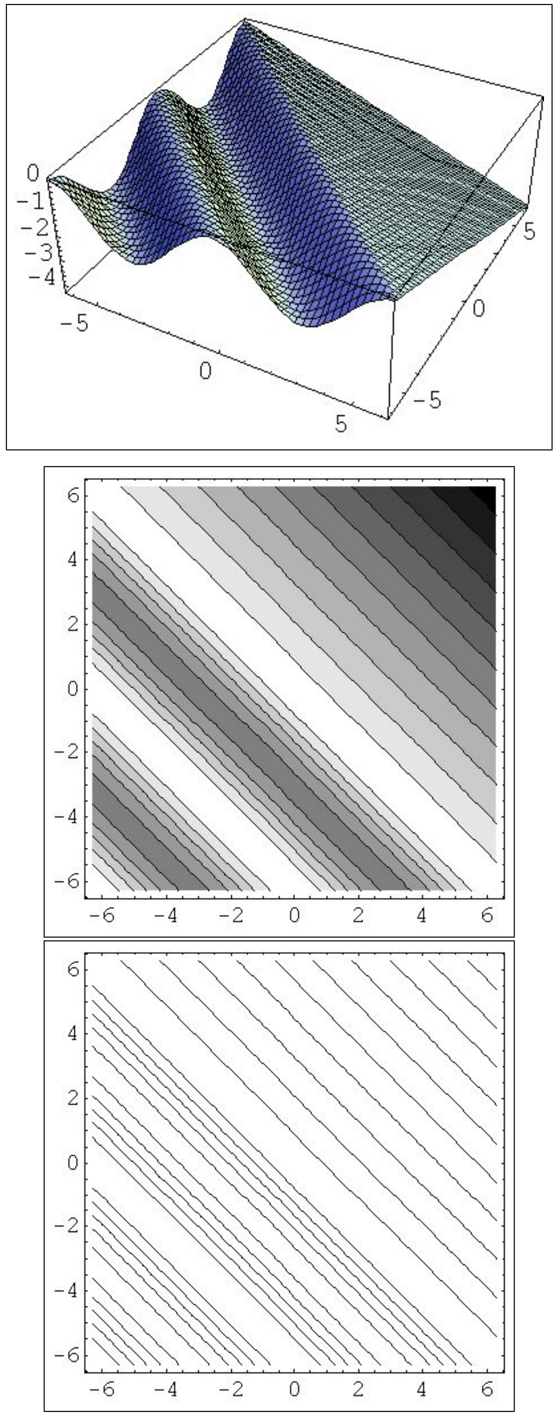


FIGURA 8. Grafico prospettico, scala di grigi e linee di livello della funzione dell'Esercizio 5 con $a = b = -1/3, \quad c = 0$

La funzione $f(x,y)$ é definita *incollando* due funzioni continue in due semipiani complementari: gli unici punti di discontinuitá possono quindi trovarsi sulla retta $x+y=0$ che separa i due semipiani.
Il raccordo corretto consiste nel coincidere, su tale retta, delle due espressioni

$$\cos(x+y)-1 \quad \text{e} \quad ax+by+c$$

La prima su tale retta vale 0 e, quindi, altrettanto deve valere la seconda: cioé

$$x+y=0 \quad \Rightarrow \quad ax+by+c=0$$

Tenuto conto che

$$x+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-x$$

dovrá aversi

$$ax-bx+c=0 \quad \forall x$$

situazione che corrisponde a:

$$\begin{cases} a = & b \\ c = & 0 \end{cases}$$

che sono le condizioni che i tre parametri a,b,c devono soddisfare perché la $f(x,y)$ sia continua.

6. Esercizio

Data la funzione $f(x,y)=|x+y|(x-y)$,

- *determinare l'insieme in cui é continua*
- *calcolare il*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\boxed{\text{Soluzione 6}}$

La funzione $f(x,y)=|x+y|(x-y)$ prodotto di funzioni continue in tutto il piano é funzione continua in tutto il piano.

Per quanto concerne il limite richiesto osserviamo prima che, qualunque siano x o y, riesce

$$|x| \le \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

Da tali (ovvie) diseguaglianze si ricava che

$$\begin{cases} |x+y| & \le 2\sqrt{x^2+y^2} \\ |(x-y)| & \le 2\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)| \le 4(x^2+y^2)$$

Riesce pertanto

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{4(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4\sqrt{x^2+y^2}$$

Se ne deduce, per confronto, che il limite richiesto vale 0.

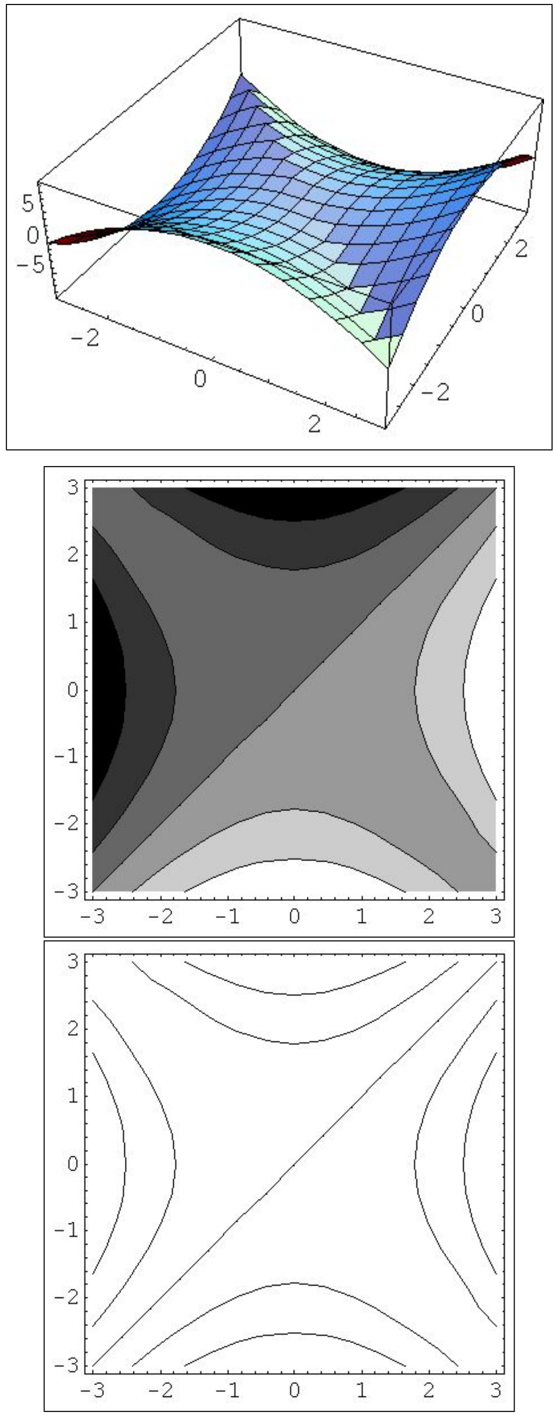


FIGURA 9. Grafico prospettico, scala di grigi e linee di livello della funzione dell'Esercizio 6

7. Esercizio

Sia f la funzione razionale

$$f(x,y) = \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4}.$$

i: *É vero che*

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$$

ii: *Verificare che tuttavia non esiste il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

$\boxed{\text{Soluzione 7}}$

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4} = 1$$

Risultato ovvio se $x = 0$, del tutto naturale se $x \neq 0$.
Risultato analogo per l'altro limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4} = 1$$

tenuto conto che la funzione $f(x,y)$ é simmetrica rispetto alle due variabili $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall x, y$.
Essendo i due (primi) limiti entrambi 1 tali saranno anche i (secondi) limiti richiesti nell'esercizio.
Consideriamo la funzione $f(x,y)$ sui punti di una retta $y = mx$ per l'origine

$$f(x,mx) = \frac{x^4 + m^2x^4 + m^4x^4}{x^4 + m^4x^4} = \frac{1 + m^2 + m^4}{1 + m^4}$$

stesso valore su ogni punto della retta, valore tuttavia diverso da retta a retta... : quindi non c'é stabilizzazione su alcun valore avvicinandosi all'origine !
Il limite richiesto non esiste.
Il fenomeno osservato, si ricordi la funzione prototipo

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ,$$

si incontra in corrispondenza a tutte le funzioni razionali, quozienti di polinomi omogenei dello stesso grado.

CAPITOLO 3

Foglio 3

1. Esercizio

Siano $f_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) = 2xy$*: disegnare (ad esempio con la convenzione delle freccette) i campi vettoriali* ∇f_1 *e* ∇f_2 *dei loro gradienti .*

$\boxed{\textbf{Soluzione 1:}}$

Il gradiente di una funzione $f(x, y)$ é, per definizione, il vettore

$$\nabla f(x, y) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

quindi, nel nostro caso

$$\nabla f_1(x, y) = \{2x, 2y\}, \quad \nabla f_2(x, y) = \{2y, 2x\}$$

La convenzione delle freccette consiste nel disegnare in un certo numero di punti del piano i gradienti della funzione:

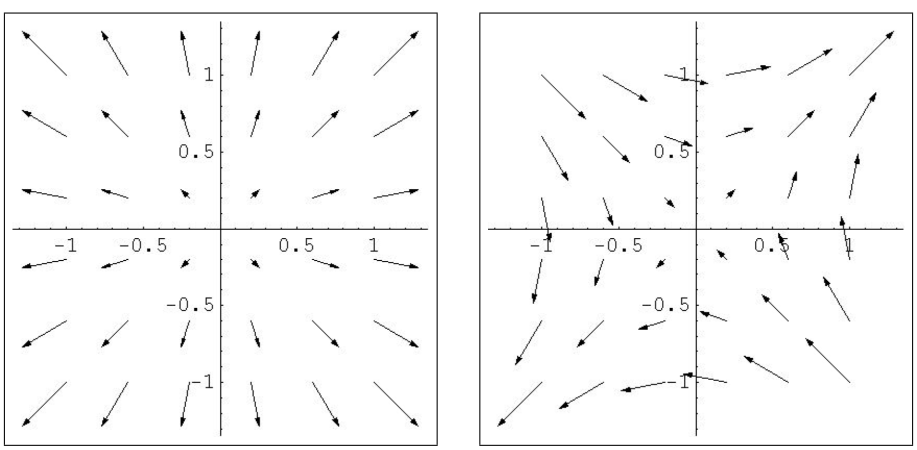


Figura 1. a) $\nabla f_1(x, y) = \{2x, 2y\}$, b) $\nabla f_2(x, y) = \{2y, 2x\}$

2. Esercizio

Sia

$$f(x, y) = x^2 y$$

i): *Disegnare le linee di livello* $\{f(x, y) = c\}$ *per* $c = 0\,,\,1\,,\,2.$
ii): *Calcolare le derivate parziali di* f *nel punto* $(2, 1)$ *e disegnare il gradiente in tale punto.*
iii): *Disegnare la direzione del gradiente in almeno quattro punti presi sulla linea di livello* $f(x, y) = 2$.

Soluzione 2:

La linea di livello $x^2 y = 0$ é costituita da $x = 0$ e da $y = 0$, i due assi cartesiani.
La linea di livello $x^2 y = 1$ é costituita, sul piano xy, dal grafico della funzione

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Analogamente la linea $x^2 y = 2$ é costituita da $y = 2/x^2$.
Le derivate parziali sono

$$f_x(x, y) = 2xy \quad f_x(2, 1) = 4, \qquad f_y(x, y) = x^2 \quad f_y(2, 1) = 4$$

Ne segue

$$\nabla f(2, 1) = \{4,\, 4\}$$

La seguente Figura 2 disegna il vettore gradiente

$$\nabla f(x, y) = \{2xy,\, x^2\}$$

lungo la linea di livello $x^2 y = 2$.

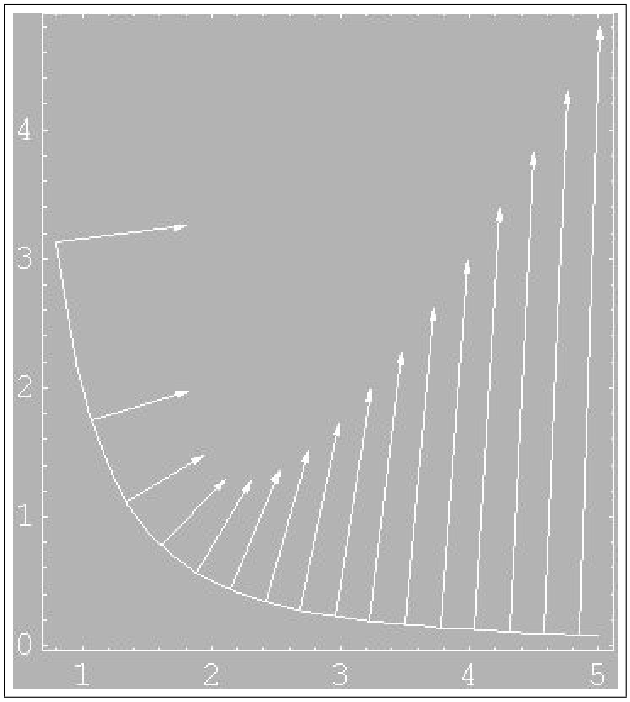


FIGURA 2. Il gradiente di x^2y su punti della linea di livello $x^2y = 2$

3. Esercizio

Siano

$$f(x,y) = 3xy + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y, \quad g(x,y) = 4xy + 4x + 2y^2 - 4y$$

i: *Determinare i punti stazionari o critici delle due funzioni,*
ii: *determinare le matrici hessiane in tali punti,*
iii: *decidere se le immagini $f(\mathbb{R}^2)$ e $g(\mathbb{R}^2)$ sono insiemi limitati e/o connessi e se coincidono con tutto $\mathbb{R}$.*

$\boxed{\textbf{Soluzione 3:}}$

I punti critici o stazionari sono i punti in cui una funzione ha tutte le derivate parziali prime nulle.

$$f(x,y): \quad \begin{cases} 3y + 4 - 8x &= 0 \\ 3x - 4y - 4 &= 0 \end{cases} \quad \to \quad (x,y) = \left(-\frac{4}{23}, -\frac{20}{23}\right)$$

$$g(x,y): \quad \begin{cases} 4y + 4 &= 0 \\ 4x + 4y - 4 &= 0 \end{cases} \quad \to \quad (x,y) = (2, -1)$$

La matrice hessiana é per definizione

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Quindi riferendosi alla prima funzione f si ha

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

mentre, riferendosi alla seconda g si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Si noti come, essendo le derivate seconde costanti, la richiesta di calcolare l'hessiana nei punti critici trovati sia superflua: i polinomi di secondo grado, e tali sono le due funzioni f e g assegnate, hanno matrici hessiane costanti !

Le immagini $f(R^2)$ e $g(R^2)$, immagini dell'insieme connesso R^2 tramite funzioni continue, sono necessariamente degli intervalli: limitati, non limitati, chiusi, aperti, semiaperti... resta da decidere.

Tenuto conto della fondamentale diseguaglianza

$$|x\,y| \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

si ha

$$f(x,y) \leq -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y$$

ovvero

$$f(x,y) \leq -(2.5x^2 - 4x) - (0.5y^2 + 4y)$$

É facile riconoscere che i due addendi

$$-(2.5x^2 - 4x) \qquad -(0.5y^2 + 4y)$$

pensati come parabole, producono valori negativi comunque grandi in modulo, quindi l'immagine $f(R^2)$ non puó che essere una semiretta illimitata negativamente.

Piú facile é l'immagine $g(R^2)$: tenuto conto che

$$g(x,0) = 4x$$

si riconosce che la sola immagine dell'asse x produce tutti i numeri reali. L'immagine $g(R^2)$ non potrá quindi che essere anch'essa tutto R.

4. Esercizio

i: *Determinare i punti critici o stazionari della funzione*

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)(1 - z^2) + z^2$$

ii: *Calcolare la matrice hessiana.*

$\boxed{\textbf{Soluzione 4:}}$

$$\begin{cases} 2x(1 - z^2) & = 0 \\ 2y(1 - z^2) & = 0 \\ 2z(1 - x^2 - y^2) & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (x, y, z) = (0, 0, 0), \\ x^2 + y^2 = 1, \quad z = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2\,(1 - z^2) & 0 & -4\,x\,z \\ 0 & 2\,(1 - z^2) & -4\,y\,z \\ -4\,x\,z & -4\,y\,z & 2 - 2\,(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

5. Esercizio

Sia $p(x, y) = x^3 - 3axy^2 - 3bx^2y$.
Per quali a *e* b *la funzione* $p(x, y)$ *é armonica ?*

$\boxed{\textbf{Soluzione 5:}}$

$$\triangle p(x, y) = p_{xx}(x, y) + p_{yy}(x, y) = 6\,x - 6\,a\,x - 6\,b\,x$$

La funzione é armonica quindi se

$$6\,x - 6\,a\,x - 6\,b\,x = 0 \quad \rightarrow \quad a + b = 1$$

6. Esercizio

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y) & x+y<0, \\ ax+by+c & x+y \geq 0 \end{cases}$$

i): *Per quali a, b, c la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?*
ii): *Per quali a, b, c la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}^2$?*

Soluzione 6:

La continuitá della funzione f corrisponde a che le due espressioni secondo le quali la f é definita nei due semipiani $x+y<0, \quad x+y \geq 0$ si raccordino lungo la linea di separazione $x+y=0$.
Tenuto conto che

$$x+y=0 \quad \rightarrow \quad \sin(x+y)=0$$

dovrá riuscire anche

$$x+y=0 \quad \rightarrow \quad ax+by+c=0$$

Quindi tenuto conto che

$$x+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-x$$

dovrá aversi

$$ax-bx+c=0 \quad \rightarrow \quad a=b, \quad c=0$$

Per quanto concerne la derivabilitá vale un discorso analogo: le due espressioni che definiscono la f nei due semipiani hanno rispettivamente derivate parziali

$$\sin(x+y) \quad \rightarrow \quad \{\cos(x+y), \quad \cos(x+y)\}$$

$$a(x+y) \quad \rightarrow \quad \{a, \quad a\}$$

Esse si raccordano sulla linea di separazione $x+y=0$ se e solo se

$$\cos(0)=a \quad \rightarrow \quad a=1$$

Concludendo: la funzione f assegnata é:

- continua se $a=b$ e $c=0$
- derivabile se $a=b=1$ e, naturalmente $c=0$.

7. Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i): *Dire se è continua.*
ii): *Calcolare le derivate parziali nei punti $(x,y) \neq (0,0)$.*
iii): *Calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali nel punto $(0,0)$.*
iii): *Usando la definizione, studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$.*

Soluzione 7:

L'unico punto in cui f potrebbe essere discontinua é l'origine.
La differenza $|f(x,y) - f(0,0)|$ si maggiora, tenuto conto della nota diseguaglianza $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$, con

$$\frac{|x^2 y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|$$

quantitá evidentemente piccola se $(x,y) \approx (0,0)$.
Quindi la funzione assegnata é continua anche nell'origine.
Le derivate parziali della f nei punti diversi dall'origine si calcolano con le ovvie regole di derivazione delle funzioni razionali:

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= \dfrac{-2\,x^3\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \dfrac{2\,x\,y}{x^2+y^2} \\ \\ f_y(x,y) &= \dfrac{-2\,x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Si tratta ovviamente di espressioni definite fuori dall'origine.

$\boxed{f_x(0,0):}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$\boxed{f_y(0,0):}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

Il fatto che le due derivate parziali esistano e siano nulle nell'origine era del resto prevedibile tenuto conto che la funzione $f(x, y)$ é costante sugli assi, su di essi riesce infatti

$$f(x, 0) = f(0, y) = 1$$

$\boxed{\text{Differenziabilitá:}}$

Se la funzione f fosse differenziabile nell'origine allora dovrebbe riuscire

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

La frazione si riduce, tenuto conto che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, a

$$\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

frazione che, studiata sulle rette $y = mx$ produce

$$\frac{m}{(1 + m^2)\sqrt{1 + m^2}}$$

valori costanti e, per $m \neq 0$, diversi da 0.
Se ne conclude che la funzione assegnata non é differenziabile nell'origine.

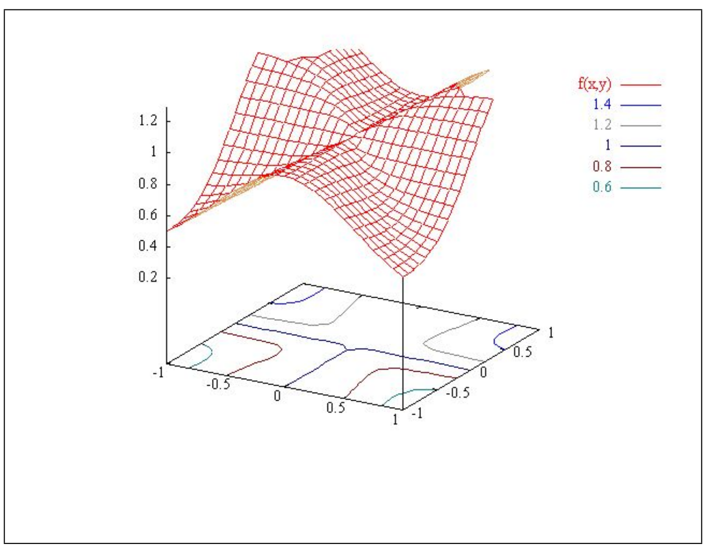


Figura 3. Notate il punto angoloso in corrispondenza a $(0, 0)$

8. Esercizio

Data $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua e derivabile, determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x, y) = \phi(ax + by)$ soddisfi l'equazione

$$f_x(x, y) = f_y(x, y), \quad \forall (x, y) \in R^2.$$

Soluzione 8:

$$f_x(x, y) = a\phi'(ax + by), \quad f_y(x, y) = b\phi'(ax + by)$$

Pertanto

$$f_x(x.y) = f_y(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)\phi'(ax + by) = 0$$

Ne segue

$$a = b \quad \text{o} \quad \phi'(t) = 0\,\forall t \in R$$

La seconda condizione significa, ovviamente, $\phi(t) =$ costante.

9. Esercizio

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2) + b & \text{se} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 & \text{se} \quad x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

i): *Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?*
ii): *Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$?*

Soluzione 9:

Si noti che si tratta di una funzione radiale: la funzione generatrice é

$$g(t) = \begin{cases} a\,t^2 + b & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ (t - 1)^2 & \text{se} \quad t > 1 \end{cases}$$

Il grafico é formato da due parti di parabola: l'incollamento avviene in corrispondenza del punto $t = 1$, sul quale quindi devono raccordarsi. La prima vale $a + b$, la seconda vale 0 e quindi la condizione di raccordo é $a + b = 0$.

Gli unici punti in cui la $f(x,y)$ potrebbe essere discontinua sono i punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ che separa le due regioni.
La f vale, per definizione su tali punti

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2=0$$

quindi altrettanto deve valere l'altra espressione

$$a(x^2+y^2)+b=a+b$$

La funzione f é continua se e solo se

$$a+b=0$$

$\boxed{f_x(1,0):}$

Il punto su cui é richiesta la derivata si trova sulla circonferenza che separa le due regioni di assegnazione: teniamone conto nel fare i rapporti incrementali

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}a\frac{(1+h)^2-1}{h}=2a$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(\sqrt{(1+h)^2}-1)^2}{h}=1$$

Il rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}$$

ha limite se e solo se $2a=1$: in tal caso riesce

$$f_x(1,0)=1$$

$\boxed{f_y(1,0):}$

Il rapporto incrementale che definisce la derivata parziale rispetto ad y si riferisce ad un incremento sulla verticale sopra il punto $(1,0)$, verticale che quindi cade interamente nella regione $x^2+y^2\geq 1$
Quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1,h)-f(1,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h^2}-1)^2}{h}=0$$

Qualunque sia a la f é derivabile parzialmente rispetto ad y nel punto $(1,0)$, e riesce

$$f_y(1,0)=0$$

$\boxed{\text{Riassumendo:}}$

La f é

- continua se $a + b = 0$
- esiste $f_x(1, 0) = 1$ se e solo se $a = 1/2, \quad b = -1/2$
- esiste $f_y(1, 0) = 0$ qualunque siano a e b

CAPITOLO 4

Foglio 4

1. Esercizio

Data la funzione $f(x,y) = |x - 2y|$

- *decidere se é limitata;*
- *decidere in quali punti sia o meno differenziabile;*
- *nei punti in cui non é differenziabile esaminare quali derivate direzionali esistano.*

Soluzione 1:

- La funzione $|x - 2y|$, definita in tutto R^2 non é limitata:
  - i suoi valori, in quanto moduli sono numeri non negativi,
  - basta considerare $f(x,0) = |x|$ per riconoscere che f produce valori comunque grandi.

  L'immagine $f(R^2)$ é la semiretta $[0, +\infty)$.

- $f(x,y)$ coincide, nei due semipiani aperti determinati dalla retta $x - 2y = 0$ con $x - 2y$ oppure con $2y - x$: pertanto f é differenziabile nei due semipiani aperti.

  Sui punti (x,y) della retta $x - 2y = 0$ la f non é differenziabile. Per riconoscerlo basta immaginare il grafico di $f(x,y)$:
  due semipiani che si incontrano a quota $z = 0$ in corrispondenza della retta $x - 2y = 0$ formando tuttavia un angolo.
  Quindi il grafico di f in tali punti non ha piano tangente.

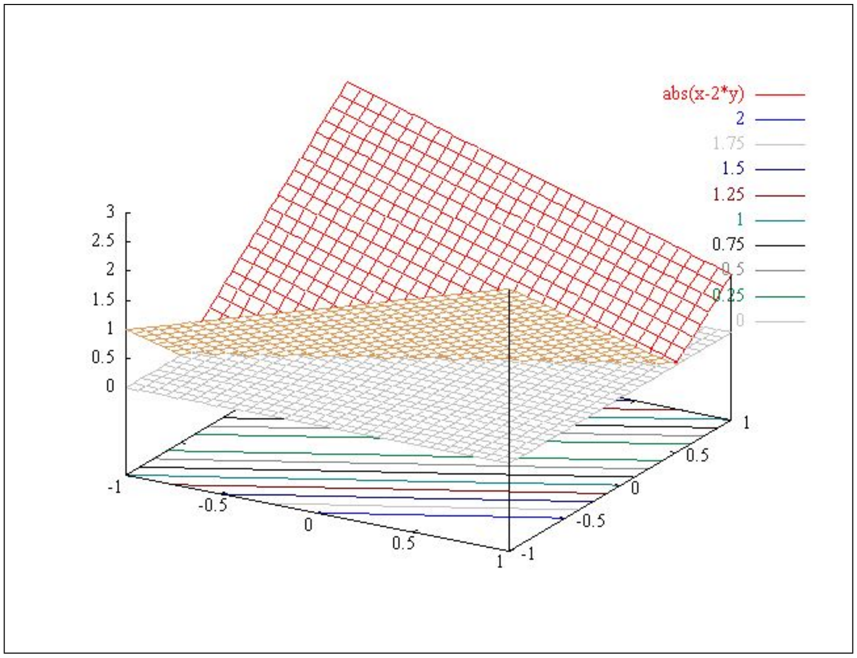


FIGURA 1. Il grafico di $|x - 2y|$

La mancanza del piano tangente equivale alla *non differenziabilitá*.

- Quasi tutte le sezioni del grafico hanno in corrispondenza ai punti della retta $x - 2y = 0$ un angolo: quasi tutte...
certo non presenta alcun angolo la sezione diretta come la stessa retta $x - 2y = 0$!

Si tratta di una sezione sulla quale la f prende il valore costante 0.

Quindi esistono le derivate direzionali di f sui punti della retta $x - 2y = 0$ nelle direzioni parallele al vettore

$$\overrightarrow{n} = \{2, 1\}$$

parallelo alla retta stessa.

Tali derivate

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}}$$

valgono entrambe 0, la funzione sui punti della retta $x - 2y = 0$ vale 0.

2. Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

dimostrare che

i): *f non é continua in $(0,0)$;*
ii): *f ammette le derivate parziali f_x e f_y in $(0,0)$;*
iii): *f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ lungo ogni direzione $\overrightarrow{v}$.*

Vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}=\nabla f(0,0)\,.\,\overrightarrow{v} \quad ?$$

Soluzione 2:

- $f(0,0)=0$: calcoliamo la funzione sui punti $(x,\sqrt{x}), \quad x>0$

$$f(x,\sqrt{x})=\frac{x\,x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

  Punti $(x,\sqrt{x}), \quad x>0$ se ne trovano vicini a $(0,0)$ quanto si vuole: in altri termini abbiamo trovato punti vicini all'origine sui quali non riesce affatto $f(x,y)\simeq f(0,0)$, quindi f non é continua in $(0,0)$.
- Sugli assi riesce

$$f(0,y)=0, \quad f(x,0)=0$$

  quindi é evidente che esistono le derivate parziali

$$f_y(0,y)=0\,\forall y, \quad f_x(x,0)=0\,\forall x$$

  e quindi, naturalmente $f_x(0,0)=f_y(0.0)=0$.
- Derivata direzionale in $(0,0)$ lungo la direzione $n=\{\cos(\alpha),\sin(\alpha)\}$:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\left\{f(\rho\cos(\alpha),\rho\sin(\alpha))-f(0,0)\right\}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)+\rho^2\sin^4(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

  Le direzioni con $\cos(\alpha)=0$ non rientrano nella formula precedente: ma $\cos(\alpha)=0$ significa direzione verticale... la derivata parziale $f_y(0,0)$ che abbiamo precedentemente giá trovata 0.

- Non vale (quasi mai) la formula

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}} = \nabla f(0,0) \times \overrightarrow{n}$$

infatti abbiamo precedentemente riconosciuto che

$$\nabla f(0,0) = \{0,\ 0\} \tag{1}$$

mentre abbiamo anche calcolato direttamente le derivate direzionali e abbiamo riconosciuto che non sono affatto sempre nulle.

Il *quasi mai* precedente si riferisce appunto al fatto che la formula (1) fornisce comunque un risultato esatto per le direzioni con $\sin(\alpha) = 0$, la direzione dell'asse x !

3. Esercizio

Sia

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^4) + xy$$

e sia assegnata la curva di rappresentazione parametrica

$$\phi(t) = (a_1t^3 + b_1,\ a_2t^2 + b_2,\ a_3t + b_3).$$

Si determinino i parametri $a_1, \ldots, b_3$*, per i quali*

i): *la curva passa per il punto* $(0, 0, 0)$ *per* $t = 0$*;*
ii): *in tale punto la retta tangente alla curva appartiene al piano tangente al grafico di* f*.*

Soluzione 3:

- Tutte le curve

$$\phi(t) = \{a_1t^3 + b_1, a_2t^2 + b_2, a_3t + b_3\}$$

passano per $t = 0$ per i punti

$$P = \{b_1, b_2, b_3\} = (0, 0, 0) \quad \leftrightarrow \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

- In tale punto hanno vettore tangente parallelo a

$$\phi'(t) = \{3a_1t^2 + b_1, 2a_2t + b_2, a_3 + b_3\} \quad \rightarrow \quad \{b_1, b_2, a_3 + b_3\}$$

che tenuto conto delle precedenti condizioni sui b_i si riduce a

$$\{0, 0, a_3\}$$

- Il piano tangente al grafico di f in $(0,0,0)$ é

$$z = 0$$

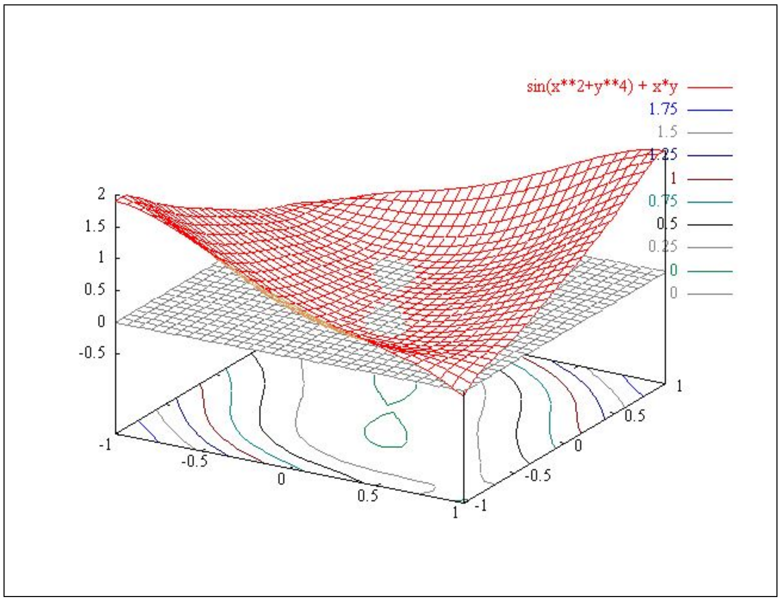


FIGURA 2. Il grafico di $\sin(x^2 + y^4) + xy$ e del piano $z = 0$ tangente.

Il vettore $\{0, 0, a_3\}$ appartiene a tale piano tangente se e solo se $a_3 = 0$

4. Esercizio

Data la funzione

$$f(x, y) = y\sqrt{|x|} + 2\,x,$$

dimostrare che f è differenziabile in $(0,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,0,0)$.

Soluzione 4:

Le derivate parziali di f sono

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

La differenziabilitá (o meno) di f nell'origine é collegata al seguente limite

$$(2)\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-[f(0,0)+2h]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\sqrt{|h|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \ell$$

Tenuto conto che

$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$$

si ha

$$\left|\sqrt{|h|}\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \sqrt{|h|} \quad \to \quad 0$$

condizione che implica $\ell = 0$: la funzione quindi é differenziabile nell'origine.

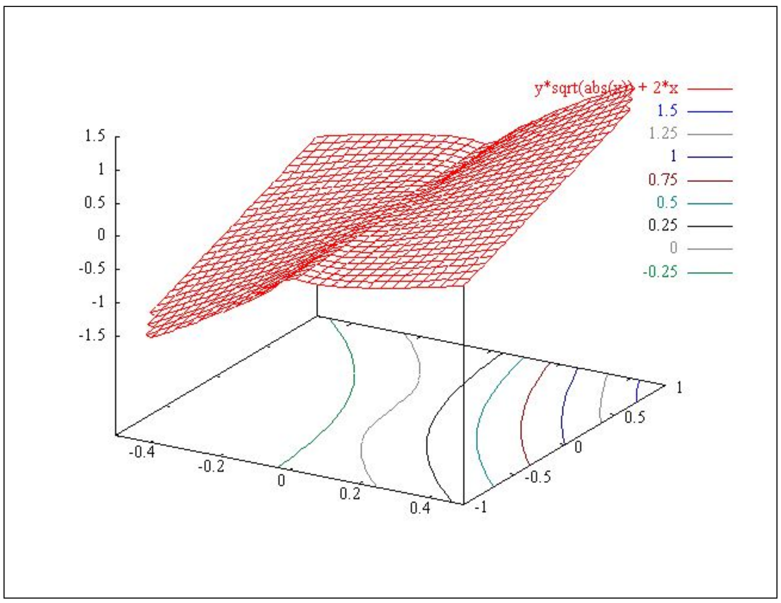


FIGURA 3. Il grafico di $y\sqrt{|x|}+2x$

Si noti che, invece la stessa funzione non é differenziabile in tutti gli altri punti dell'asse y, cosí ad esempio non é differenziabile nel punto $(0,1)$: basta infatti pensare che in tale punto manca la derivata parziale $f_x(0,1)$. Si osservi, nel grafico di Figura 3, la piega che taglia il grafico e che si stende solo in corrispondenza dell'origine.

5. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$.

i): *Calcolare le derivate direzionali* $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\epsilon}}$ *nel punto* $(1,1)$ *al variare di* $\overrightarrow{\epsilon}$*;*

ii): *Determinare per quali* $\overrightarrow{\epsilon}$ *riesce massimo* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\epsilon}}\right|$.

Soluzione 5:

- Il calcolo del gradiente nel punto $(1,1)$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \rightarrow \quad \nabla f(x,y) = \{2x, 2y\} \quad \rightarrow \quad \{2,2\}$$

Calcolo delle derivate direzionali nel punto $(1,1)$:

$$\overrightarrow{v} = \{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} : \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dv} = \{2,2\} \times \overrightarrow{v}$$

- Tenuto conto che per i prodotti scalari si ha

$$|\{2,2\} \times \overrightarrow{v}| = |\{2,2\}| \, . \, |\overrightarrow{v}| \, . \cos(\nu)$$

essendo ν l'angolo acuto fra i due vettori, il prodotto riesce massimo in modulo se $\nu = 0$ ovvero se $\overrightarrow{v}$ é parallelo a $\{2,2\}$.

La derivata direzionale in $(1,1)$ di modulo maggiore si ottiene rispetto alla direzione radiale $v = \{\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$ e vale $|\{2,2\}| = 2\sqrt{2}$.

Osservazione 5.1. *É stato piú volte riconosciuto che il gradiente individua la direzione lungo la quale la superficie grafico presenta la pendenza maggiore (il gradiente punta verso la direzione della salita) : la direzione di maggiore pendenza equivale, naturalmente, alla direzione secondo la quale la derivata direzionale ha modulo maggiore.*

6. Esercizio

Usare la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare la derivata di $F(t) = f(x(t), y(t)))$ *nei seguenti casi:*

$$f(x,y) = \sin x \, \cos y, \quad x(t) = \pi \, t, \; y(t) = \sqrt{t};$$

$$f(x,y) = x \, \log(x + 2\,y), \quad x(t) = \sin t, \; y(t) = \cos t.$$

Soluzione 6:

- $$f(x,y) = \sin(x)\cos(y), \quad x(t) = \pi t,\ y(t) = \sqrt{t}$$

  La regola di derivazione delle funzioni composte indica la seguente via:

  $F(t) = f[x(t), y(t)] \quad \rightarrow$

  $F'(t) = f_x[x(t), y(t)]x'(t) + f_y[x(t), y(t)]y'(t)$

  $F'(t) = \cos(x(t))\cos(y(t))\pi - \sin(x(t))\sin(y(t))\frac{1}{2\sqrt{t}}$

  $F'(t) = \cos(\pi t)\cos(\sqrt{t})\pi - \sin(\pi t)\sin(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}$

  Osservazione 6.1. *Si noti che lo stesso risultato sarebbe stato ottenuto, calcolando con le regole di derivazione del prodotto e delle funzioni composte, direttamente la derivata della*

  $$\sin(\pi t)\cos(\sqrt{t})$$

- $$f(x,y) = x\log(x+2y), \quad x(t) = \sin(t), y(t) = \cos(t)$$

  La regola di derivazione delle funzioni composte indica la seguente via:

$F(t) = f[x(t), y(t)] \quad \rightarrow$

$F'(t) = f_x[x(t), y(t)]x'(t) + f_y[x(t), y(t)]y'(t)$

$F'(t) = \left\{\log(\sin(t) + 2\cos(t)) + \frac{\sin(t)}{\sin(t)+2\cos(t)}\right\}\cos(t) - \frac{2\sin(t)}{\sin(t)+2\cos(t)}\sin(t)$

Osservazione 6.2. *Stessa osservazione di sopra.*

7. Esercizio

Usare la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare le derivate parziali di $F(x,y) = f(\xi(x,y), \eta(x,y))$ nei seguenti casi:

$$f(\xi,\eta) = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2, \quad \xi(x,y) = x+y,\ \eta(x,y) = x\,y;$$

$$f(\xi,\eta) = \xi/\eta, \quad \xi(x,y) = x\mathrm{e}^y,\ \eta(x,y) = 1 + x\mathrm{e}^{-y}.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione 7:}}$
Richiamiamo l'espressione vettoriale delle derivate delle funzioni composte [1]:

$$F(x,y) = f(\,\xi(x,y),\ \eta(x,y)\,): \quad \rightarrow \quad \nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \nabla f(\xi,\eta)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x(x,y) & \eta_x(x,y) \\ \xi_y(x,y) & \eta_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi[\xi(x,y),\eta(x,y)] \\ f_\eta[\xi(x,y),\eta(x,y)] \end{pmatrix}$$

La matrice

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

si chiama matrice jacobiana delle due funzioni $\xi(x,y),\ \eta(x,y)$.

$\boxed{\text{Prima composizione}}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \eta + 2\,\xi \\ 2\,\eta + \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + 2\,x + 2\,y \\ 2\,xy + x + y \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy + 2\,x + 2\,y \\ 2\,xy + x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + 2\,x + 2\,y + y(2\,xy + x + y) \\ xy + 2\,x + 2\,y + x(2\,xy + x + y) \end{pmatrix}$$

Il calcolo diretto della funzione composta, in questo caso semplicissimo, consente una verifica:

$$F(x,y) = x^2\,y^2 + x\,y\ (x+y) + (x+y)^2$$

$$F_x(x,y) = x\,y + 2\,x\,y^2 + 2\ (x+y) + y\ (x+y)$$

$$F_y(x,y) = x\,y + 2\,x^2\,y + 2\ (x+y) + x\ (x+y)$$

Risultati coerenti con quanto trovato nella (3).

$\boxed{\text{Seconda composizione}}$

$$J = \begin{pmatrix} e^y & e^{-y} \\ e^y & -xe^{-y} \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\eta} \\ \\ -\dfrac{\xi}{\eta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 + x\,e^{-y}} \\ \\ -\dfrac{xe^y}{(1 + x\,e^{-y})^2} \end{pmatrix}$$

[1] Vedi www.mat.uniroma1.it/people/lamberti Corso Funzioni di piú variabili , Lezione 12 § 8.2

$$\begin{pmatrix} e^y & e^{-y} \\ e^y & -xe^{-y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+x\,e^{-y}} \\ \\ -\dfrac{xe^y}{(1+x\,e^{-y})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^y}{1+x\,e^{-y}} - \dfrac{x}{(1+x\,e^{-y})^2} \\ \\ \dfrac{e^y}{1+x\,e^{-y}} + \dfrac{x^2}{(1+x\,e^{-y})^2} \end{pmatrix}$$

Verifica diretta:

$$F(x,y) = \frac{e^y\,x}{1+xe^{-y}}$$

$$F_x(x,y) = \frac{-x}{(1+xe^{-y})^2} + \frac{e^y}{1+xe^{-y}}$$

$$F_y(x,y) = \frac{x^2}{(1+xe^{-y})^2} + \frac{e^y\,x}{1+xe^{-y}}$$

8. Esercizio

Sia $g(x,y) = f(x^2-y^2, y^2-x^2)$ essendo $f(\xi,\eta)$ una funzione differenziabile in R^2.
Dimostrare che g soddisfa l'equazione

$$x\,\frac{\partial g}{\partial y} + yx\,\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Soluzione 8:

$$g_x(x,y) = f_x(x^2-y^2, y^2-x^2)\,2x - f_y(x^2-y^2, y^2-x^2)\,2x,$$

$$g_y(x,y) = -f_x(x^2-y^2, y^2-x^2)\,2y + f_y(x^2-y^2, y^2-x^2)\,2y$$

Risulta pertanto evidente che $y\,g_x + x\,g_y = 0$.

9. Esercizio

Sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile in R^2 e siano $g_1(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta), g_2(\rho, \theta) = \rho\sin(\theta)$. Detta $F(\rho, \theta) = f(g_1(\rho, \theta), g_2(\rho, \theta))$, usando la regola di derivazione delle funzioni composte verificare che

- $$\begin{cases} F_\rho = f_x\cos(\theta) + f_y\sin(\theta), \\ \\ F_\theta = -\rho f_x\sin(\theta) + \rho f_y\cos(\theta) \end{cases}$$
- $$|\nabla f|^2 = F_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}F_\theta^2$$
- $$\triangle f = F_{\rho\,\rho} + \frac{1}{\rho}F_\rho + F_{\theta\,\theta}$$

Soluzione 9:

La composizione indicata si chiama, generalmente,

ricorso alle coordinate polari.

La prima domanda corrisponde semplicemente alla regola di derivazione delle funzioni composte.
La seconda domanda sottintende una verifica che discende direttamente dalla domanda precedente:

$$F_\rho^2 = f_x^2\cos^2(\theta) + f_y^2\sin^2(\theta) + 2f_xf_y\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\left(\frac{F_\theta}{\rho}\right)^2 = f_x^2\sin^2(\theta) + f_y^2\cos^2(\theta) - 2f_xf_y\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Sommando si ottiene

$$F_\rho^2 + \left(\frac{F_\theta}{\rho}\right)^2 = f_x^2 + f_y^2$$

La terza relazione é difficile: chi possiede la regola di derivazione delle funzioni composte puó usarla per le derivate prime, per quelle seconde, ecc.
Ma é faticoso: ricordate la formula proposta, essa ha un nome famoso

il laplaciano in coordinate polari...

In molte applicazioni l'espressione del laplaciano in coordinate polari é ancora piú semplice: questo accade nel caso di funzioni f di tipo radiale.
In tal caso, quello di funzioni f radiali, F_θ é nulla... e quindi

$$\triangle f = F_{\rho\,\rho} + \frac{1}{\rho}F_\rho$$

10. Esercizio

Verificare la validitá del Teorema di Lagrange per la funzione $f(x, y) = x^2y - y^2$ *tra i punti* $P_0 = (0, 0)$ *e* $P_1 = (1, 2)$. *Quali sono i punti intermedi che verificano la tesi del teorema ?*

$\boxed{\textbf{Soluzione 10:}}$ Consideriamo il segmento da P_0 a P_1,

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t, \quad t \in [0, 1]$$

La funzione f su tale segmento vale

$$F(t) = f[x(t), y(t)] = 2t^3 - 4t^2$$

$$f(P_1) - f(P_0) = -2 = F(1) - F(0) = F'(\tau) = 6\tau^2 - 8\tau$$

I valori $\tau \in (0, 1)$ danno $\tau = 1/3$.
Il punto $P_\tau = (1/3, 2/3)$ é pertanto punto di Lagrange.
Verifichiamo:

$$f_x(P_\tau) = 2xy\big|_{P_\tau} = 4/9, \quad f_y(P_\tau) = x^2 - 2y\big|_{P_\tau} = -11/9$$

$$f_x(P_\tau)(x_1 - x_0) + f_y(P_\tau)(y_1 - y_0) = 4/9 - 22/9 = -18/9 = -2$$

esattamente il divario tra $f(P_1)$ e $f(P_0)$.

CAPITOLO 5

Foglio 5

1. Esercizio

Formula di Taylor (parte lineare e resto quadratico) di punto iniziale $(0,0)$ *per le seguenti funzioni*

$f(x,y) = \; e^x \cos(y)$	$g(x,y) = \; \cos(x+y)$
$h(x,y) = \; \sin(x^2+y^2)$	$k(x,y) = \; \sin(2x+y+5x^2+4xy+3y^2)$

$\boxed{\text{SOLUZIONE 1:}}$

I polinomi $P(x,y)$ di Taylor richiesti sono composti da:

- la parte lineare (l'espressione del piano tangente),
- la parte quadratica a coefficienti le derivate seconde calcolate anch'esse nel punto iniziale $(0,0)$ assegnato.

OSSERVAZIONE 1.1. *Ovviamente tali polinomi* $P(x,y)$ *non coincidono con le funzioni assegnate ma forniscono solo un'approssimazione di esse: la coincidenza ci sarebbe stata se le derivate seconde, coefficienti della parte quadratica, fossero state calcolate nel punto - misterioso - garantito dal teorema della formula di Taylor in dimensione 1.*

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x,y) = e^x \; \cos(y) \\ P(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} g(x,y) = \cos(x+y) \\ P(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 2\,xy + y^2) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} h(x,y) = \sin(x^2+y^2) \\ P(x,y) = x^2 + \; y^2 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} k(x,y) = \sin(2x+y+5x^2+4xy+3y^2) \\ P(x,y) = 2\,x + y + 5\,x^2 + 4\,xy + 3\,y^2 \end{cases} \end{cases}$$

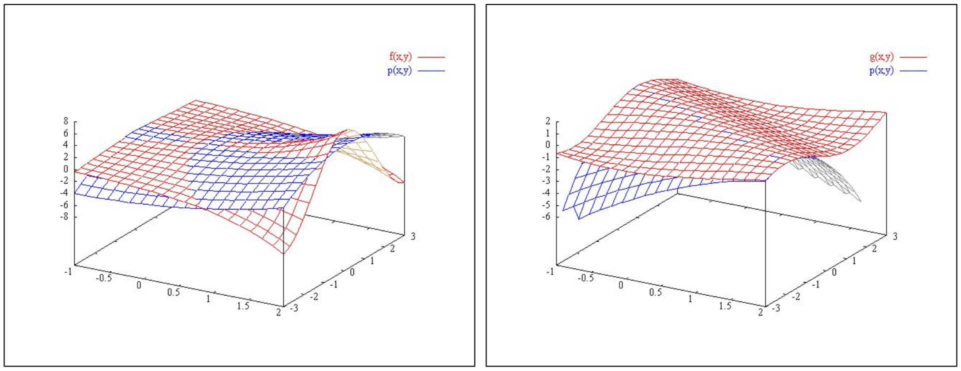


Figura 1. I grafici di $f(x,y)$ e di $g(x,y)$ insiemi a quelli dei polinomi di Taylor

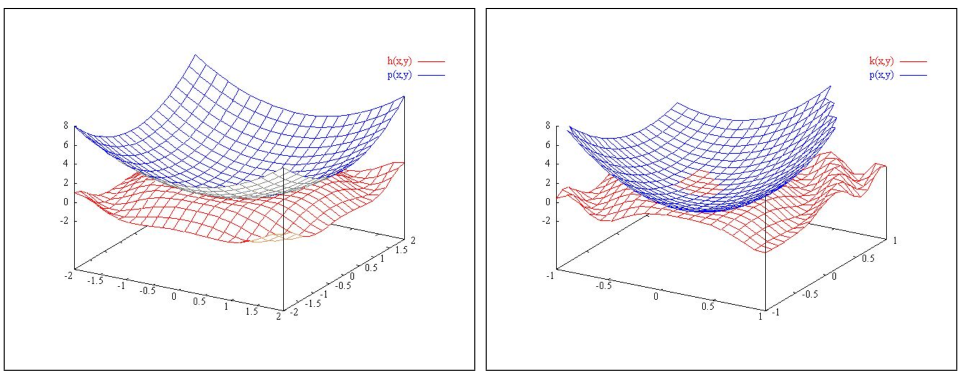


Figura 2. I grafici di $h(x,y)$ e di $k(x,y)$ insiemi a quelli dei polinomi di Taylor

Osservazione 1.2. *Alcune abbreviazioni di calcolo potevano essere usate ricordando che*

$$\cos(t) \simeq 1 - \frac{1}{2}t^2 \quad \rightarrow \quad \cos(x+y) \simeq 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2$$

$$\sin(t) \simeq t \rightarrow \begin{cases} \sin(x^2+y^2) \simeq x^2+y^2 \\ \sin(2x+y+5x^2+4xy+3y^2) \simeq 2x+y+5x^2+4xy+3y^2 \end{cases}$$

2. Esercizio

Data la funzione $f(x, y) = x^3 - 3x + 2y^3 - 3y^2 + 1$

- *determinare e classificare i punti critici in tutto* R^2,
- *determinare massimo e minimo assoluti di* f *in*

$$T = \{(x, y) \in R^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$\boxed{\text{Soluzione 1:}}$

- Punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -3 + 3\,x^2 = 0 \\ -6\,y + 6\,y^2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono pertanto i seguenti quattro punti:

$$\{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}$$

La matrice hessiana é la seguente

$$\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6 + 12y \end{pmatrix}$$

nei quattro punti prende, rispettivamente, le espressioni:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La forma quadratica é pertanto, rispettivamente,

$-6x^2 - 6y^2$	definita negativa,	(-1, 0)	MASSIMO RELATIVO,
$-6x^2 + 6y^2$	non definita,	(-1,1)	PUNTO DI SELLA,
$6x^2 - 6y^2$	non definita,	(1,0)	PUNTO DI SELLA,
$6x^2 + 6y^2$	definita positiva,	(1,1)	MINIMO RELATIVO.

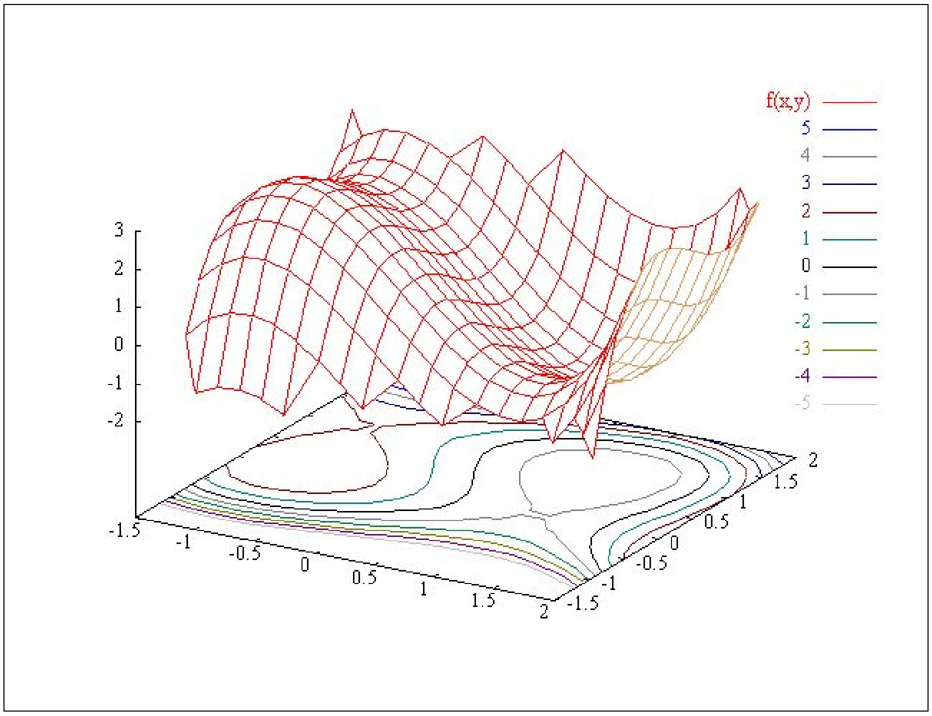


FIGURA 3. Le linee di livello indicano bene i punti di sella, quasi degli incroci, e quelli di massimo o minimo, quasi delle circonferenze

- Nessuno dei quattro punti critici di f cadono all'interno della regione T assegnata: quindi il massimo e il minimo richiesti cadono necessariamente sulla frontiera di T,

  Essa é composta da tre segmenti sui quali la funzione prende i seguenti valori
  1. $0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \qquad f = x^3 - 3x + 1$
  2. $x = 0, \qquad 0 \leq y \leq 1, \quad f = 2y^3 - 3y^2 + 1$
  3. $y = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f = -3\,x + 3\,x^2 - x^3$

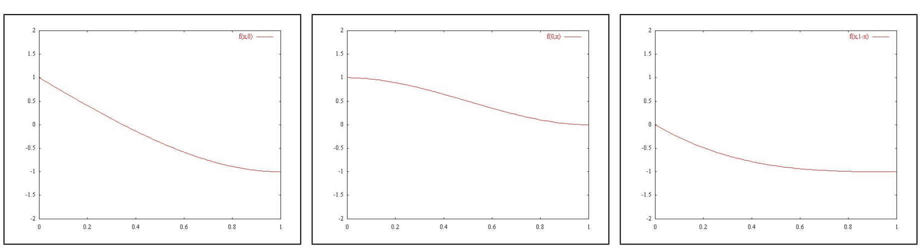


FIGURA 4. I grafici della f sui tre segmenti 1., 2., 3.

– $\boxed{\text{Segmento 1.}}$ $f' = 3x^2 - 3 \neq 0 \quad \forall x \in (0,1)$, valori agli estremi: $f(0,0) = 1, f(1,0) = -1$, Max $:= 1, \min := -1$
– $\boxed{\text{Segmento 2.}}$ $f' = 6y^2 - 6y \neq 0 \quad \forall x \in (0,1)$, valori agli estremi $f(0,0) = 1, f(0,1) = 0$, Max $:= 1, \min := 0$
– $\boxed{\text{Segmento 3.}}$ $f' = -3+6x-3x^2 = -3(x-1)^2 \neq 0 \quad \forall x \in (0,1)$, valori agli estremi $f(1,0) = -1, f(0,1) = 0$ Max $:= 0, \min := -1$

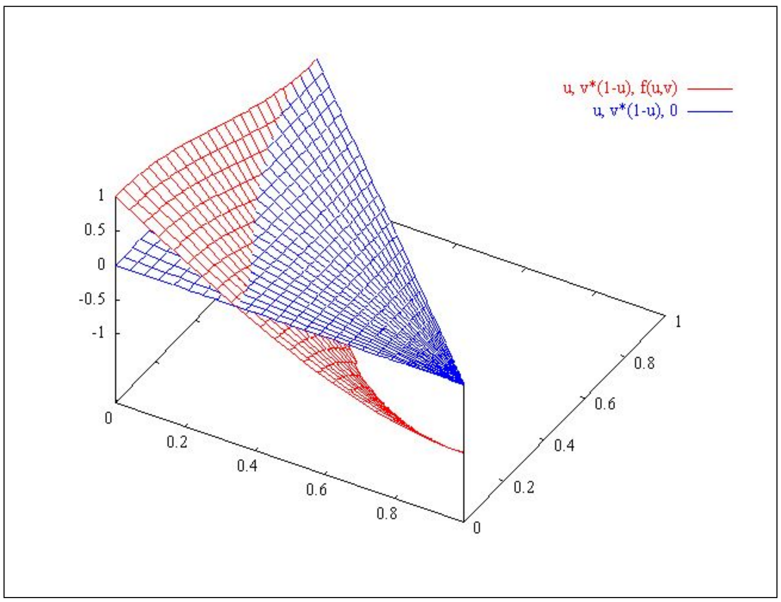


FIGURA 5. Grafico, in rosso, della f limitatamente alla regione T: in blu la quota $z = 0$

$\boxed{\text{Risposta:}}$

Il minimo vale -1 e viene assunto nel punto $(1,0)$, il massimo é 1 e viene assunto nel punto $(0,0)$. Non ci sono punti di massimo o minimo relativi interni a T.

3. Esercizio

Data la funzione $f(x,y) = 2xy - y^2 + x^2$ *determinare il massimo e il minimo assoluti nell'insieme*

$$D = \{(x,y) \in R^2 | |x| \leq 1,\ |x| \leq 1\}$$

$\boxed{\text{Soluzione 3:}}$

Punti critici:

$$\{f_x = 0, f_y = 0\} \to \left\{ \begin{array}{l} 2y + 2x = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (0,0) \in D$$

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 2 : f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}^2 = -8 < 0$$

Il punto critico $(0,0)$ é punto di sella.

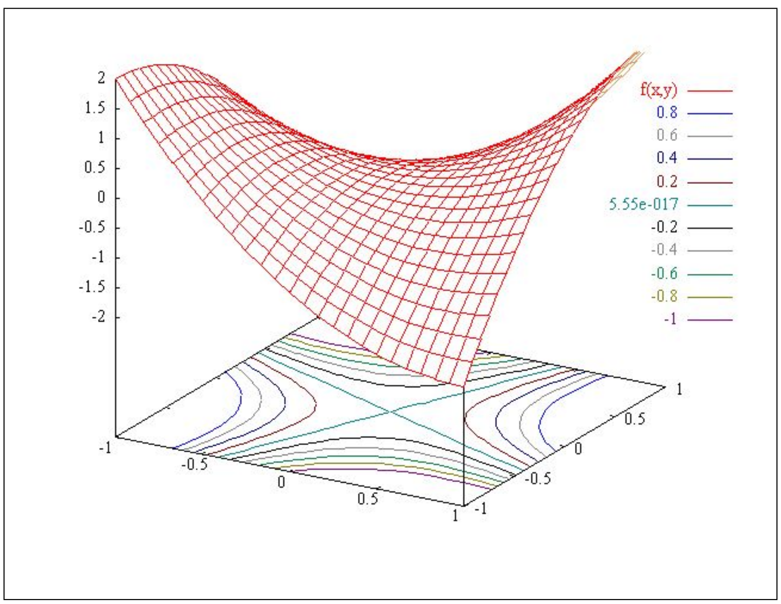


FIGURA 6. Il grafico di f su D; si notino le linee di livello in corrispondenza al punto $(0,0)$ di sella.

Il massimo e il minimo cadono sulla frontiera di D, composta da quattro segmenti:

$$\begin{array}{ll|l|l} 1. & y = -1 : & f = t^2 - 2t - 1, & t \in [-1,1] \\ 2. & x = 1 : & f = -t^2 + 2t + 1, & t \in [-1,1] \\ 3. & y = 1 : & f = t^2 + 2t - 1, & t \in [-1,1] \\ 4. & x = -1 : & f = -t^2 - 2t + 1, & t \in [-1,1] \end{array}$$

Tutte e quattro le espressioni relative ai segmenti della frontiera, espressioni peraltro molto simili tra loro, hanno derivate prime diverse da 0 in $(-1,1)$: quindi assumono massimo e minimo agli estremi.
Si tratta pertanto di considerare la f data sui quattro vertici del quadrato:

$$f(-1,-1) = 2, \quad f(1,-1) = -2, \quad f(1,1) = 2, \quad f(-1,1) = -2$$

Risposta:

Il minimo vale -1 e viene assunto nei due vertici della frontiera $(1,-1)$ e $(-1,1)$, il massimo vale 1 e viene assunto sugli altri due vertici della frontiera.

4. Esercizio

Si considerino i tre insiemi seguenti

$$R^2,\ B_1(0) = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\},\ Q = [0,\ 1/10] \times [0,2]$$

e sia $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

- *Quali dei tre insiemi sono chiusi, limitati, chiusi e limitati ?*
- *Quali sono i punti critici di* f *interni a ciascuno dei tre insiemi ?*
- *Determinare le tre immagini,* $f(R^2)$, $f(B(0))$, $f(Q)$.

Soluzione 4:

- R^2 é chiuso [1] e non é limitato
- $B_1(0) = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ il cerchio di centro l'origine e raggio 1 é chiuso e limitato,
- $Q = [0,\ 1/10] \times [0,2]$ é il rettangolo di estremi $(0,0)$ e $(0.1,2)$, insieme chiuso e limitato.

Punti critici di f:

$$\{f_x = 0, f_y = 0\} \quad \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow x^9 - x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

---

[1] Si ricordi che R^2 e l'insieme vuoto $\oslash$ sono gli unici insiemi apert e chiusi insieme.

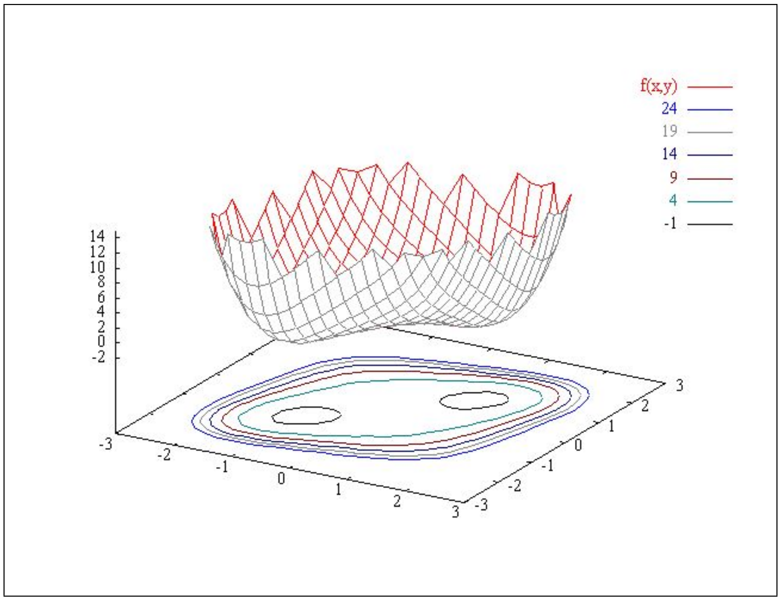


FIGURA 7. Il grafico di $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Ci sono quindi tre punti critici

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (-1,-1)$$

- tutti e tre (ovviamente) interni ad R^2
- solo l'origine interna a $B_1(0)$
- nessuno dei tre é interno a Q

Le immagini dei tre insiemi tramite f sono sicuramente [2] degli intervalli di R:

$\boxed{f(R^2):}$ si tratta sicuramente di un intervallo illimitato superiormente

Tenuto conto inoltre che

$$4xy \leq 2x^2 + 2y^2 \leq x^4 + 1 + y^4 + 1$$

ovvero

$$-4xy \geq -x^4 - 1 - y^4 - 1$$

si riconosce che

$$f(x, y) \geq x^4 + y^4 - x^4 - 1 - y^4 - 1 = -2$$

Quindi l'immagine $f(R^2) \subseteq [-2, +\infty)$.
Controllando i valori di f sui tre punti critici osservati si trova del resto

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = -2, \quad f(-1,-1) = -2$$

[2]Gli insiemi assegnati sono connessi e la funzione f é continua.

Quindi il valore -2 é assunto dalla funzione: quindi

$$f(R^2) = [-1, +\infty)$$

$\boxed{f(B_1(0))}$

Si tratta sicuramente di un intervallo chiuso e limitato: $[m,\, M]$
Per trovare il minimo m e il massimo M occorre considerare il valore $f(0,0)$ nell'unico punto critico interno a $B_1(0)$ e cercare il massimo e il minimo sulla frontiera

$$x = \cos(t), y = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]: \quad F(t) = \cos^4(t)+\sin^4(t)-4\cos(t)\sin(t)$$

Tenuto conto che

$$\cos^2(t) + \sin^2((t) = 1 \Rightarrow \cos^4(t) + \sin^4(t) + 2\sin^2(t)\cos^2(t) = 1$$

si ha

$$F(t) = 1 - 2[\sin(t)\cos(t)]^2 - 4[\sin(t)\cos(t)] = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2t) - 2\sin(2t)$$

Ne segue

$$F'(t) = -(\sin(2t) + 2)\cos(2t) = 0 \to \begin{cases} t = \frac{1}{4}\pi, \\ t = \frac{3}{4}\pi, \\ t = \frac{5}{4}\pi, \\ t = \frac{7}{4}\pi, \end{cases}$$

Il massimo e il minimo di f sulla circonferenza frontiera cadono pertanto, necessariamente, nei punti

$$\begin{array}{ll} (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), & f = -\frac{3}{2}, \\ (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}), & f = \frac{5}{2} \\ (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}), & f = -\frac{3}{2}, \\ (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}), & f = \frac{5}{2}, \end{array}$$

Se ne conclude

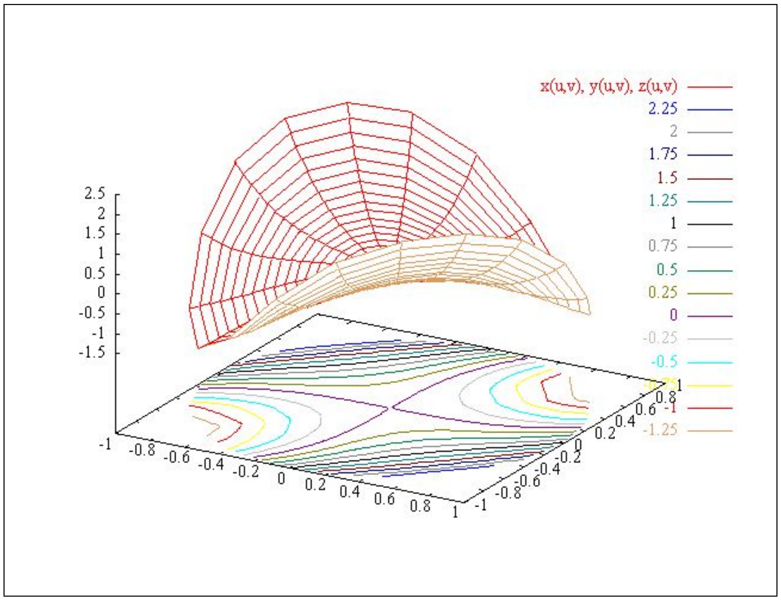


FIGURA 8. Il grafico di f sul cerchio $B_1(0)$.

$$f(B_1(0)) = \left[-\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}\right]$$

$\boxed{f(Q)}$

L'immagine é, certamente, l'intervallo chiuso e limitato $[\min, \max]$. All'interno di Q non cade alcun punto critico, quindi il minimo e il massimo sono raggiunti sulla frontiera., che é composta di quattro segmenti.

- 1. $y = 0, 0 \leq x \leq 0.1 : \quad f = x^4$, $\min = 0, \quad \max = 0.0001$
- 2. $x = 0.1, 0 \leq y \leq 2$ $f = 0.0001 + y^4 - 0.4y$, la derivata si annulla per $y = 1/\sqrt[3]{10}$, i valori da considerare sono pertanto quelli ai due estremi 0.0001 e 15.2001 e nel punto in cui si annulla la derivata -0.139148
- 3. $y = 2, 0 \leq x \leq 0.1$ $f = x^4 + 16 - 8x$, la derivata si annulla per $x = \sqrt[3]{2}$ che non appartiene all'intervallo $[0, 0.1]$, i valori da considerare sono pertanto solo quelli ai due estremi 16 e 15.2001
- 4. $x = 0, 0 \leq y \leq 2$ $f = y^4$ come funzione di y é crescente, $\min = 0, \max = 16$.

Se ne conclude che il minimo vale -0.139148 e il massimo 16.

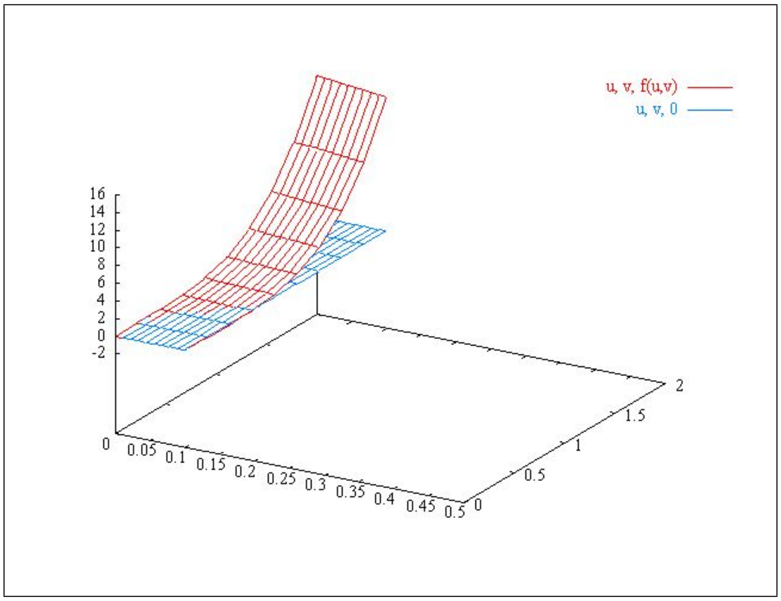


FIGURA 9. Il grafico in rosso di f sul rettangolo Q, in grigio la quota 0.

Riesce pertanto

$$f(Q) = [-0.79999,\, 16]$$

5. Esercizio

Siano $P = (x, y)$, $Q = (0, 1)$, $R = (1, 0)$ *e sia* $f(P) = \overline{PQ}^2.\overline{PR}^2$

- *Determinare il minimo di* f *in* R^2 *e dire in quale punto* (x_m, y_m) *é raggiunto,*
- *determinare l'immagine* $f(R^2)$

$\boxed{\text{Soluzione 5:}}$

$$f(P) = f(x, y) = \left(x^2 + (y-1)^2\right)\left((x-1)^2 + y^2\right)$$

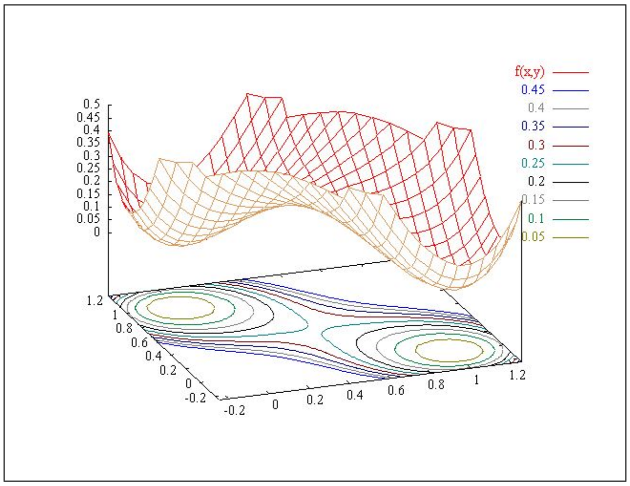


FIGURA 10. Il grafico di $f(P) = \overline{PQ}^2.\overline{PR}^2$

- Tenuto conto che $f \geq 0$ e che $f(Q) = f(R) = 0$ tale valore 0 é il minimo: esso é raggiunto nei due punti Q ed R e non puó essere raggiunto in nessun altro.
- Tenuto conto che $f \geq 0$ l'immagine $f(R^2)$ é certamente un intervallo $I \subseteq R_+$. Tenuto conto che
  - f prende il valore 0, sui due punti Q ed R
  - f prende valori comunque grandi

  se ne conclude che non puó che essere
  $$f(R^2) = [0, +\infty)$$

6. Esercizio

Si calcolino il minimo e il massimo assoluti della funzione
$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^4}$$
nella regione $D = \{(x, y) \in R^2 | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^4 \leq 1\}$.

$\boxed{\text{Soluzione 6:}}$

La funzione razionale f é continua in tutto R^2 perché il polinomio a denominatore non é mai nullo. La regione D assegnata é chiusa [3] e limitata [4] quindi, per il teorema di Weierstrass, esistono il massimo e il minimo di f in D
I loro valori sono del resto evidenti:

- f é tanto piú grande quanto piú piccolo é il denominatore. Il denominatore prende il valore piú basso nell'origine, quindi f prende il valore piú grande nell'origine
$$\max(f) = f(0,0) = 1$$
- f é tanto piú piccola quanto piú grande é il denominatore, e questo prende il valore piú alto, 2, sui punti della frontiera di $D : x^2 + y^4 = 1$
$$\min(f) = f_{\partial D} = \frac{1}{2}$$

L'immagine di D tramite f é pertanto l'intervallo chiuso e limitato
$$f(D) = [1, 2]$$

7. Esercizio

Si calcolino il minimo e il massimo assoluti della funzione
$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$
nella regione $D = \{(x,y) \in R^2 | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4\}$.

$\boxed{\text{Soluzione 7:}}$

Cerchiamo i punti critici
$$\{f_x = 0, f_y = 0\} \to \left\{ \begin{array}{l} (2x - (x^2 + y^2))e^{-(x+y)} = 0 \\ (2y - (x^2 + y^2))e^{-(x+y)} = 0 \end{array} \right. \to (0,0), (1,1)$$

---

[3] Le regioni definite da diseguaglianze $g(x,y) \leq k$ con g continua sono sempre chiuse.

[4] É facile riconoscere che D é certamente contenuto nel quadrato $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

Solo il secondo $(1,1)$ é interno a D: in esso la funzione vale $f(1,1) = 2e^{-2}$.
La frontiera di D si compone di tre segmenti:

- 1. $y = 0, 0 \le x \le 4 : F(t) = t^2\, e^{-t} \quad t \in [0, 41]$
- 2. $x = 0, 0 \le y \le 4 : F(t) = t^2\, e^{-t} \quad t \in [0, 4]$
- 3. $y = 4 - x, 0 \le x \le 4 : F(t) = (t^2 + (4-t)^2)e^{-4} \quad t \in [0, 4]$

Sui segmenti 1. e 2. si hanno gli stessi valori, la derivata $(F'(t) = 2t - t^2)e^{-t}$ si annulla per $t = 2$, nel punto medio,

$$F(0) = 0, \quad F(2) = 4e^{-2}, \quad F(4) = 16e^{-4}$$

Il minimo é ovviamente 0 : il seguente confronto fra i due ultimi valori

$$\frac{4e^2}{e^4} > \frac{16}{e^4} \Leftrightarrow e^2 > 4$$

consente di riconoscere il massimo $4e^{-2}$.
Sul terzo segmento la derivata si annulla ancora per $t = 2$, sempre il punto medio: i valori pertanto sono

$$F(0) = 16e^{-4}, \quad F(2) = 8e^{-4}, \quad F(4) = 16e^{-4}$$

il minimo é $8e^{-4}$ e il massimo é $16e^{-4}$.

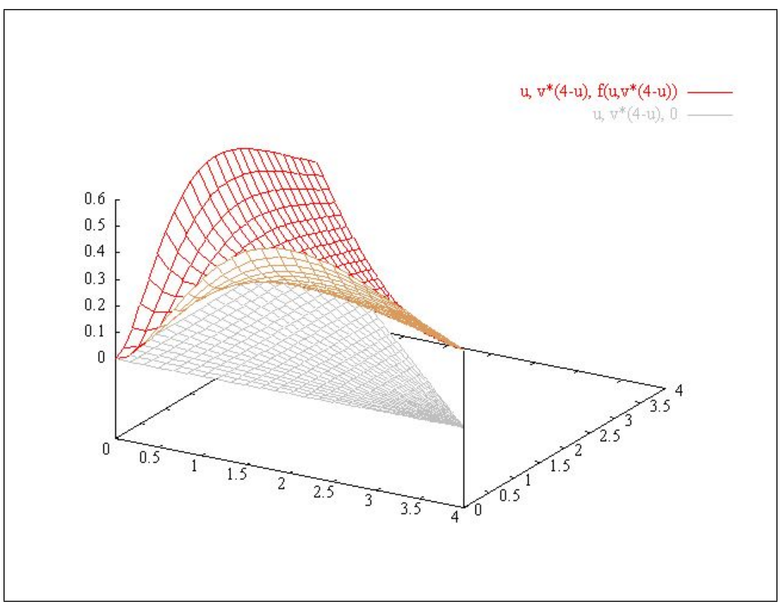


FIGURA 11. Il grafico della f su D e la quota 0 in grigio.

Riassumendo:

- il minimo é certamente 0 ed é assunto nell'origine.

- il massimo é il maggiore tra
$$2e^{-2}, \quad 4e^{-2}, \quad 16e^{-4}$$
cioé $4e^{-2}$

L'immagine della regione chiusa e limitata D tramite la funzione continua f é pertanto l'intervallo chiuso e limitato
$$f(d) = \left[0, \frac{4}{e^2}\right]$$

8. Esercizio

Sia $f(x,y) = e^x \sin(y)$ *e* $Q = [0,1] \times [0,\pi]$
- *Determinare i punti critici di* f
- *Calcolare minimo e massimo assoluti di* f *in* Q

$\boxed{\text{Soluzione 8:}}$

I punti critici
$$\begin{cases} e^x \sin(y) = 0 \\ e^x \cos(y) = 0 \end{cases}$$
... non ce ne sono !
L'insieme Q é chiuso e limitato, la funzione f é continua, quindi il massimo e il minimo esistono e, dal momento che non ci sono punti critici, il massimo e il minimo sono assunti sulla frontiera.
Tenuto conto che nel rettangolo Q riesce $e^x \sin(y) \geq 0$ e che sui due segmenti $y = 0$ e $y = \pi$ la funzione vale 0 se ne deduce che il minimo é 0.
Il massimo sará il valore piú grande del prodotto $e^x \sin(y)$: tenuto conto che il prodotto é massimo quando sono massimi i fattori si riconosce che il massimo di e^x per $x \in [0,1]$ é e , mentre il massimo di $\sin(y)$ per $y \in [0,\pi]$ é 1.
Quindi il massimo di $e^x \sin(y)$ per $(x,y) \in Q$ é e.
L'immagine di Q tramite f é pertanto
$$f(Q) = [0,\ e]$$

9. Esercizio

Sia $f(x,y) = -3 + 2\sqrt{2x^2+5y^2}$.

- *Determinare le linee di livello di* f
- *Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativi.*
- *Determinare minimo e massimo assoluti di* f *nel quadrato di estremi* $(-1,-1)$ *e* $(1,1)$

$\boxed{\text{Soluzione 9:}}$

Linee di livello:

$$-3 + 2\sqrt{2x^2+5y^2} = c \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5y^2} = \frac{1}{2}(c+3)$$

Si riconosce pertanto che le linee di livello non sono vuote se e solo se

$$c+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \geq -3$$

Per tali c le linee di livello sono le ellissi

$$2x^2 + 5y^2 = \left(\frac{1}{2}(c+3)\right)^2$$

Punti critici:

$$\begin{cases} \frac{4x}{\sqrt{2x^2+5y^2}} = 0 \\ \frac{10y}{\sqrt{2x^2+5y^2}} = 0 \end{cases}$$

... non ci sono punti critici.
La proposta apparente di $(0,0)$ non é buona, ovviamente, si annulla il denominatore....
I punti di massimo o minimo relativo possono cadere:

- nei punti critici (non ce ne sono...)
- nei punti in cui la f non é differenziabile: nel nostro caso l'origine, vedi la punta di cono in Figura 12.

Nell'origine riesce

$$f(0,0) = -3$$

e tale valore é addirittura il minimo di f in tutto R^2.

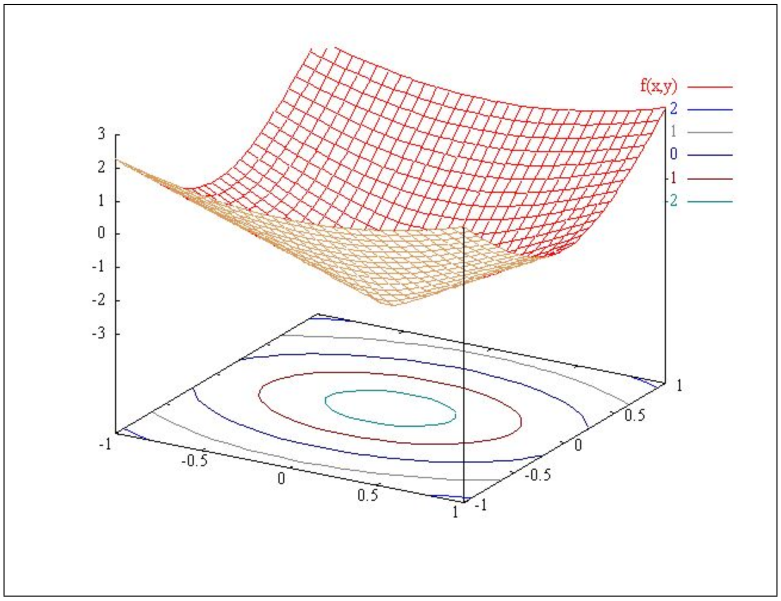


FIGURA 12. Il grafico di f sul quadrato Q

Massimo e minimo nel quadrato:

- il minimo é -3, valore preso nell'origine
- il massimo viene preso dove é maggiore il polinomio $2x^2 + 5y^2$, cioé nei punti del quadrato piú lontani dall'origine.... i vertici !

Il massimo é pertanto

$$f(\pm 1, \pm 1) = -3 + 2\sqrt{7}$$

10. Esercizio

Sia

$$F(t) = \int_0^t \sin(x - t) \cos^2(x) dx$$

- *calcolare le derivate prima e seconda di $F(t)$;*
- *determinare una equazione differenziale lineare di secondo ordine soddisfatta da $F(t)$.*

$\boxed{\text{Soluzione 10:}}$

$F'(t) = \sin(t-t)\cos^2(t) - \int_0^t \cos(x-t)\cos^2(x)dx = -\int_0^t \cos(x-t)\cos^2(x)dx$
$F''(t) = -\cos^2(t) - \int_0^t \sin(x-t)\cos^2(x)dx$

Dall'espressione della derivata seconda si riconosce che

$$F''(t) = -\cos^2(t) - F(t)$$

La funzione F soddisfa pertanto l'equazione differenziale lineare

$$y''(t) + y(t) = -\cos^2(t)$$

OSSERVAZIONE 10.1. *L'espressione di F esplicita, facilmente calcolabile é la seguente*

$$F(t) = -\frac{2}{3}(2+\cos(t))\sin^2(\frac{t}{2})$$

11. Esercizio

Si dica in quali insiemi le seguenti funzioni sono continue, in quali derivabili e se ne calcolino le derivate, dove esistono,

$$f(x) = \int_0^1 e^{xy^2}\,dy, \quad g(x) = \int_x^5 e^{xy^2}\,dy, \quad h(x) = \int_{\sin x}^{x^3} e^{xy^2}\,dy.$$

Calcolare i limiti $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$, $\lim_{x\to 0} h(x)$.

$\boxed{\text{Soluzione 11:}}$

Le tre funzioni proposte derivano tutte dalla iniziale funzione di tre variabili

$$F(x,u,v) = \int_u^v e^{xy^2}\,dy$$

continua in tutto R^3 che ha le tre seguenti derivate parziali prime

$$F_x(x,u,v) = \int_u^v y^2\,e^{xy^2}\,dy, \quad F_u(x,u,v) = -e^{xu^2}, \quad F_v(x,u,v) = e^{xv^2}$$

anch'esse continue in tutto R^3.

- $f(x) = F(x,0,1) :\longrightarrow f'(x) = F_x(x,0,1) =$

$$f'(x) = \int_0^1 y^2\, e^{xy^2}\, dy.$$

- $g(x) = F(x,x,5) :\longrightarrow g'(x) = F_x(x,x,5) + F_u(x,x,5) =$

$$g'(x) = \int_x^5 y^2\, e^{xy^2}\, dy - e^{x^3}.$$

- $h(x) = F(x, \sin(x), x^3) :\longrightarrow h'(x) =$

$$= F_x(x,\sin(x),x^3) + F_u(x,\sin(x),x^3)\cos(x) + F_v(x,\sin(x),x^3) 3x^2$$

$$h'(x) = \int_{\sin(x)}^{x^3} y^2\, e^{xy^2}\, dy - e^{x\sin^2(x)}\cos(x) + e^{x^7} 3x^2$$

12. Esercizio

Sia

$$F(t) = \int_{-1}^{+1} (1 - |x|)\cos(tx)\, dx.$$

(i) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 1 in $t = 0$ *della funzione* F
(ii) determinare esplicitamente la funzione F.

$\boxed{\text{Soluzione 12:}}$

Il polinomio richiesto é l'espressione delle retta $F(0) + t\, F'(0)$ tangente nell'origine

$$F(0) = \int_{-1}^{+1} (1 - |x|)\, dx = 1, \quad F'(0) = -\int_{-1}^{+1} (1 - |x|)\sin(0\, x)\, x\, dx = 0$$

da [5] cui

$$F(0) + t\,F'(0) = 1$$

polinomio che si é ridotto alla sola costante 1.
Il calcolo esplicito di F é agevolato dal fatto che la funzione integranda é pari e quindi

$$\int_{-1}^{+1} (1 - |x|) \cos(tx)\, dx = 2 \int_{0}^{+1} (1 - x) \cos(tx)\, dx.$$

Ne segue

$$F(t) = 2\, \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$$

Si noti la *apparente* singolaritá per $t = 0$ dell'espressione trovata: *apparente* perché basta pensare al limite...

13. Esercizio

Data $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continua, sia*

$$\Phi(a,b) := \int_0^1 \left(f(x) - ax - b\right)^2\, dx \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

- *Dimostrare che* Φ*, come funzione delle due variabili* a *e* b*, ha un solo punto critico e determinarlo.*
- *Dimostrare che si tratta di un punto di minimo relativo.*
- *Dimostrare che si tratta di un punto di minimo*
- *Verificare la risposta ottenuta per la funzione* $f(x) = x^2$ *e disegnare il grafico delle funzioni* $y = f(x)$ *e* $y = ax + b$ *con* a, b *che realizzano il minimo. relativo.*

$\boxed{\text{Soluzione 13:}}$

La funzione $\Phi(a,b)$ assegnata é molto piú semplice di quanto non appaia a prima vista:

svolto il quadrato della funzione integranda

$$a^2x^2 + 2\,a\,b\,x + b^2 - 2b\,f(x) - 2ax\;f(x) + f^2(x)$$

[5] I due integrali sono ovvi: il primo rappresenta l'area di un evidente triangolo, il secondo é l'integrale della funzione nulla...

e tenuto conto della linearitá dell'integrazione si riconosce che

$$\Phi(a,b) = \frac{a^2}{3} + a\,b + b^2 - 2\,b\int_0^1 f(x)\,dx - 2\,a\int_0^1 x\,f(x)\,dx + \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

un polinomio di secondo grado in a, b a coefficienti che dipendono, naturalmente, dalla f scelta.
Tenuto conto inoltre che i termini di secondo grado

$$\frac{a^2}{3} + a\,b + b^2$$

costituiscono una forma quadratica definita positiva si puó prevedere che il polinomio $\Phi(a,b)$ avrá un solo punto critico, punto di minimo.
Punti critici:

$$\begin{cases} \Phi_a(a,b) = -2\int_0^1 (f(x) - ax - b)\,x\,dx = 0 \\ \\ \Phi_b(a,b) = -2\int_0^1 (f(x) - ax - b)\;dx = 0 \end{cases}$$

Svolti, in parte i calcoli tenendo conto della linearitá e semplificando il fattore 2 si giunge al sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \int_0^1 xf(x)dx \\ \\ \frac{1}{2}a + b = \int_0^1 f(x)dx \end{cases}$$

che ha le soluzioni

$$a_0 = -6\int_0^1 f(x)dx + 12\int_0^1 xf(x)dx, \quad b_0 = 4\int_0^1 f(x)dx - 6\int_0^1 xf(x)dx$$

Il valore $\Phi(a_0, b_0)$ é il minimo della funzione $\Phi(a,b)\,\forall(a,b) \in R^2$.
Il caso di $f(x) = x^2$:

$$\begin{cases} a_0 = -6\int_0^1 x^2dx + 12\int_0^1 x^3\,dx = 1 \\ \\ b_0 = 4\int_0^1 x^2dx - 6\int_0^1 x^3\,dx = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Nella Figura 13 seguente trovate il grafico di x^2 e quello della retta $x - 1/6$ relativa ai due coefficienti a_0, b_0 trovati

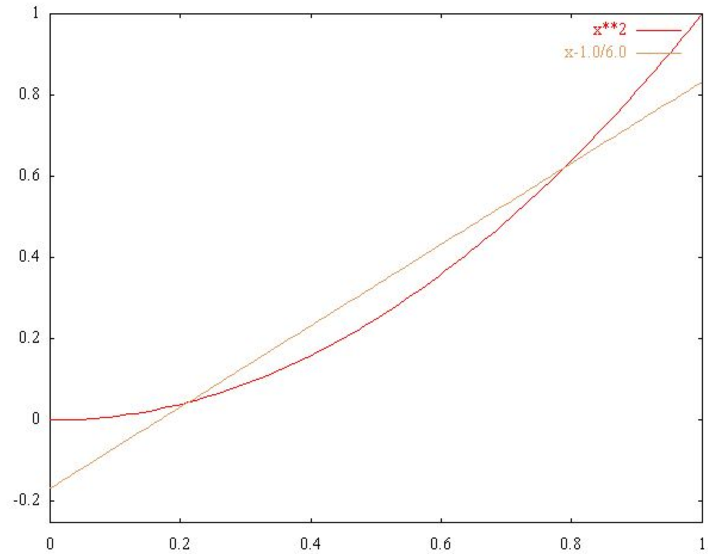


FIGURA 13. I grafici di x^2 e della retta calcolata.

É innegabile che la retta $x-1/6$ offra una interessante approssimazione della x^2 in $[0,1]$: coincide quasi con essa in 0.2 e in 0.8 e se ne discosta poco negli altri punti.
Riflettendo sul modo con cui é stata costruita si riconosce che $x-1/6$ é la retta che

si discosta meno in media quadratica

dalla funzione x^2.
Infatti la $\Phi(a.b)$ é l'integrale delle differenze al quadrato tra $f(x)$ e $ax+b$: dire che $\Phi(a.b)$ é bassa vuol dire che l'integrale di tali differenze é basso...

CAPITOLO 6

Foglio 6

1. Esercizio

Disegnare i seguenti insiemi

$$A = \{(x, y) : x \in [-1, 1],\ -x^4 \le y \le 2x^2\},$$

$$B = \{(x, y) : y \in [-1, 1],\ -y^2 \le x \le 4y^2\}$$

e calcolarne l'area.

Soluzione:

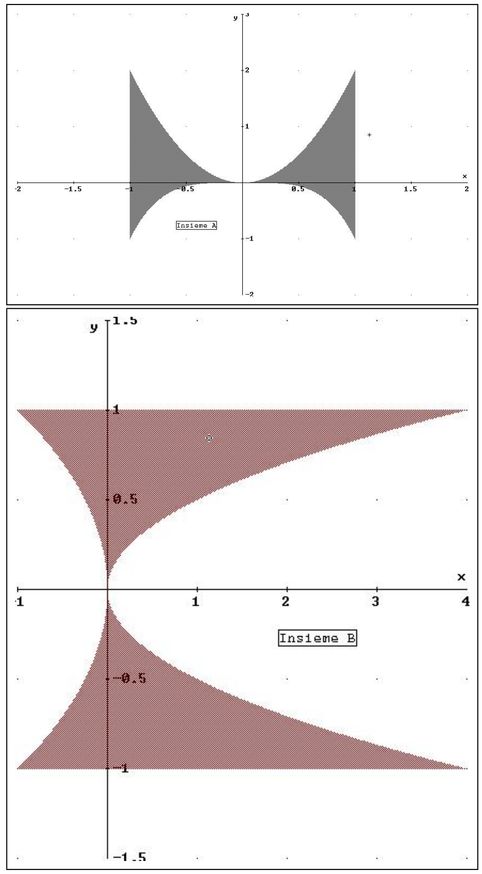


Figura 1. I due insiemi A e B

$$\text{Area}(A) = \iint_A dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x^4}^{2x^2} dy = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x^4) dx = \frac{26}{15}$$

$$\text{Area}(B) = \iint_B dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-y^2}^{4y^2} dx = \int_{-1}^{1} 5y^2 dy = 2\frac{5}{3}$$

2. Esercizio

Sia D il disco di centro l'origine e raggio 2. Calcolare l'integrale esteso a D delle seguenti funzioni $f_1(x, y) = x + 2y,\ f_2(x, y) = x \cos(y^2 + y^3)$.

Soluzione:

Motivi di simmetria indicano per la f_1 il seguente risultato:

$$\iint_C (x+2y)dxdy = 0$$

infatti su mezzo cerchio, $x+2y \geq 0$ la funzione integranda prende valori positivi, sull'altra metá gli stessi ma negativi.

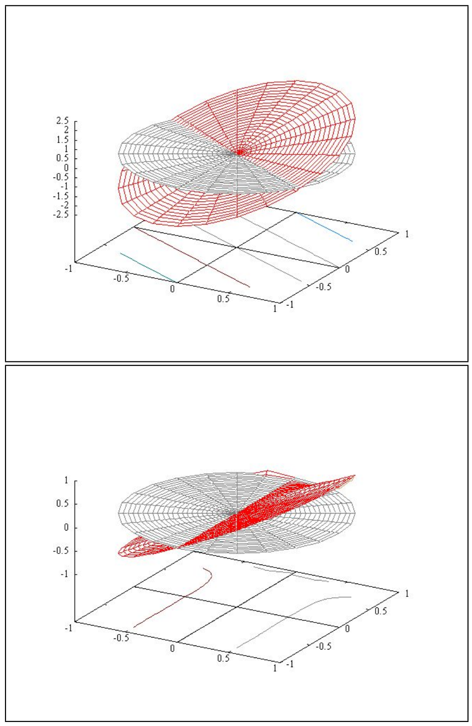


FIGURA 2. I grafici delle funzioni f_1 ed f_2: in grigio la quota $z = 0$

Analogo risultato per la seconda f_2

$$\iint_C x\cos(y^2+y^3)dxdy = 0$$

infatti per ogni fissata ordinata y la f_2 prende sul semicerchio $x < 0$ un valore e sull'altro semicerchio lo stesso ma cambiato di segno.

3. Esercizio

Calcolare l'integrale esteso al quadrato $Q = [-2,2] \times [-2,2]$ *delle funzioni* $f_3(x,y) = x^2 + y^3$, $f_4(x,y) = xy$.

$\boxed{\textbf{Soluzione:}}$

$$\iint_Q (x^2+y^3)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} (x^2+y^3)dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} x^2 dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} y^3 dy$$

Il carattere dispari della funzione y^3 e la simmetria di Q fanno riconoscere (il calcolo diretto é comunque semplicissimo) che l'ultimo integrale a secondo membro é nullo.
Riesce pertanto

$$\iint_Q (x^2 + y^3)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} x^2 dy = 4 \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{4}{3} 2\, 2^3$$

Integrale della f_2:

$$\iint_Q xydxdy = 0$$

risultato ottenuto per gli stessi motivi precedenti: su mezzo quadrato riesce $xy > 0$ sull'altra metá valori opposti.

4. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio $\iint_T |xy|dx\,dy$ *dove* T *è il triangolo di vertici* $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$.

Soluzione:

Si riconosce, ancora per simmetria,

$$\iint_T |xy|dxdy = 2 \iint_{T_+} xydxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}$$

Ricordate che, qualunque sia la funzione continua $f(x, y)$ il modulo $|f(x, y)|$ ha segno costante ≥ 0 e quindi il suo integrale verrá sempre ≥ 0, tenendo conto che basta che f sia diversa da zero in un punto per essere sicuri che l'integrale verrá positivo.

5. Esercizio

Calcolare $\displaystyle\iint\limits_R \mathrm{e}^{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)} dx\, dy, \quad R = \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}.$

Soluzione:

$$\iint_R e^{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}\, dx = \int_0^a e^{\frac{x}{a}} dx \int_0^b e^{\frac{y}{b}} dy == \frac{1}{ab}(e-1)^2$$

6. Esercizio

Disegnare $D = \{(x,y) : y \ge x, 2x \ge y^2\}$. *Calcolare* $\displaystyle\iint\limits_D y\, dx\, dy.$

Soluzione:

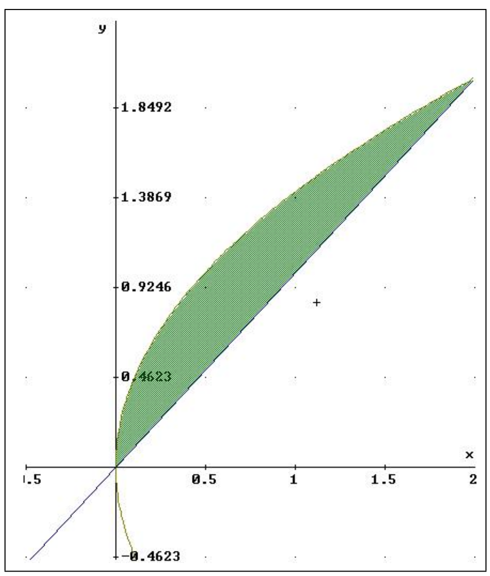


FIGURA 3. $D = \{(x,y) : y \ge x, 2x \ge y^2\}$

$$\iint_D ydxdy = \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2x}} ydy = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{1}{2}(2^2 - \frac{1}{3}2^3) = \frac{2}{3}$$

7. Esercizio

Disegnare $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 4, 4y \geq x^2 - 4x + 4\}$. *Calcolare*

$$\iint_D x\,dx\,dy.$$

Soluzione:

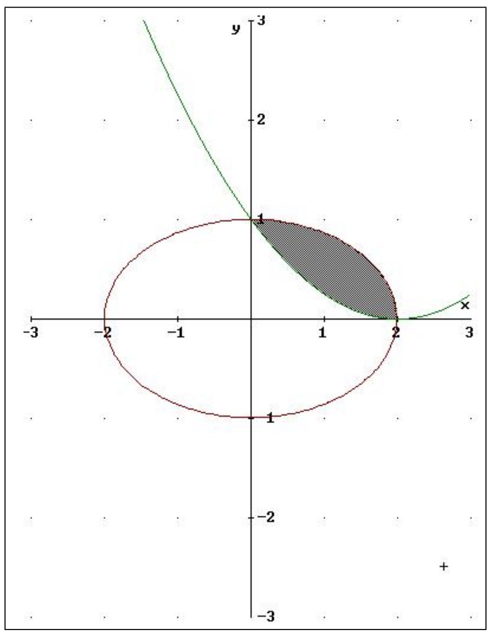


FIGURA 4. $D = \{(x,y) : y \geq x, 2x \geq y^2\}$

$$\iint_D xdxdy = \int_0^2 xdx \int_{x^2/4-x+1}^{\sqrt{4-x^2}/2} dy = \int_0^2 (\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x)dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{4-x^2}\,(4-x^2) - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1$$

8. Esercizio

Calcolare $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$ *dove* $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

Soluzione:

Serviamoci delle coordinate polari

$$\iint_D \frac{dxdy}{(\sqrt{1+x^2+y^2})^3} = \iint_Q \frac{1}{(\sqrt{1+\rho^2})^3}\rho d\rho d\theta$$

essendo

$$Q : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

L'integrale sul rettangolo Q si riduce a

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^2 \frac{\rho}{(\sqrt{1+\rho^2})^3} d\rho = \frac{1}{2}\pi \int_0^2 \frac{2\rho}{(\sqrt{1+\rho^2})^3} d\rho = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

9. Esercizio

Calcolare $\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$ *dove* $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2\}$.

Soluzione:

Serviamoci delle coordinate polari

$$\iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy = \iint_Q \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{6}\pi(9-1) = \frac{4}{3}\pi$$

10. Esercizio

Disegnare $D = \{(x, y) : 0 \le x + y \le 1,\ 0 \le x - y \le 1\}$.
Calcolare $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x + y}{(x - y)^2 + 1}\, dx\, dy$.

Soluzione:

Consideriamo la trasformazione affine

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} u = & x + y \\ v = & x - y \end{cases}, \quad \Phi(D) = [0,1] \times [0,1] \subseteq R^2_{u,v}$$

e la sua inversa $\Psi(u, v)$

$$\Psi(u,v) = \begin{cases} x = & \frac{1}{2}(u + v) \\ y = & \frac{1}{2}(u - v) \end{cases} \qquad \Psi([0,1] \times [0,1]) = D$$

Riesce inoltre

$$D\Psi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\,\frac{1}{2}$$

La formula del cambiamento di coordinate é la seguente

$$\iint_D \frac{x + y}{1 + (x - y)^2} dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{u}{1 + v^2}\, |D\Psi(u,v)|\, dudv =$$
$$= \frac{1}{2} \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{u}{1 + v^2} dudv = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + v^2} dv \int_0^1 udu =$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1 + v^2} dv = \frac{\pi}{16}$$

CAPITOLO 7

Foglio 7

1. Esercizio

Sia $C_r = \{r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ *con* $0 < r < 1$. *Calcolare*

$$I_r = \iint\limits_{C_r} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dxdy,\ J_r = \iint\limits_{C_r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy.$$

Quanto valgono $\lim_{r \to 0} I_r$ *e* $\lim_{r \to 0} J_r$ *?*

1.1. Soluzione:

Coordinate polari:

$$I_r = \iint_{C_r} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dxdy \;=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \log\left(\frac{1}{r}\right) \to +\infty$$

$$J_r = \iint_{C_r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{1}{\rho} \rho d\rho = 2\pi(1 - r) \to 2\pi$$

2. Esercizio

Sia $C_R = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ *con* $R > 1$. *Calcolare*

$$I_R = \iint\limits_{C_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\, dxdy,\ J_R = \iint\limits_{C_R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy.$$

Quanto valgono $\lim_{R \to \infty} I_R$ *e* $\lim_{R \to \infty} J_R$?

2.1. Soluzione:

Coordinate polari:

$$I_R = \iint_{C_R} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy \;=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^R \frac{1}{\rho^4}\, \rho d\rho = \pi\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) \to \pi$$

$$J_R = \iint_{C_R} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^R \frac{1}{\rho}\rho d\rho = 2\pi(R-1) \to +\infty$$

3. Esercizio

Sia E l'insieme del primo quadrante $x \geq 0, y \geq 0$ delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalla retta $x = 1$.
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E x\, \sin(y)\, dx\, dy$$

3.1. Soluzione:

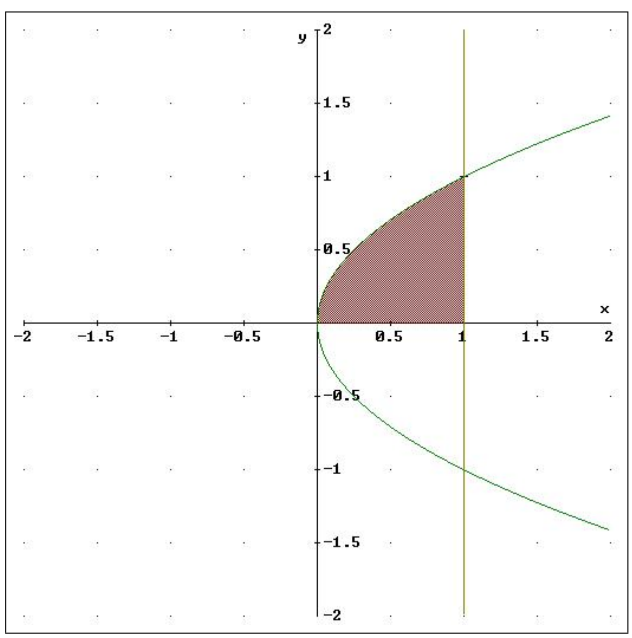


FIGURA 1. L'insieme E: $x \geq 0, y \geq 0,\; x \geq y^2,\; x \leq 1.$

Il dominio E é un dominio normale

- sia rispetto all'asse $x|\quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}$
- sia rispetto all'asse $y|\quad 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 1$:

si hanno pertanto due possibili formule di riduzione per l'integrale doppio assegnato.
Vedremo che una di esse é vantaggiosa, conduce a due integrazioni semplici anche facili, mentre l'altra non lo é, conduce cioé a due altre integrazioni semplici tutt'altro che facili !

$$\iint_E x\sin(y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} x\sin(y)dy = \int_0^1 x(1-\cos(\sqrt{x}))dx$$

$$\iint_E x\sin(y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 x\sin(y)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(y)(1-y^4)dy$$

La prima riduzione non produce vantaggi perché la primitiva di $x\cos(\sqrt{x})$ non é elementare.
La seconda riduzione invece é vantaggiosa: la primitiva di $y^4\sin(y)$ pur laboriosa (un certo numero di integrazioni per parti) é elementare

$$\int y^4\sin(y)dy = -\left(24-12\,y^2+y^4\right)\,\cos(y) + 4\,y\,\left(-6+y^2\right)\,\sin(y)$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sin(y)(1-y^4)dy = \frac{1}{2}\left(-23+12\,\cos(1)+20\,\sin(1)\right) \cong 0.156$$

4. Esercizio

Detto B_t l'insieme del primo quadrante $x \geq 0, y \geq 0$ delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalle rette $y = 1$ e $y = t$ con $0 < t < 1$, calcolare l'integrale

$$\iint_{B_t} \frac{x+1}{y}\,dx\,dy.$$

Calcolare poi il limite di tale integrale al tendere di $t \to 0$.

4.1. Soluzione:

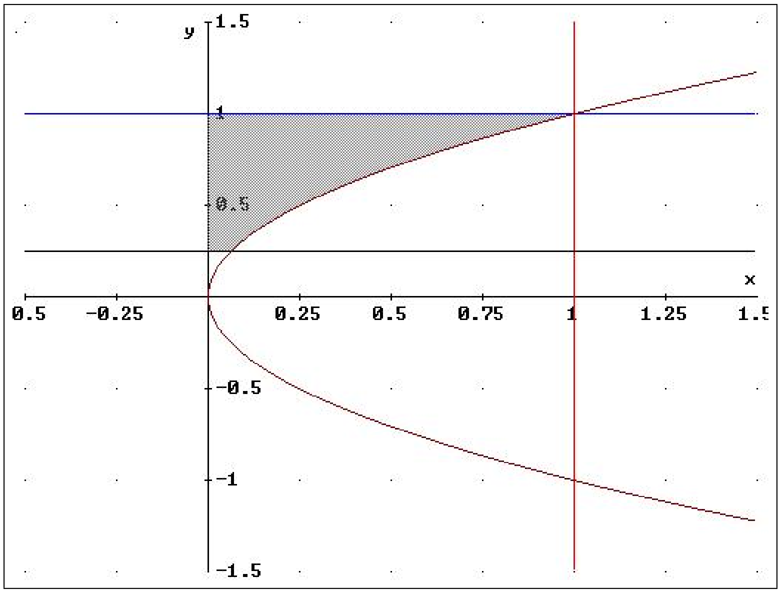


FIGURA 2. L'insieme B_t, $\quad t = 0,25$

Si tratta di un dominio normale rispetto all'asse y

$$B_t : 0 \leq y \leq 1,\, 0 \leq x \leq y^2$$

$$\iint_{B_t} \frac{x+1}{y} dxdy = \int_t^1 dy \int_0^{y^2} \frac{x+1}{y} dx = \frac{1}{2} \int_t^1 y[(y^2+1)^2 - (0+1)^2] dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}t^4 - t^2\right)$$

Il limite richiesto, per $t \to 0$ é naturalmente $\frac{5}{8}$.

5. Esercizio

Calcolare i seguenti integrali curvilinei lungo la curva Γ*:*

$$\int_\Gamma (2 + x^2 y)\, ds, \quad \Gamma :\, x^2 + y^2 = 1,\, y \geq 0;$$
$$\int_\Gamma y\, ds, \quad \Gamma :\, x = t^2,\, y = t,\, 0 \leq t \leq 2;$$
$$\int_\Gamma \frac{y}{x}\, ds, \quad \Gamma :\, x = t^4,\, y = t^3,\, \frac{1}{2} \leq t \leq 1;$$
$$\int_\Gamma xy^4\, ds, \quad \Gamma :\, x^2 + y^2 = 16,\, x \geq 0.$$

5.1. Soluzione:

- $$\int_\Gamma (2+x^2 y)\, ds, \quad \Gamma:\ x^2+y^2=1,\ y\geq 0$$

  La curva, una semicirconferenza, ha la rappresentazione

$$x=\cos(t), y=\sin(t),\ t\in[0,\pi], \quad ds=\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}dt=dt$$

  Ne segue

  $$\int_\Gamma (2+x^2y)\, ds = \int_0^\pi (2+\cos^2(t)\sin(t))dt = 2\pi+\frac{2}{3}$$

  Il numero trovato rappresenta l'area del muro elevato sulla semicirconferenza

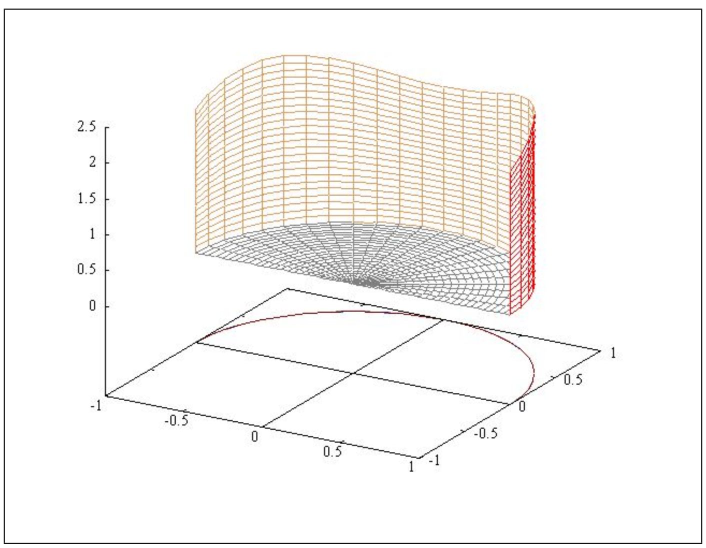


Figura 3. Il muro di altezza $2+x^2y$ elevato sui punti della circonferenza.

- $$\int_\Gamma y\, ds, \quad \Gamma:\ x=t^2,\ y=t,\ 0\leq t\leq 2;$$

  La curva é un arco di parabola $x=y^2$.

$$\int_\Gamma y\, ds\ = \int_0^2 t\sqrt{(2t)^2+1^2}dt = \int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt = -\frac{1}{12}+\frac{17\sqrt{17}}{12}$$

- $$\int_\Gamma \frac{y}{x}\,ds, \quad \Gamma:\ x = t^4,\ y = t^3,\ \frac{1}{2} \le t \le 1;$$

  Servendosi della rappresentazione parametrica della curva si ha

  $$\int_\Gamma \frac{y}{x}\,ds \;=\; \int_{1/2}^{1} \frac{t^3}{t^4}\sqrt{(4t^3)^2 + (3t^2)^2}dt =$$

  $$= \int_{1/2}^{1} t\sqrt{16t^2+9}dt = \frac{125}{48} - \frac{13\sqrt{13}}{48}$$

- $$\int_\Gamma xy^4\,ds, \quad \Gamma:\ x^2+y^2 = 16,\ x \ge 0.$$

  La curva é una semicirconferenza di centro l'origine, raggio 4, contenuta nel semipiano $x \ge 0$: la rappresentazione parametrica é quindi

  $$x = 4\cos(t),\ y = 4\sin(t), \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

  L'integrale si riduce quindi a

  $$\int_\Gamma xy^4\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4^5\cos(t)\sin^4(t)\sqrt{(4\sin(t))^2 + (4\cos(t))^2}dt =$$

  $$= 4^5\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)4\,dt = 4^5\frac{2}{5}$$

  Il valore trovato rappresenta l'area della cancellata che delimita metá della piazza circolare di raggio 4 sul piano $z = 0$

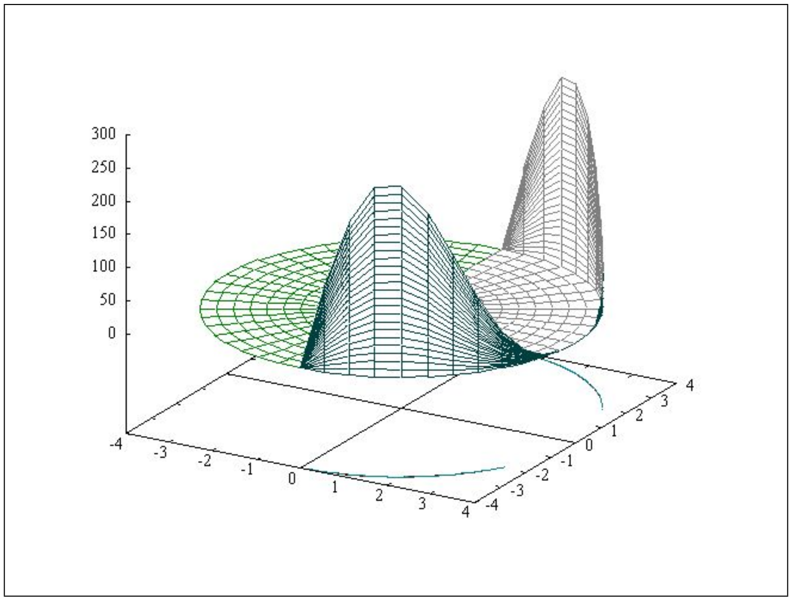


FIGURA 4. La piazzetta circolare e la semicancellata che ne delimita metá.

6. Esercizio

Per quali valori dei parametri a, b, c, d i seguenti campi vettoriali

$$\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (a \sin x + b\, y\, \cos(xy), c\, cosy + d\, x\, \cos(xy))$$

sono irrotazionali in tutto il piano e determinarne il potenziale.

6.1. Soluzione:

Il rotore di un campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \{A(x, y, z),\ B(x, y, z),\ C(x, y, z)\}$$

é un nuovo campo vettoriale rot $\overrightarrow{F}(x, y, z)$ definito simbolicamente dal determinante della seguente matrice

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ A(x, y, z) & B(x, y, z) & C(x, y, z) \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} F = \{C_y - B_x,\ A_z - C_x\ ,\ B_x - A_y\}$$

Le formule indicate includono anche il caso di campi vettoriali piani, basta in essi leggere $C = 0$ e regolarsi di conseguenza.

- $$F(x,y) = (ax + by, cx + dy), \quad \operatorname{rot} F = \{0, 0, c - b\}$$
$$\operatorname{rot} F = 0 \Leftrightarrow c = b$$

- $$F(x,y) = (a \sin x + b\, y\ \cos(xy), c\, cosy + d\, x\ \cos(xy)), \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{rot} F = \{0, 0, d\cos(xy) - dxy\sin(xy) - (b\cos(xy) - byx\sin(xy))\}$$
$$\operatorname{rot} F = 0 \Leftrightarrow d = b$$

$\boxed{\text{Potenziali:}}$

- $$U_x = ax + by, U_y = bx + dy : U = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \varphi(y)$$
$$bx + \varphi'(y) = bx + dy \Rightarrow \varphi'(y) = dy \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2}dy^2$$
$$U(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + dy^2 + 2bxy)$$

- $$U_x = a \sin x + b\, y\ \cos(xy), , \ U_y = c\ \cos y + b\, x\ \cos(xy))$$
$$U(x,y) = -a\cos(x) + b\sin(xy) + \varphi(y)$$
$$bx\cos(xy) + \varphi'(y) = c\, cosy + b\, x\ \cos(xy) \Rightarrow \varphi'(y) = c\, cosy$$
$$U(x,y) = -a\cos(x) + b\sin(xy) - c\sin(y)$$

7. Esercizio

Sia Γ_1 *la parte di circonferenza di centro* $(0,0)$ *e raggio* 1 *contenuta nel semipiano* $y \leq 0$*, orientata da* $(-1,0)$ *a* $(1,0)$*, e sia* Γ_2 *la frontiera del quadrato centrato nell'origine e lato* 2*, percorsa in senso antiorario. Calcolare*
i) il lavoro di $\mathbf{F}(x,y) = (x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)})$ *lungo la curva orientata* Γ_1*;*
ii) il lavoro di $\mathbf{F}(x,y) = (-y, 2x)$ *lungo la curva orientata* Γ_2*.*

7.1. Soluzione:

Primo campo vettoriale:

$$\mathbf{F}(x,y) = (x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)})$$

$$\Gamma_1 : x = \cos(t), y = \sin(t),\ t \in [0,\pi] \quad \overrightarrow{T} = \{\sin(t), -\cos(t)\}$$

Si tenga conto come la scelta del versore tangente tenga conto dell'orientamento assegnato, quello orario.

$$\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = \int_0^{\pi} \left\{\cos(t)e^{-1}\sin(t) - \sin(t)e^{-1}\cos(t)\right\} dt = 0$$

Per quanto concerne la curva quadrato decomponiamola nei quattro segmenti lati:

$$\Gamma_2 : \begin{cases} \ell_1 & x = t, & y = -1, & t \in [-1,1] & \overrightarrow{T} = \{1,0\} \\ \ell_2 & x = 1, & y = t, & t \in [-1,1] & \overrightarrow{T} = \{0,1\} \\ \ell_3 & x = t, & y = 1, & t \in [-1,1] & \overrightarrow{T} = \{-1,0\} \\ \ell_4 & x = -1, & y = t, & t \in [-1,1] & \overrightarrow{T} = \{0,-1\} \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = \sum_{k=1}^{4} \int_{\ell_k} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds =$$

$$= \int_{-1}^{1} te^{-(t^2+1)}dt + \int_{-1}^{1} te^{-(1+t^2)}dt - \int_{-1}^{1} te^{-(t^2+1)}dt - \int_{-1}^{1} te^{-(1+t^2)}dt$$

I quattro integrali sono ovviamente uguali, pertanto tenuto conto dei segni, la loro somma vale 0.

$\boxed{\text{Osservazione}}$

Il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)})$ ammette ovviamente potenziale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \nabla \left\{\frac{1}{2}e^{-(x^2+y^2)}\right\}$$

pertanto riesce (*Teorema sul lavoro dei campi gradiente*)

$$\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = U(-1,0) - U(1,0) = 0$$

Tenuto conto poi che Γ_2 é una curva chiusa é ovvio che il lavoro di un campo gradiente

$$\oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T}\, ds = 0$$

sia nullo.

Secondo campo vettoriale:
$\mathbf{F}(x,y) = (-y, 2x)$ ha $\operatorname{rot} F = \{0,0,-3\} \neq \{0,0,0\}$ pertanto non é un campo gradiente cioé non ammette potenziale e quindi il suo lavoro lungo la curva chiusa Γ_2 puó anche essere non nullo [1].
La semplicitá del campo F consente di valutarne il lavoro in maniera (apparentemente) piú semplice di quanto sia da attendersi: l'algoritmo di calcolo é illustrato in Figura, indicando vicino ad ogni lato il lavoro compiuto da F nel percorrerlo,

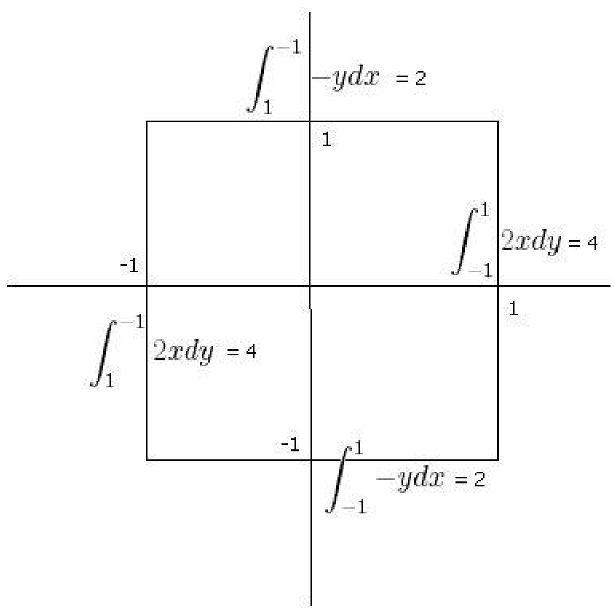


Figura 5. Il lavoro lungo i quattro lati

$$\int_{\ell_1} F \times T ds = \int_{-1}^{1} -y dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\int_{\ell_2} F \times T ds = \int_{-1}^{1} 2x dy = \int_{-1}^{1} 2 dy = 4$$

[1] ...puó, non deve !

$$\int_{\ell_3} F \times T ds = \int_{-1}^{1} -y(-1) dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\int_{\ell_4} F \times T ds = \int_{-1}^{1} 2x(-1) dy = \int_{-1}^{1} 2dy = 4$$

Ne deriva che

$$\int_{\Gamma_2} F \times T ds = 12$$

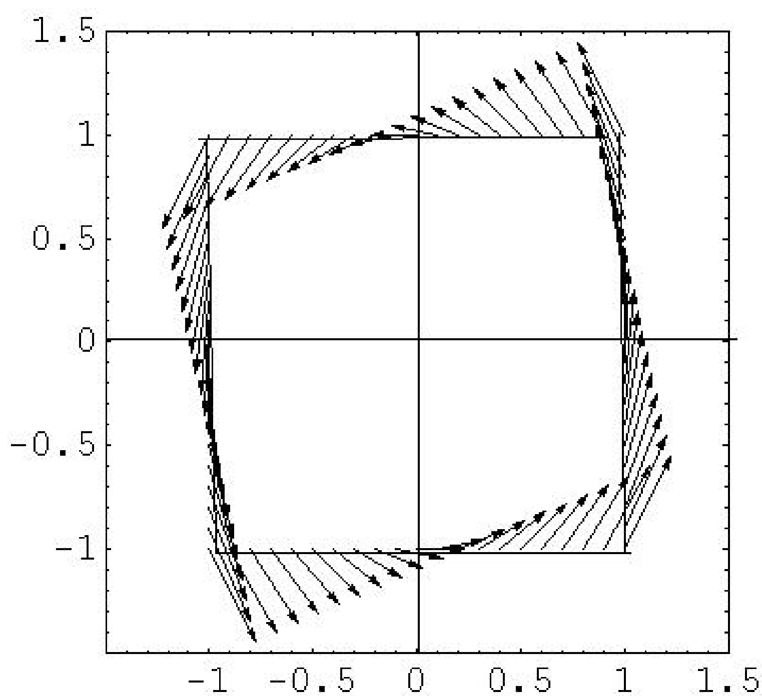


FIGURA 6. Percorrendo Γ_2 in senso antiorario il campo F compie un lavoro positivo.

La Figura 6 permette di riconoscere che il lavoro lungo i due lati orizzontali siano uguali, come pure uguali siano i lavori percorrendo i due lati verticali.
Permette di riconoscere inoltre che il lavoro lungo i due lati verticali, dove il campo é piú parallelo al lato percorso, é maggiore di quello ottenuto lungo i due lati orizzontali.

8. Esercizio

Sia $\mathbf{F}(x,y) = (5x+3y-1, 3x+5y+2)$.
i) Calcolare, se esiste, un potenziale per $\mathbf{F}$.
ii) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo la curva* Γ, *dove* Γ *è la parte di circonferenza di centro* $(0,0)$ *contenuta nel primo quadrante, orientata da* $(1,0)$ *a* $(0,1)$.
iii) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo il segmento orientato che congiunge i punti* $(0,1)$ *e* $(1,0)$.

8.1. Soluzione:

i:

$$\mathbf{F}(x,y) = (5x+3y-1, 3x+5y+2): \quad \operatorname{rot} F = \{0,0,0\}$$

$$U_x = 5x+3y-1, \quad U_y = 3x+5y+2 : U(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy - x + \varphi(y)$$

$$3x + \varphi'(y) = 3x+5y+2 \;\rightarrow\; varphi(y) = \frac{5}{2}y^2 + 2y$$

$$U(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy - x + \frac{5}{2}y^2 + 2y$$

ii:

$$\int_\Gamma F \times T ds = U(0,1) - U(1,0) = \frac{5}{2} + 2 - \left(\frac{5}{2} - 1\right) = 3$$

iii:

$$\left|\int_S F \times T ds\right| = |U(0,1) - U(1,0)| = 3$$

Non avendo precisato in che verso tale segmento viene percorso il lavoro di F puó essere 3 ma anche -3.

9. Esercizio

Sia $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$.
i) Calcolare il lavoro della forza $\mathbf{F}(x,y,z)$ *lungo il segmento dall'origine al punto* $(1,1,1)$,
ii) Determinare, se esiste, un potenziale del campo $\mathbf{F}$.

9.1. Soluzione:

i:

$$\int_S F \times T ds = \int_0^1 (t + 2t + 3t)dt = \int_0^1 6tdt = 3$$

ii: É evidente che le tre componenti del campo F sono le tre derivate parziali di

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2$$

Ovviamente il calcolo precedente del lavoro puó essere dedotto anche dalla conoscenza del potenziale

$$\int_S F \times T ds = U(1, 1, 1) - U(0, 0, 0) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$$

10. Esercizio

Sia S l'insieme formato dai punti $\{P_k = (x_k, y_k)\}$ di una successione convergente a $Q \in R^2$.
Dimostrare che

- *S é limitato,*
- *$S \cup \{Q\}$ é chiuso,*
- *S é misurabile e ha misura 0.*

10.1. Soluzione:

Questo esercizio ha carattere teorico: la soluzione viene proposta per apprezzare alcune delle definizioni stabilite(limitatezza di un insieme, requisiti degli insiemi chiusi, misurabilitá).

i: Poiché la successione converge a Q tutti i suoi termini di indici successivi ad un fissato n_0 cadono nel cerchio di centro Q e raggio $r = 1$.

Fuori di tale cerchio cadono al piú i primi n_0 punti della successione.

Sia d il massimo delle distanze di tali n_0 punti da Q: tali n_0 punti cadono quindi nel cerchio di centro Q e raggio d

Si riconosce allora che **tutti** i punti della successione cadono nel cerchio di raggio Q e raggio $d+1$.

ii: UN INSIEME É CHIUSO SE E SOLO SE IL SUO COMPLEMENTARE É APERTO

Prendiamo pertanto un punto $P \notin S \cup \{Q\}$ e proviamo che esiste tutto un cerchio di centro P che non tocca $S \cup \{Q\}$: intanto sará $P \neq Q$ e quindi esisterá un cerchio $\mathcal{C}$ di centro Q che non contiene P.: indichiamo con δ la distanza di P da tale cerchio.

Tenuto conto della convergenza della successione a Q tutti i punti della successione di indici successivi ad un certo n_0 staranno dentro il cerchio $\mathcal{C}$.

Calcoliamo le distanze dei primi n_0 punti della successione da P e sia δ_0 la minima di tali distanze: costruiamo ora un cerchio $\mathcal{C}_{\prime}$ di centro P e raggio ρ minore sia di δ che di δ_0.

Il cerchio $\mathcal{C}_{\prime}$ non contiene alcun punto di $S \cup \{Q\}$.

Abbiamo quindi riconosciuto l'esistenza in corrispondenza di ogni punto del complementare di $S \cup \{Q\}$ di un cerchio di centro il punto e ancora tutto contenuto nel complementare di $S \cup \{Q\}$.

Questo risultato significa che $S \cup \{Q\}$ é un insieme aperto.

Tanto basta a riconoscere che $S \cup \{Q\}$ é chiuso.

iii: Per riconoscere che $S \cup \{Q\}$ ha misura nulla basta riconoscere che esso é contenuto in un numero finito di cerchi che abbiano somma delle aree piccola quanto si vuole.

Consideriamo un cerchio $\mathcal{C}_{\prime}$ di centro Q e raggio ϵ: solo un numero finito n_0 di punti dell'insieme $S \cup \{Q\}$ puó cadere fuori di $\mathcal{C}_{\prime}$.

Tali n_0 punti appartengono certamente agli n_0 cerchi di centro tali punti e raggi

$$\epsilon\frac{1}{2}, \epsilon\frac{1}{2^2}, ..., \epsilon\frac{1}{2^{n_0}}$$

La somma delle aree di tali n_0 cerchietti

$$\pi\epsilon^2 \left\{ (\frac{1}{2^2} + (\frac{1}{2^2})^2 + ... + (\frac{1}{2^2})^{n_0} \right\}$$

Tale somma - si ricordi la formula della somma della serie geometrica - non supera

$$\pi\epsilon^2 \, \frac{1}{2^2} \, \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \, \pi\epsilon^2$$

Complessivamente si puó racchiudere $S \cup \{Q\}$ in un numero finito di cerchi di area complessiva inferiore a

$$\pi\epsilon^2 + \frac{1}{3} \, \pi\epsilon^2 = \frac{4}{3}\pi\epsilon^2$$

L'arbitrarietá di ϵ rende tale valore piccolo quanto si vuole e quindi consente di riconoscere che $S \cup \{Q\}$ ha area esterna nulla.

Parte 2

Gli esoneri 2004

CAPITOLO 8

Primo esonero

9 febbraio 2004 - **Soluzioni Primo Esonero**

1. Esercizio

Assegnata

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- *Determinare le linee di livello* $f(x,y)=c, \quad c=-1,\, 0,\, 1,$
- *determinare le linee di livello per* $\forall c\in R$ *e determinare l'immagine* $f(R^2)$,
- *esaminare la continuitá nell'origine,*
- *esaminare l'esistenza o meno delle derivate prime nell'origine.*

Soluzione:

(1) Domanda:
- livello $c=-1$:

$$f(x,y)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2=-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

- livello $c=0$:

$$f(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\, x\neq 0$$

- livello $c=1$:

$$f(x,y)=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2=x^2+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=0$$

(2) Domanda: Tenuto presente che gli insiemi di livello per $c=-1,0,1$ sono riusciti non vuoti possiamo intanto dire che

$$-1,0,1\in f(R^2)$$

Tenuto presente che $-(x^2+y^2)\leq x^2-y^2\leq(x^2+y^2)$ ne deriva che

$$-1\leq\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(R^2-\{(0,0)\})\subseteq[-1,1]$$

L'immagine $f(R^2)$ si compone di

$$f(R^2 - \{(0,0)\}) \cup f(0,0)$$

essa é pertanto

$$[-1,\, 1] \cup \{1\} = [-1,\, 1]$$

l'intervallo chiuso e limitato $[-1,\, 1]$.

(3) Domanda:

Sull'asse delle x, $y = 0$, la funzione vale, origine inclusa, 1, sull'asse delle y, $x = 0$, esclusa l'origine, la funzione vale -1.

Quindi non esiste alcun intorno dell'origine in cui sia soddisfatta, ad esempio, la diseguaglianza

$$|f(x,y) - f(0,0)| \,<\, \varepsilon, \quad \forall \varepsilon < 1$$

la funzione pertanto non é continua nell'origine.

(4) Domanda:

$$\begin{cases} f_x(0,0): & \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 & \Rightarrow f_x(0,0) = 0 \\ f_y(0,0): & \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = & \lim_{h\to 0} \frac{-1-1}{h} \end{cases}$$

Tenuto presente che non esiste il $\lim_{h\to 0} -2/h$ se ne conclude che non esiste la derivata $f_y(0,0)$.

2. Esercizio

Assegnata $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ *determinare*

- *l'immagine* $f(R^2)$
- *i punti critici di* f
- *la matrice hessiana.*
- *Verificare che* $f(x,y)$ *é armonica.*

Soluzione:

(1) Domanda: L'immagine $f(R^2)$ é, tenuto conto che f é continua e R^2 é connesso, é, necessariamente, un intervallo I.

Considerato che $f(x,x) = -4x^4$ quantitá negativa comunque grande si riconosce che I é illimitato inferiormente. Considerato inoltre che $f(x,0) = x^4$ quantitá positiva comunque grande si riconosce che I é illimitato anche superiormente. Quindi

$$I = R$$

(2) DOMANDA:

I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 & 4x^3-12xy^2=0 & 4x(x^2-3y^2)=0 \\ f_y(x,y)=0 & -12x^2y+4y^3=0 & 4y(-3x^2+y^2)=0 \end{cases}$$

Le soluzioni rispettive delle due equazioni del sistema sono:

prima equazione:	$x=0$	$x=\sqrt{3}y$	$x=-\sqrt{3}y$
seconda equazione:	$y=0$	$y=\sqrt{3}x$	$y=\sqrt{3}x$

tre rette per l'origine per la prima equazione, altre tre rette, sempre per l'origine, per la seconda. L'unico punto che soddisfi il sistema é pertanto l'origine che rappresenta quindi l'unico punto critico di f.

(3) DOMANDA:

La matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,x^2-12\,y^2 & -24\,x\,y \\ -24\,x\,y & -12\,x^2+12\,y^2 \end{pmatrix}$$

(4) DOMANDA: Una funzione $f(x,y)$, dotata delle derivate seconde, si dice armonica se $f_{xx}+f_{yy}=0$.

Nel nostro caso, come giá calcolato nella matrice hessiana, riesce

$$f_{xx}=12\,x^2-12\,y^2, \quad f_{yy}=-12\,x^2+12\,y^2$$

da cui é evidente che $x^4-6x^2y^2+y^4$ é una funzione armonica.

3. Esercizio

- *Determinare l'insieme E di definizione della funzione*

$$f(x,y)=\sqrt{1-4x^2-16y^2}+x$$

e riconoscere se é limitato, chiuso, connesso,
- *esaminare le stesse proprietá anche per l'insieme immagine $f(E)$.*
- *Indicata con*

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & se \quad (x,y)\in E \\ \\ 4x^2+16y^2+x+a\,y+c & se \quad (x,y)\notin E \end{cases}$$

determinare per quali a, c la F é continua in tutto il piano.

Soluzione:

(1) DOMANDA:

L'addendo $\sqrt{1-4x^2-16y^2}$ richiede

$$1-4x^2-16y^2 \geq 0$$

pertanto l'insieme di definizione della $f(x,y)$ é

$$E = \{(x,y)\} : 4x^2+16y^2 \leq 1$$

la regione del piano delimitata dall'ellisse di centro l'origine e semiassi $a_x = 1/2$ e $b_y = 1/4$.

Si tratta di un insieme
- limitato,
- chiuso,
- connesso.

(2) DOMANDA:

La funzione $f(x,y)$ é continua in E, chiuso, limitato e connesso: quindi l'immagine é
- chiusa e limitata (teorema di Weierstrass)
- connessa (teorema d'esistenza degli zeri)

L'immagine $f(E)$ é quindi un intervallo chiuso e limitato di R.

(3) DOMANDA:

La funzione $F(x,y)$ é ovviamente continua sia all'interno di E che all'esterno: gli unici possibili punti di discontinuitá possono incontrarsi sull'ellisse

$$4x^2+16y^2 = 1$$

I punti di tale curva appartengono a E pertanto su tali punti riesce

$$F(x,y) = x$$

L'algoritmo che definisce la F fuori di E prende invece sui punti dell'ellisse i valori

$$1+x+ay+c$$

avendo tenuto conto che $4x^2+16y^2$ vale, sui punti dell'ellisse, 1.

La continuitá richiesta equivale al *buon incollamento*

$$x = 1+x+ay+c, \quad \Rightarrow \quad 0 = ay+(1+c)$$

La F riesce pertanto continua anche sui punti dell'ellisse se e solo se

$$a = 0, \quad c = -1$$

4. Esercizio

Assegnata

$$f(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

- *Calcolare il*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$
- *Verificare che f é prolungabile per continuitá nell'origine, e, detta f^* la funzione prolungata, calcolarne le derivate $f_x^*(0,0)$, $f_y^*(0,0)$,*
- *studiare la differenziabilitá di f^* in R^2.*

Soluzione:

(1) Domanda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Tenuto conto che

$$-(x^2+y^2) \leq x^2 - y^2 \leq (x^2+y^2)$$

riesce

$$-|y| \leq y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \leq |y|$$

Tenuto conto che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

si riconosce che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

(2) Domanda:

La funzione f^* é definita ovviamente come

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Le sue derivate parziali nell'origine si calcolano con i relativi limiti dei rapporti incrementali :

$\boxed{f_x^*(0,0):}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^*(h,0) - f^*(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0$$

$\boxed{f_y^*(0,0):}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^*(0,h)-f^*(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h}=1 \tag{1}$$

(3) Domanda:

La funzione f^* fuori dell'origine coincide con la funzione razionale f differenziabile in tutti i punti $(x,y)\neq(0,0)$.

Resta da esaminare la differenziabilitá - o meno - di f^* nell'origine: si tratta di studiare il limite seguente

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f^*(h,k)-[f^*(0,0)+f_x^*(0,0)h+f_y^*(0,0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ovvero

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{k^3-h^2k}{h^2+k^2}-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{-2h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

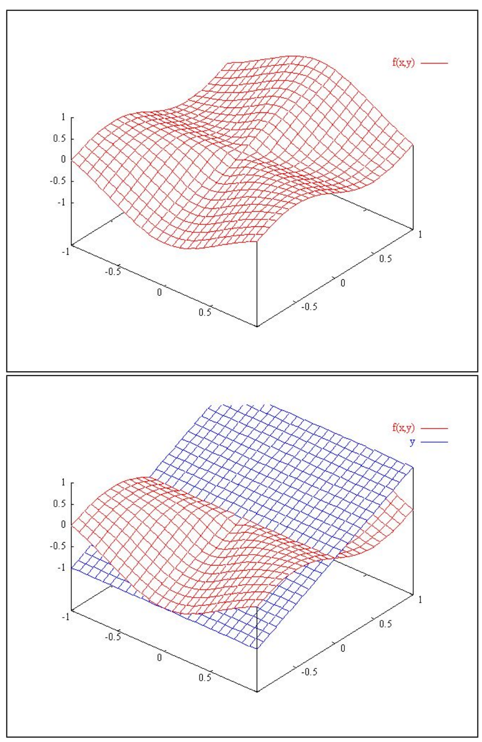


Figura 1. Il grafico della f^* e del piano $z = y$ (candidato piano tangente...)

La funzione f^* sarebbe differenziabile nell'origine se il limite (1) valesse 0: é evidente, invece, che l'ultima frazione non ha affatto limite 0: basta studiarla per

$$h = k$$

su tali valori riesce

$$\frac{-2h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = -2\frac{k^3}{k^3 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

CAPITOLO 9

Secondo esonero

1 marzo 2004 - **Soluzioni Secondo Esonero**

1. Esercizio

Assegnata la funzione $f(x,y) = \sqrt{1+\sin(3x+5y)}$

- *determinare il gradiente di* f *in* $(0,0)$ *e la matrice hessiana di* f *in* $(0,0)$*;*
- *scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *nel punto* $(0,0,1)$*;*
- *scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado di* f *nell'origine;*
- *riconoscere se la forma quadratica, relativa alla matrice hessiana in* $(0,0)$*, sia definita positiva o negativa, semidefinita positiva o negativa, indefinita.*

1.1. Soluzione:

- $$\nabla f(x,y) = \{f_x(x,y),\ f_y(x,y)\} =$$
  $$= \left\{ \frac{3\,\cos(3\,x+5\,y)}{2\,\sqrt{1+\sin(3\,x+5\,y)}},\ \frac{5\,\cos(3\,x+5\,y)}{2\,\sqrt{1+\sin(3\,x+5\,y)}} \right\}$$
  Nell'origine il gradiente é pertanto:
  $$\nabla f(0,0) = \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$$
  Le derivate seconde:
  $$\begin{cases} f_{xx}(x,y) &= \frac{-9\cos(3\,x+5\,y)^2}{4\,(1+\sin(3\,x+5\,y))^{\frac{3}{2}}} - \frac{9\,\sin(3\,x+5\,y)}{2\,\sqrt{1+\sin(3\,x+5\,y)}} \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{-15\cos(3\,x+5\,y)^2}{4\,(1+\sin(3\,x+5\,y))^{\frac{3}{2}}} - \frac{15\,\sin(3\,x+5\,y)}{2\,\sqrt{1+\sin(3\,x+5\,y)}} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{-25\cos(3\,x+5\,y)^2}{4\,(1+\sin(3\,x+5\,y))^{\frac{3}{2}}} - \frac{25\,\sin(3\,x+5\,y)}{2\,\sqrt{1+\sin(3\,x+5\,y)}} \end{cases}$$

Le derivate seconde nell'origine:

$$\begin{cases} f_{xx}(0,0) & = -\dfrac{9}{4} \\ \\ f_{xy}(0,0) & = -\dfrac{15}{4} \\ \\ f_{yy}(0,0) & = -\dfrac{25}{4} \end{cases}$$

La matrice hessiana nell'origine:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{9}{4} & -\dfrac{15}{4} \\ \\ -\dfrac{15}{4} & -\dfrac{25}{4} \end{pmatrix}$$

- Piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,1)$:

$$z = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y$$

- Polinomio di Taylor di secondo grado nell'origine:

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}\left\{-\frac{9}{4}x^2 - 2\frac{15}{4}xy - \frac{25}{4}y^2\right\} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{8}\left(3x + 5y\right)^2$$

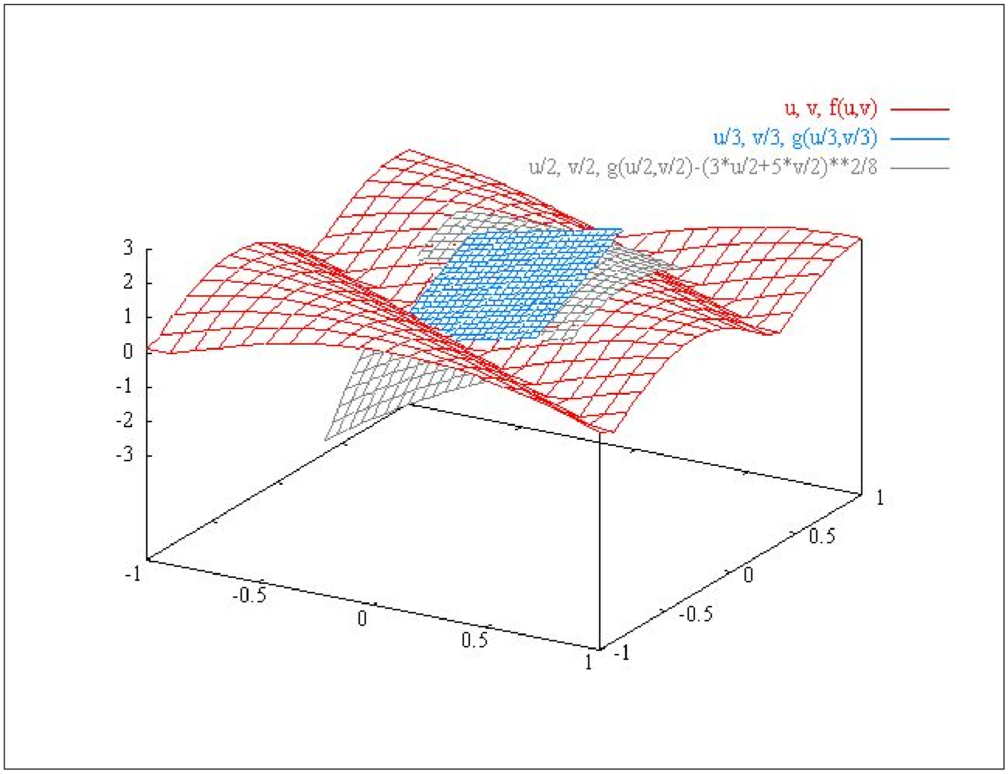


FIGURA 1. Il grafico di f in rosso, quello del piano tangente in blu, quello del polinomio di secondo grado in grigio.

- La forma quadratica determinata dalla matrice hessiana
$$\left\{-\frac{9}{4}x^2 - 2\frac{15}{4}xy - \frac{25}{4}y^2\right\}$$
coincide, come osservato sopra con
$$-\frac{1}{4}\left(3x + 5y\right)^2$$
espressione **semidefinita negativa**: prende sempre valori ≤ 0, e si annulla su tutti i punti della retta $3x + 5y = 0$.

2. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

.

- *Scrivere l'espressione del gradiente di f e della matrice hessiana di f nel generico punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;*
- *determinare i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$;*
- *classificare i punti critici di f;*
- *determinare il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

.

2.1. Soluzione:

- Il gradiente:

$$\nabla f(x,y) = -2\, e^{-x^2-y^2} \, \left\{x\, \left(-1 + x^2 + y^2\right),\, y\, \left(-1 + x^2 + y^2\right)\right\}$$

Le derivate seconde:

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) & = e^{-x^2-y^2}\, \left(2 + 4\, x^4 - 2\, y^2 + 2\, x^2\, \left(-5 + 2\, y^2\right)\right) \\ f_{xy} & = 4\, e^{-x^2-y^2}\, x\, y\, \left(-2 + x^2 + y^2\right) \\ f_{yy}(x,y) & = e^{-x^2-y^2}\, \left(2 + 4\, y^4 - 2\, x^2 + 2\, y^2\, \left(-5 + 2\, x^2\right)\right) \end{cases}$$

La matrice hessiana $Hf(x,y)$ é pertanto

$$e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2 + 4\, x^4 - 2\, y^2 + 2\, x^2\, \left(-5 + 2\, y^2\right) & 4\; x\, y\, \left(-2 + x^2 + y^2\right) \\ 4\; x\, y\, \left(-2 + x^2 + y^2\right) & 2 + 4\, y^4 - 2\, x^2 + 2\, y^2\, \left(-5 + 2\, x^2\right) \end{pmatrix}$$

- I punti critici

$$\begin{cases} -2\, e^{-x^2-y^2}\, x\, \left(-1 + x^2 + y^2\right) & = 0 \\ -2\, e^{-x^2-y^2}\, y\, \left(-1 + x^2 + y^2\right) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\, \left(-1 + x^2 + y^2\right) & = 0 \\ y\, \left(-1 + x^2 + y^2\right) & = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono pertanto

$$(0,0), \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

l'origine e tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

- Per classificare i punti critici trovati consideriamo in essi le matrici hessiane

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf|_{x^2+y^2=1} = -4\,e^{-1} \begin{pmatrix} x^2 & x\,y \\ x\,y & y^2 \end{pmatrix}$$

  - La forma quadratica relativa al punto critico origine é definita positiva, quindi il punto é punto di **minimo relativo**.
  - La forma quadratica sui punti critici (x_0, y_0) appartenenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ é la seguente

$$-4\,e^{-1}\left(x_0^2 h^2 + 2x_0 y_0 hk + y_0^2 k^2\right) = -4\,e^{-1}\left(x_0 h + y_0 k\right)^2$$

    forma evidentemente semidefinita negativa. L'essere la forma semidefinita non permette di classificare i punti critici appartenenti alla circonferenza.

  Tuttavia tenuto conto del carattere radiale della funzione f dedotta dalla funzione

$$g(t) = t^2\,e^{-t^2}, \quad t \geq 0$$

  il cui grafico, vedi Figura 2, presenta nel punto $t = 1$ un massimo relativo, si riconosce che i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di **massimo relativo** per la funzione f.

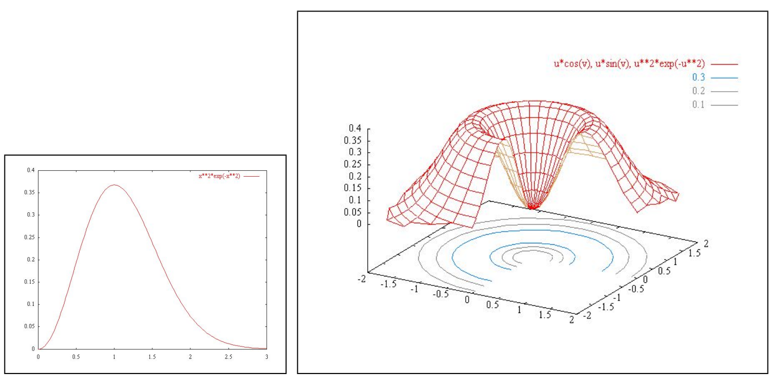


FIGURA 2. Il grafico di $g(t) = t^2\,e^{-t^2}, \quad t \geq 0$ e una parte di quello della funzione radiale corrispondente $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

- Il massimo e il minimo richiesti si possono trovare:
  - nel punto critico origine: $f(0,0) = 0$

- su tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, sui quali $f = e^{-1}$
- sui punti della frontiera $x^2 + y^2 = 4$ sui quali $f = 4\,e^{-4}$

É facile riconoscere che

- **minimo:** 0, valore assunto nell'origine,
- **massimo:** e^{-1}, valore assunto su tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

3. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{y}} \cos(t^2)\, dt.$$

- *Determinare l'insieme di definizione di F e scrivere, dove esiste, il gradiente di F nel generico punto (x, y);*
- *scrivere la matrice hessiana di F nel generico punto (x, y);*
- *determinare i punti critici di F in $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ e rappresentarli nel piano;*
- *classificare i punti critici di F in $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.*

3.1. Soluzione:

- La funzione $F(x, y) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{y}} \cos(t^2)\, dt.$ é definita in tutto il quadrante chiuso $x \geq 0, y \geq 0$. Riesce

$$\begin{cases} F_x(x, y) & = -\cos((\sqrt{x})^2)\,(\sqrt{x})' = -\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} \\ F_y(x, y) & = \cos(\left(\sqrt{y}\right)^2)\,\left(\sqrt{y}\right)' = \dfrac{\cos(y)}{2\sqrt{y}} \end{cases}$$

Il gradiente é pertanto:

$$\nabla F(x, y) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}},\ \frac{\cos(y)}{\sqrt{y}}\right\}$$

- Le derivate seconde:

$$\begin{cases} F_{xx} &= \dfrac{\cos(x)}{4\,x^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\sin(x)}{2\,\sqrt{x}} \\ F_{xy} &= 0 \\ F_{yy} &= \dfrac{-\cos(y)}{4\,y^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\sin(y)}{2\,\sqrt{y}} \end{cases}$$

La matrice hessiana é pertanto:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\cos(x)}{4\,x^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\sin(x)}{2\,\sqrt{x}} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\cos(y)}{4\,y^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\sin(y)}{2\,\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

- Punti critici appartenenti al quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} &= 0 \\ \dfrac{\cos(y)}{2\sqrt{y}} &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pi/2, 3\pi/2, \quad y = \pi/2, 3\pi/2$$

Complessivamente si ottengono 4 punti appartenenti al quadrato assegnato, vedi Figura 2

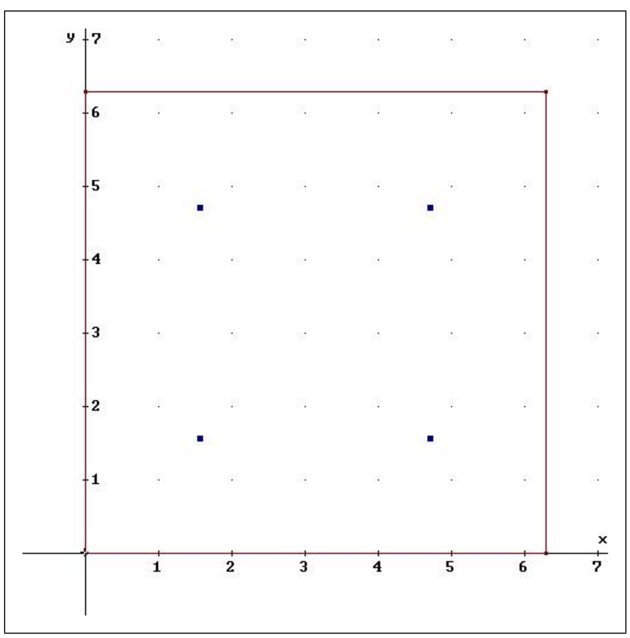


FIGURA 3. I quattro punti critici nel quadrato assegnato

- L'espressione da valutare su ciascuno dei punti critici é

$$F_{xx}.F_{yy} - F_{xy}^2 = F_{xx}.F_{yy}$$

che, sui punti critici, si riduce a

$$-\frac{\sin(x)\sin(y)}{4\sqrt{xy}}$$

Tale espressione é negativa nei due punti

$$(\pi/2, \pi/2), \quad (3\pi/2, 3\pi/2)$$

che pertanto saranno **punti di sella**, viene positiva negli altri due che pertanto saranno
  - $(3\pi/2, \pi/2)$, $F_{xx} < 0$ punto di **massimo relativo**,
  - $(\pi/2, 3\pi/2)$, $F_{xx} > 0$ punto di **minimo relativo**.

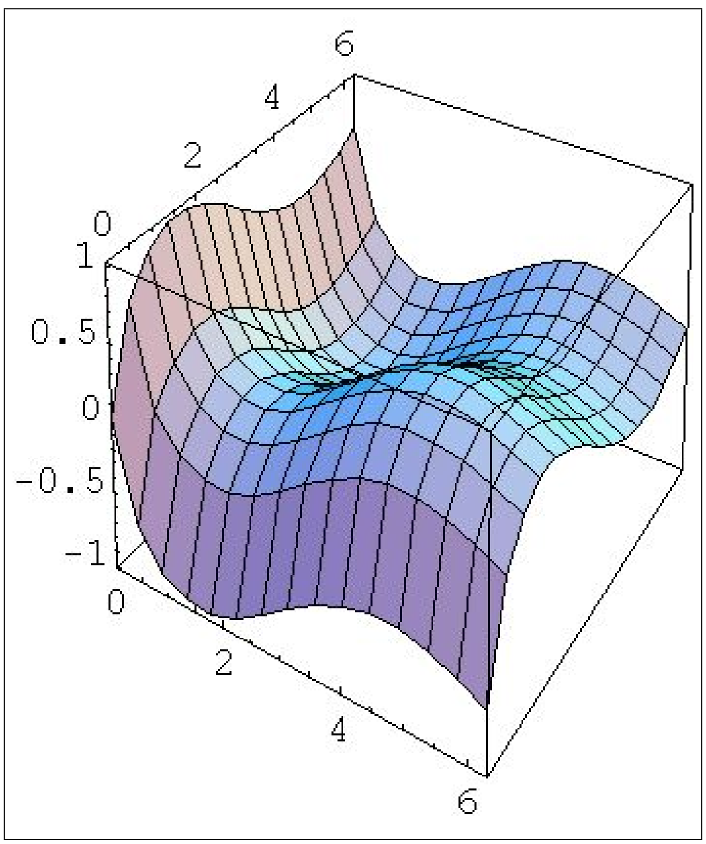


FIGURA 4. $F(x,y) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{y}} \cos(t^2)\,dt.$

4. Esercizio

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e si consideri $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(u,v) = \int_u^v f(t)\,dt.$$

- *Scrivere l'espressione del gradiente di F nel generico punto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;*
- *scrivere l'espressione della matrice hessiana di F nel generico punto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;*
- *utilizzando le espressioni ottenute, determinare i punti critici di F quando $f(t) = \mathrm{e}^{t^3-1} - 1$;*
- *utilizzando le espressioni ottenute, classificare i punti critici di F quando $f(t) = \mathrm{e}^{t^3-1} - 1$.*

4.1. Soluzione:

- $$F(u,v) = \int_u^v f(t)\,dt. \Rightarrow \begin{cases} F_u(u,v) & = -f(u) \\ F_v(u,v) & = f(v) \end{cases}$$
- $$HF(u,v) = \begin{pmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{vu} & F_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'(u) & 0 \\ 0 & f'(v) \end{pmatrix}$$
- Punti critici con $f(t) = \mathrm{e}^{t^3-1} - 1$

  $$F_u(u,v) = -\left(\mathrm{e}^{u^3-1} - 1\right) = 0, \quad F_v(u,v) = \mathrm{e}^{v^3-1} - 1 = 0$$

  Ne segue

  $$e^{u^3-1} = 1 \Rightarrow u = 1, \quad e^{v^3-1} = 1 \Rightarrow v = 1$$

  un solo punto critico $(1,1)$.
- Tenuto conto che $f'(t) = 3t^2\,e^{t^3-1}$ la matrice hessiana nell'unico punti critico diventa

  $$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  La forma quadratica é non definita e quindi, l'unico punto critico, rappresenta un **punto di sella**.

OSSERVAZIONE 4.1. *Per riconoscere direttamente che il punto $(1,1)$ sia un punto di sella esaminiamo i valori della funzione $F(u,v)$ sulle due rette parallele agli assi per tale punto:*

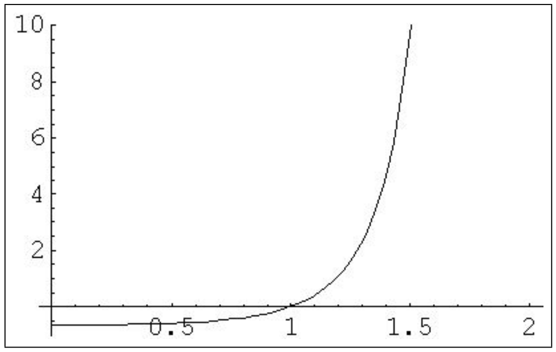


FIGURA 5. $\mathrm{e}^{t^3-1}-1$, la funzione integranda.

- *lavoriamo sulla retta verticale* $u = 1$*:*

$$F(1,v) = \int_1^v \left(\mathrm{e}^{t^3-1}-1\right) dt, \quad F_v(1,v) = \mathrm{e}^{v^3-1}-1$$

$$F_v(1,v) = \mathrm{e}^{v^3-1}-1 = \left\{ \begin{array}{lll|ll} <0 & \textit{se} & v<1 & F(1,v) & \textit{decrescente} \\ 0 & \textit{se} & v=1 & F(1,1) & \textit{punto di minimo} \\ >0 & \textit{se} & v>1 & F(1,v) & \textit{crescente} \end{array} \right.$$

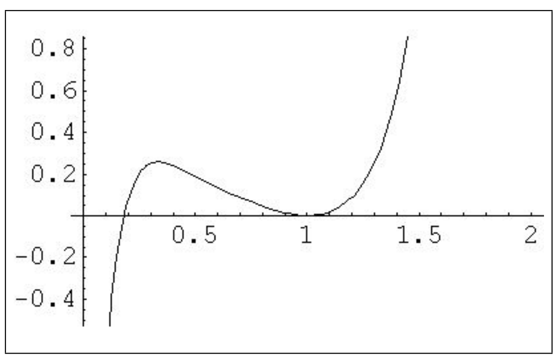


FIGURA 6. $F(1,v) = \int_1^v \left(\mathrm{e}^{t^3-1}-1\right) dt$

- *lavoriamo sulla retta orizzontale* $v = 1$*:*

$$F(u,1) = \int_u^1 \left(\mathrm{e}^{t^3-1}-1\right) dt, \quad F_u(u,1) = -\mathrm{e}^{u^3-1}-1$$

$$F_u(u,1) = -\mathrm{e}^{u^3-1}-1 = \left\{ \begin{array}{lll|ll} >0 & \textit{se} & u<1 & F(1,v) & \textit{crescente} \\ 0 & \textit{se} & u=1 & F(1,1) & \textit{punto di massimo} \\ >0 & \textit{se} & u>1 & F(u,1) & \textit{decrescente} \end{array} \right.$$

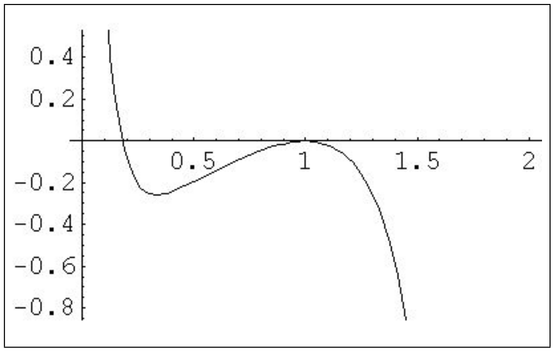


FIGURA 7. $F(u,1) = \int_u^1 \left(e^{t^3-1} - 1\right) dt$

Il grafico della F intorno al punto $(1,1)$:

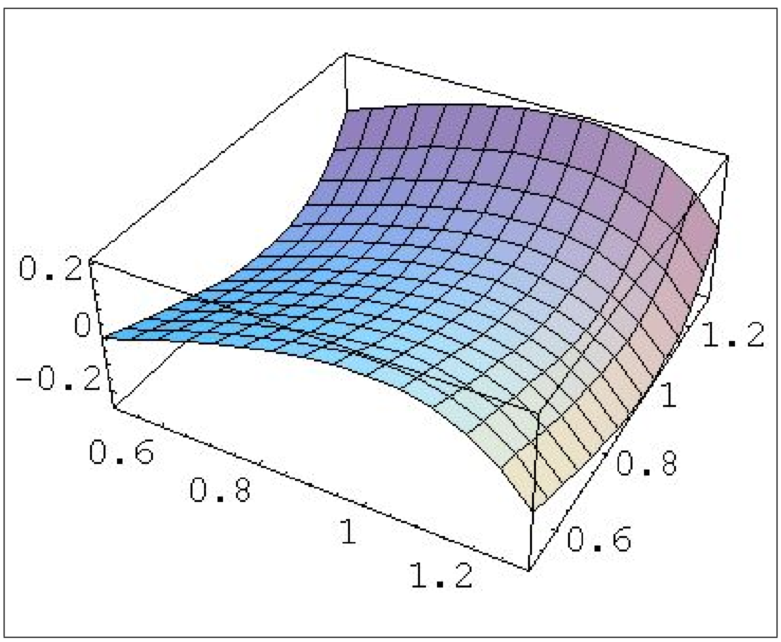


FIGURA 8. $F(u,v) = \int_u^v \left(e^{t^3-1} - 1\right) dt, \quad (u,v) \in [0.4, 1.3] \times [0.4, 1.3]$

Muovendosi orizzontalmente, $v = 1$, vedi Figura 6, si riconosce un profilo altimetrico a forma di parabola rivolta verso il basso, mentre muovendosi verticalmente, $u = 1$, vedi Figura 7, si riconosce un profilo a parabola rivolta verso l'alto.

CAPITOLO 10

Terzo esonero

20 marzo 2004 - **Soluzioni Terzo Esonero**

1. Esercizio

Sia

$$B_a = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ \frac{1}{a}x^2 \leq y \leq x^2\}, \quad a \geq 1$$

- *Disegnare l'insieme B_a in corrispondenza ad $a = 1, a = 2, a = 3$.*
- *Calcolare l'integrale doppio*

$$I(a) = \int\int_{B_a} \frac{x^2}{x^4 + y^2}\, dx\, dy.$$

- *Determinare* $\lim_{a \to +\infty} I(a)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

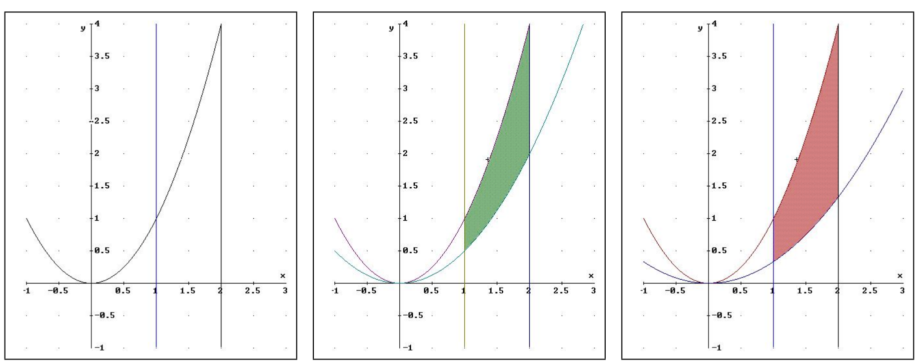


FIGURA 1. I tre domini B_1, B_2, B_3, si noti che il primo non ha punti interni,

- l'integrale doppio ($a \geq 1$) :

$$\int_1^2 dx \int_{x^2/a}^{x^2} \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy = \int_1^2 dx \int_{x^2/a}^{x^2} \frac{x^2}{x^4} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} dy =$$

$$= \int_1^2 \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right)\Big|_{y=x^2/a}^{y=x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(1/a) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{1}{a})$$

- il limite:

$$\lim_{a\to+\infty} I(a) = \frac{\pi}{4} - \lim_{a\to+\infty} \arctan(1/a) = \frac{\pi}{4}$$

2. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left(y, x, \frac{z}{1+z^2}\right)$$

- *calcolare il* $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$*;*
- *stabilire se* $\overrightarrow{F}$ *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un potenziale* $U(x,y,z)$ *per* $\overrightarrow{F}$*;*
- *calcolare il lavoro*

$$W = \int_C F \times T ds$$

essendo C *l'elica di equazioni parametriche* $x = \cos(t), y = \sin(t), z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$ *percorsa da* $(1,0,0)$ *a* $(1,0,2\pi)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\operatorname{rot} F\text{:}}$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & \frac{z}{1+z^2} \end{vmatrix} = \{0,0,0\}$$

$\boxed{\text{conservativo}}$ Tenuto conto che

- F é irrotazionale
- F é definito in tutto lo spazio,

se ne conclude che é conservativo.
Un suo potenziale si ottiene prendendo

- le primitive $yx + c(y, z)$ della prima componente F_1 rispetto ad x
- imponendo che esse soddisfino anche le due condizioni:
  - $U_y = x + c_y(y, z) = x,\ c_y = 0, \to c = c(z)$
  - $U_z = c_z(y, z) = \frac{z}{1+z^2}, \to c(z) = \frac{1}{2}\log(1 + z^2)$
- ne deriva il seguente potenziale

$$U(x, y, z) = xy + \frac{1}{2}\log(1 + z^2)$$

$\boxed{\text{Il lavoro:}}$

Riconosciuto che F é conservativo e che

$$F(x, y, z) = \nabla\left(xy + \frac{1}{2}\log(1 + z^2)\right)$$

il teorema fondamentale sul lavoro dei campi conservativi permette di affermare che

$$W = \int_C F \times T ds = U(B) - U(A)$$

essendo $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 0, 2\pi)$ gli estremi della curva C: da cui

$$W = U(1, 0, 2\pi) - U(1, 0, 0) = \frac{1}{2}\log(1 + (2\pi)^2)$$

$\boxed{\text{Il calcolo diretto:}}$

Il lavoro poteva essere calcolato anche tramite il calcolo diretto dell'integrale lungo l'elica $x = \cos(t), y = \sin(t), z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$:

$$W = \int_=^{2\pi}\left\{y(t)x'(t) + x(t)y'(t) + \frac{z(t)}{1 + z^2(t)}z'(t)\right\}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) + \frac{t}{1 + t^2}\right\}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{t}{1 + t^2}dt = \frac{1}{2}\log(1 + (2\pi)^2).$$

Il conto é stato abbreviato dall'ovvio fatto che

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(t)dt = \int_0^{2\pi}\cos^2(t)dt$$

3. Esercizio

- *Calcolare l'integrale doppio*

$$\int\int_D |x\,y| dx\,dy$$

essendo $D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

- *Calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int_{\mathcal{E}} |xy| ds$$

essendo $\mathcal{E}$ *l'ellisse* $x^2 + 4y^2 = 1$

Soluzione:

L'integrale doppio:

La regione D é delimitata dall'ellisse di centro l'origine e semiassi $a_x = 1$ e $b_y = 1/2$: evidenti motivi di simmetria fanno riconoscere che

$$\iint_D |xy| dxdy = 4 \iint_{D_+} xy\, dxdy$$

avendo indicato con D_+ il quarto di D appartenente al primo quadrante $x \geq 0,\ y \geq 0$.
D_+ é normale rispetto all'asse x

$$D_+ : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$$

riesce pertanto

$$4 \iint_{D_+} xy\, dxdy = 4 \int_0^1 xdx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} ydy = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \frac{1}{8}$$

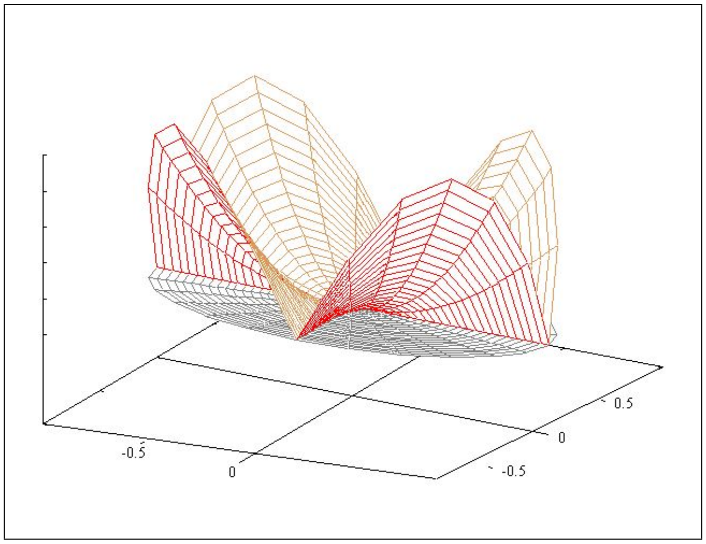


Figura 2. Il valore dell'integrale doppio rappresenta il volume, la cubatura, dell'edificio dalla base grigia a quota $z = 0$ alla copertura architettonicamente fantasiosa, grafico della $|xy|$

L'integrale curvilineo:

La rappresentazione parametrica é $x = \cos(t)$, $y = \frac{1}{2}\sin(t)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$, si ha pertanto

$$\int_{\mathcal{E}} |xy| ds = \int_0^{2\pi} |\cos(t)\frac{1}{2}\sin(t)| \sqrt{\sin^2(t) + \frac{1}{4}\cos^2(t)} dt$$

Gli stessi motivi di simmetria osservati precedentemente fanno riconoscere che

$$\int_{\mathcal{E}} |xy| ds = 4 \int_0^{\pi/2} \cos(t)\frac{1}{2}\sin(t) \sqrt{\sin^2(t) + \frac{1}{4}\cos^2(t)} dt$$

svolgendo i calcoli si ha, tenuto conto che $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$,

$$\int_{\mathcal{E}} |xy| ds = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t) \sqrt{3\sin^2(t) + 1}\ dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3\sin^2(t) + 1\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{9}(8 - 1) = \frac{7}{9}$$

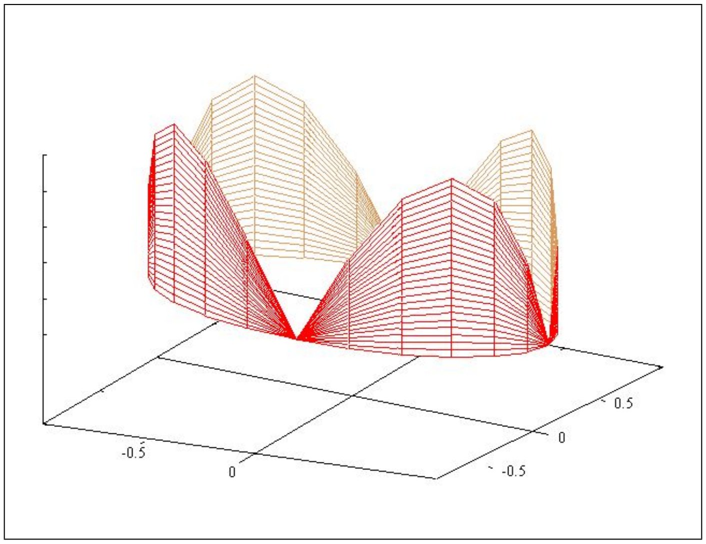


FIGURA 3. Il valore dell'integrale curvilineo rappresenta la superficie delle pareti laterali, dell'edificio, architettonicamente fantasioso, che ha come copertura il grafico della $|xy|$

Parte 3

L'esame 2004

CAPITOLO 11

Esame di marzo

1. Esercizio

Si consideri il triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ e $C = (2,0)$ e sia $f(x,y) = x^2 + y^3$. Determinare
i) la derivata direzionale di f nel punto A nella direzione $\overrightarrow{AB}$;
ii) la derivata direzionale di f nel punto B nella direzione $\overrightarrow{BC}$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le derivate direzionali si calcolano tramite il gradiente della funzione nel punto

$$\nabla f(x,y) = \left(2x,\, 3y^2\right)$$

e il versore $\overrightarrow{\nu} = \{\alpha,\, \beta\}$ della direzione assegnata:

$$\frac{df}{d\nu} = \left(2x,\, 3y^2\right) \times (\alpha,\, \beta)$$

$\boxed{\text{punto A=(0,0):}}$

$$\nu_{AB} = \left(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2}\right), \Rightarrow \frac{df}{d\nu} = (0,\, 0) \times \left(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2}\right) = 0$$

$\boxed{\text{punto B=(1,1):}}$

$$\nu_{BC} = \left(1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2}\right), \Rightarrow \frac{df}{d\nu} = (2,\, 3) \times \left(1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2}\right) = -1/\sqrt{2}$$

2. Esercizio

Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{4x-x^2-y^2}$$

del disco $D = \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Punti critici:}}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \;\Rightarrow\; e^{4x-x^2-y^2}(4-2x) = 0 \\ f_y = 0 \;\Rightarrow\; e^{4x-x^2-y^2}(-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = 2, y = 0)$$

L'unico punto critico trovato $(2,0)$ é anche il centro del disco D assegnato. In esso la funzione vale

$$e^{8-4} = e^4$$

$\boxed{\text{Sulla frontiera:}}$

Sulla circonferenza frontiera di D

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$$

quindi, sulla frontiera di D, riesce

$$f(x,y) = e^0 = 1$$

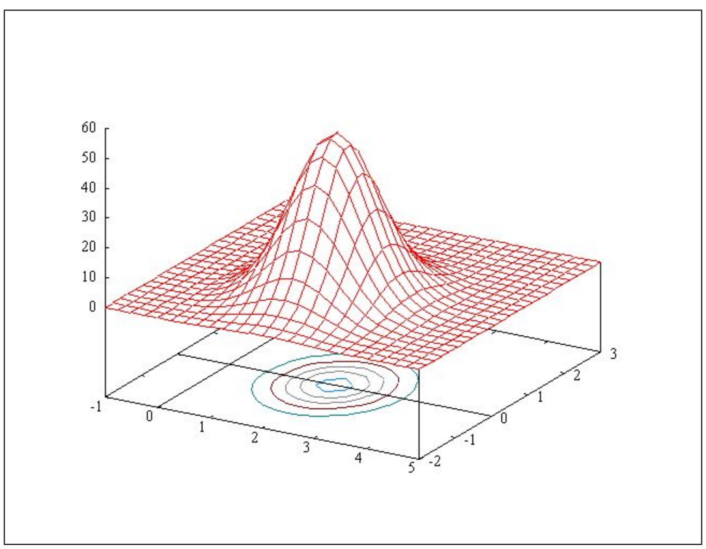


FIGURA 1. $f(x,y) = \mathrm{e}^{4x-x^2-y^2}$

Se ne conclude che

- MASSIMO $= e^4$ assunto nel centro del disco D
- MINIMO $= 1$ assunto su tutti i punti della circonferenza frontiera di D

3. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \{x^4 + 3ax^2y + bxy^2,\ x^2y - x^3 + ay^4\}$$

- *determinare* $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che* $\overrightarrow{F}$ *sia conservativo in* $\mathbb{R}^2$
- *in corrispondenza degli* a, b *trovati, determinare un potenziale per* $\overrightarrow{F}$
- *ancora in corrispondenza degli* a, b *trovati, calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo il segmento orientato da* $(0,0)$ *a* $(1,1)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\text{Condizione necessaria:}}$

La condizione necessaria perché F sia conservativo é

$$F_{1_y} = F_{2_x} \quad \Leftrightarrow \quad 3ax^2 + 2bxy = 2xy - 3x^2$$

da cui segue

$$a = -1, \quad b = 1$$

$\boxed{\text{Un potenziale}}$

Consideriamo il campo

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \{x^4 - 3x^2y + xy^2, x^2y - x^3 - y^4\}$$

dedotto da quello assegnato ponendo $a = -1$ e $b = 1$: ogni suo potenziale $U(x,y)$ deve soddisfare la

$$U_x(x,y) = x^4 - 3x^2y + xy^2 \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = \frac{1}{5}x^5 - x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)$$

imponendo che tale $U(x,y)$ soddisfi anche la

$$U_y(x,y) = x^2y - x^3 - y^4 \quad \Rightarrow \quad -x^3 + x^2y + c'(y) = x^2y - x^3 - y^4$$

implica

$$c'(y) = -y^4 \quad \Rightarrow \quad c(y) = -\frac{1}{5}y^5$$

Pertanto un potenziale di F é

$$U(x,y) = \frac{1}{5}x^5 - x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{5}y^5$$

$\boxed{\text{Il lavoro}}$

Per il lavoro richiesto si ha, tenuto conto che $\overrightarrow{F} = \nabla U$,

$$W = \int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = U(1,1) - U(0,0) = -\frac{1}{2}$$

Il calcolo del lavoro puó anche essere eseguito direttamente tramite l'integrale curvilineo: il segmento ha la seguente rappresentazione parametrica

$$x = t, \ y = t, \ t \in [0,1], \quad T = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \quad ds = \sqrt{2}dt$$

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_S \{x^4 - 3x^2y + xy^2, x^2y - x^3 - y^4\} \times \{1,1\} ds =$$

$$\int_0^1 \left[t^4 - 3t^2t + t\,t^2 + t^2t - t^3 - t^4\right] dt = \int_0^1 \left[-2t^3\right] dt = -\frac{1}{2}$$

4. Esercizio

Calcolare

$$\iint_D y\,dx\,dy.$$

essendo D il disco $x^2 + (y-2)^2 \le 4$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il dominio D é un cerchio di centro $C = (0,2)$ e raggio 2 che si puó rappresentare, in coordinate polari con

$$x = \rho\cos(\theta), y = 2 + \rho\sin(\theta), \ \rho \in [0,2] \ \theta \in [0, 2\pi]$$

Pertanto

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2 + \rho\sin(\theta))\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 2\rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\sin(\theta)\rho d\rho = 8\pi$$

avendo tenuto conto che il secondo integrale vale 0 per via del fattore $\sin(\theta)$.

$\boxed{\text{Un calcolo alternativo immediato:}}$

Indicato con D_0 il cerchio di centro l'origine e raggio 2 é facile riconoscere che

$$\iint_D y dxdy = \iint_{D_0} (y+2)dxdy = 2\iint_{D_0} dxdy = 8\pi$$

avendo tenuto conto che

$$\iint_{D_0} y dxdy = 0$$

per evidenti motivi di simmetria.

CAPITOLO 12

Esame di settembre

1. Esercizio

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \sqrt[3]{4+3(x^2+y^2)}dxdy$$

essendo $D := x^2+y^2 \leq 2$.

SOLUZIONE:

Serviamoci delle coordinate polari: l'integrale doppio assegnato si trasforma in

$$\iint_D \sqrt[3]{4+3(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt[3]{4+3\rho^2}\rho d\rho$$

$$= \frac{1}{6}\,2\pi\, \frac{(4+3\rho^2)^{4/3}}{4/3}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\left(10\sqrt[3]{10} - 4\sqrt[3]{4}\right) \approx 11.9339$$

2. Esercizio

Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = 4xy - 5x^2 + 5y^2$ *nel quadrato* $Q : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1$.

SOLUZIONE:

Punti estremali interni:

$$\begin{array}{rl} f_x(x,y) = & 4y - 10x = 0 \\ f_y(x,y) = & 4x + 10y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow x = 0,\ y = 0, \quad f(0,0) = 0$$

Matrice hessiana:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \det = -116 < 0$$

L'origine é un punto di sella.
Studio sui quattro segmenti che compongono la frontiera:

$$\begin{array}{llcl} x = 1 & f(1,y) & = & 4y - 5 + 5y^2 \\ y = 1 & f(x,1) & = & 4x - 5x^2 + 5 \\ x = -1 & f(-1,y) & = & -4y - 5 + 5y^2 \\ y = -1 & f(x,-1) & = & -4x - 5x^2 + 5 \end{array}$$

I valori agli estremi e nel punto in cui si annulla la derivata prima sono riportati qui di seguito:

$$\begin{array}{l|l|l} f(1,-1) = -4 & f(1,-4/10) = -\frac{29}{5} & f(1,1) = 4 \\ f(-1,1) = -4 & f(4/10,1) = \frac{29}{5} & f(1,1) = 4 \\ f(-1,-1) = 4 & f(-1,4/10) = -\frac{29}{5} & f(-1,1) = -4 \\ f(-1,-1) = 4 & f(4/10,-1) = \frac{13}{5} & f(1,-1) = -4 \end{array}$$

Si riconosce, vedi Figura 1, che

- **minimo** $= -\dfrac{29}{5}$
  raggiunto nei due punti della frontiera $(1, -4/10)$, $(-1, 4/10)$
- **massimo** $= \dfrac{29}{5}$
  raggiunto nei due punti della frontiera $(4/10, 1)$, $(-4/10, -1)$

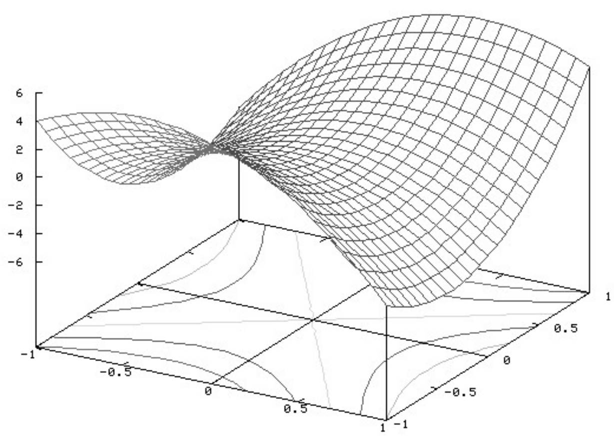


FIGURA 1. $f(x, y) = 4xy - 5x^2 + 5y^2 : \quad |x| \leq 1,\ |y| \leq 1.$

3. Esercizio

Determinare il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale l'origine, relativo alla funzione

$$f(x, y) = e^x \cos(x + y)$$

SOLUZIONE:

Il polinomio richiesto é, per definizione, il seguente

$$P(x, y) = f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\}$$

Occorre pertanto determinare i vari coefficienti:

$$\begin{array}{llll}
f(x,y) = & e^x \cos(x+y) & f(0,0) = & 1 \\
f_x(x,y) = & e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y) & f_x(0,0) = & 1 \\
f_y(x,y) = & -e^x \sin(x+y) & f_y(0,0) = & 0 \\
f_{xx}(x,y) = & -2\, e^x \, \sin(x+y) & f_{xx}(0,0) = & 0 \\
f_{xy}(x,y) = & -e^x \, \cos(x+y) - e^x \, \sin(x+y) & f_{xy}(0,0) = & -1 \\
f_{yy}(x,y) = & -e^x \, \cos(x+y) & f_{yy}(0,0) = & -1
\end{array}$$

Ne segue

$$P(x, y) = 1 + x - xy - \frac{1}{2}y^2$$

4. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \{2x + 3y + 1,\ 3x - 5y + 2\}$$

- *Calcolare l'integrale* $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$ *essendo* C_1 *il segmento* $(0,0) - (1,1)$
- *Calcolare l'integrale* $\int_{C_2} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$ *essendo* C_2 *l'arco di parabola* $y = x^2, x \in [0,1]$
- *Provare che* $\overrightarrow{F}$ *ammette potenziale e calcolarne un potenziale.*

SOLUZIONE:

La curva C_1 ha la rappresentazione parametrica $x = t$, $y = t$, $t \in [0,1]$ pertanto

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 (2t + 3t + 1 + 3t - 5t + 2)dt = \int_0^1 (3t + 3)dt = \frac{9}{2}$$

La curva C_2 ha la rappresentazione parametrica $x = t$, $y = t^2$, $t \in [0,1]$ pertanto

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \left[(2t + 3t^2 + 1) + (3t - 5t^2 + 2)2t\right] dt =$$

$$= \int_0^1 (-10t^3 + 9t^2 + 6t + 1)dt = \frac{9}{2}$$

Il campo assegnato é definito in tutto il piano, insieme convesso: tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 1) = \frac{\partial}{\partial x}(3x - 5y + 2) = 3$$

si riconosce che il campo assegnato

ammette potenziale,
ovvero che é un campo gradiente
ovvero ancora che é un campo conservativo

Un potenziale si ricava

- calcolando le primitive rispetto ad x della prima componente $2x + 3y + 1$

$$x^2 + 3xy + x + g(y)$$

- cercando quella che ha derivata rispetto ad y $3x - 5y + 2$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + x + g(y)) = 3x + g'(y) = 3x - 5y + 2$$
- la condizione su $g(y)$ é pertanto
$$g'(y) = -5y + 2 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -\frac{5}{2}y^2 + 2y + c$$

Le funzioni
$$U(x, y) = x^2 + 3xy + x - \frac{5}{2}y^2 + 2y + c$$
sono pertanto potenziali del campo vettoriale assegnato.

Parte 4

Le esercitazioni 2005

CAPITOLO 13

Foglio 1

2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Disegnare i sottoinsiemi del piano

$$-1 \leq x \leq 2, \quad |y| \leq x^2$$

$$|x| \leq 2n, \quad |y| \leq n \quad n = 1, 2, 3$$

$$|x| + |y| \leq 1, \quad |x| + 3|y| \leq 2$$

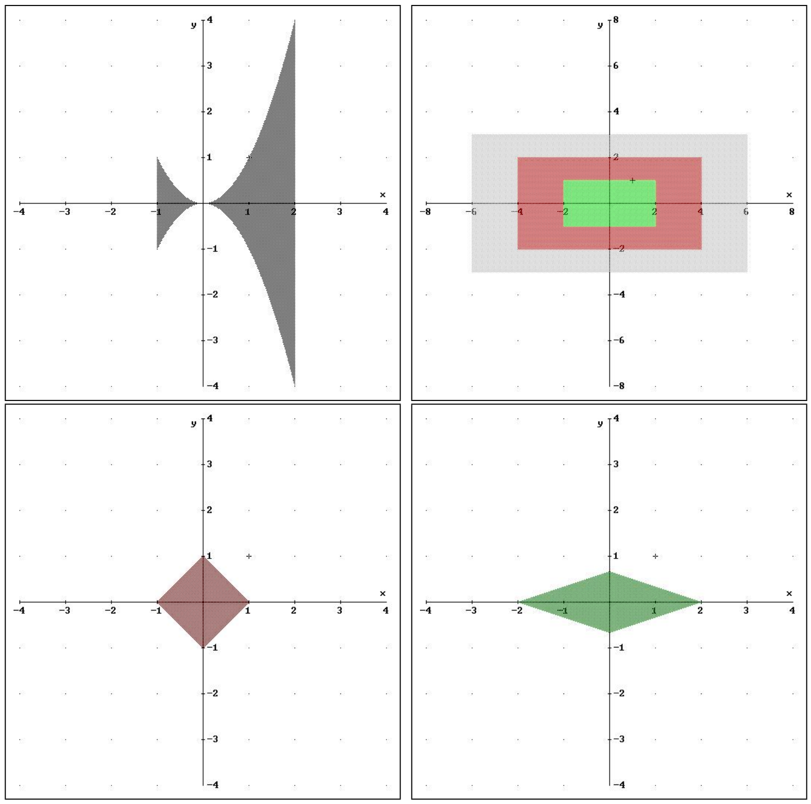


FIGURA 1. I domini richiesti, nell'ordine.

1.0.1. ***Soluzione:***

2. Esercizio

Sia $E : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$ *determinare:*

- *un cerchio di centro l'origine contenente* E *al suo interno,*
- *un cerchio di centro il punto* $C \equiv (0.75, 0.75)$ *interamente contenuto in* E*,*
- *un cerchio di centro* $B \equiv (0, 2)$ *contenente* E*.*

2.1. ***Soluzione:*** I cerchi richiesti, vedi Figura 2 sono determinati, nell'ordine, dalle diseguaglianze seguenti:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2, & R > \sqrt{2} \\ (x - 0.75)^2 + (y - 0.75)^2 \leq r^2, & r < 0.25 \\ x^2 + (y - 2)^2 \leq S^2, & S > \sqrt{5} \end{cases}$$

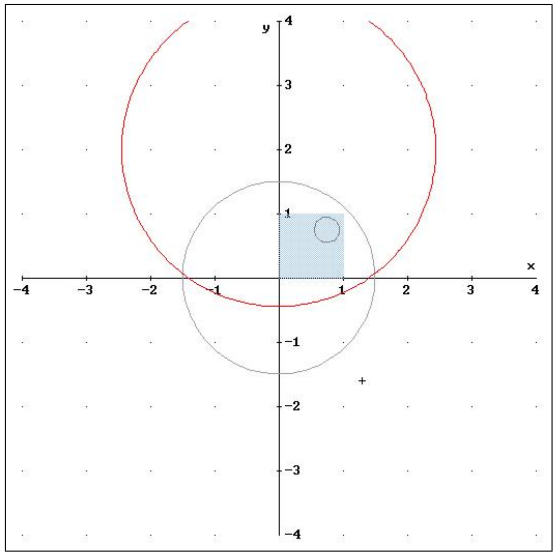


FIGURA 2. I cerchi richiesti

3. Esercizio

Siano

$$A \equiv (1,0), \quad B \equiv (2,1), \quad C \equiv (3,-1), \quad D \equiv (2,-3)$$

e sia Π *la poligonale chiusa* $ABCDA$.

- *Disegnare il quadrilatero determinato dalla poligonale* Π
- *calcolare le lunghezze dei 4 lati di* Π,
- *determinare due cerchi, uno contenente* Π *al suo interno e uno contenuto all'interno del quadrilatero delimitato da* Π.

3.1. *Soluzione:*

- Il quadrilatero $ABCDA$ é disegnato in Figura 3,
- $$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2} &&= \sqrt{2} \\ \overline{BC} &= \sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2} &&= \sqrt{5} \\ \overline{CD} &= \sqrt{(3-2)^2+(-1+3)^2} &&= \sqrt{5} \\ \overline{DA} &= \sqrt{(2-1)^2+(-3)^2} &&= \sqrt{10} \end{aligned}$$
- $x^2+y^2=14, \quad (x-2)^2+y^2=1/10$

L'unico conto di qualche impegno é stato riconoscere quale fosse il raggio adatto a che un cerchio di centro il punto $P_0 = (2,0)$ fosse interno al quadrilatero: riconosciuto, evidente dalla figura, che il lato piú vicino era BC e che la distanza di P_0 da tale lato é $1/\sqrt{5}$ la scelta $\rho^2 = 1/10$ é spiegata...

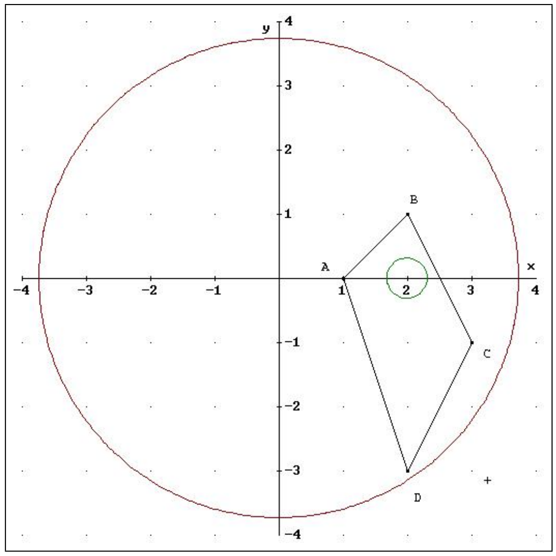


FIGURA 3. La poligonale $ABCDA$ e i cerchi richiesti

4. Esercizio

Determinare l'insieme di definizione delle funzioni

$$\ln(4 - x^2 - y^2), \qquad \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}, \qquad \sqrt{xy + y^2}.$$

4.1. *Soluzione:*

- $\ln(4 - x^2 - y^2) :\to x^2 + y^2 < 4$, cerchio di centro l'origine e raggio 2,
- $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2} :\to \{x^2 - 4 \geq 0\} \cap \{4 - y^2 \geq 0\}$, due semistrisce, vedi Figura 4
- $xy + y^2 \geq 0 :\to y(x + y) \geq 0$, gli angoli intersezione di due semipiani e dei due semipiani opposti , vedi Figura 4,

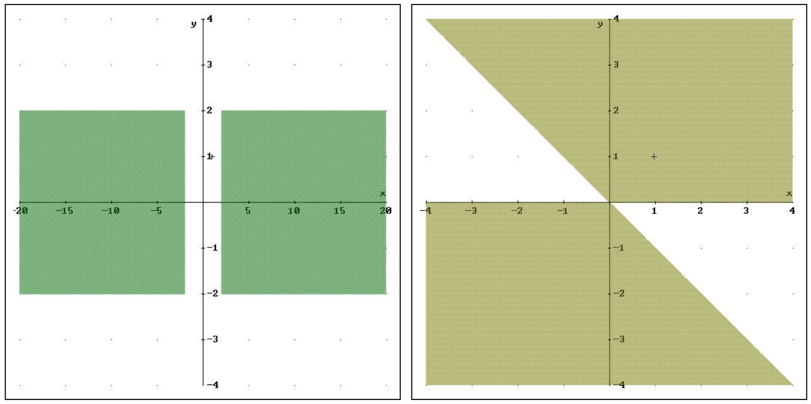


FIGURA 4. Le due semistrisce e i due angoli intersezioni

5. Esercizio

Sia $P_n \equiv \{x_n, y_n\}$ la successione di punti del piano assegnata ricorsivamente al modo seguente:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n - 2y_n), & y_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n) \end{array}$$

- *Disegnare i primi tre punti P_0, P_1, P_2*
- *Esaminare se l'insieme $E = \{P_0, P_1, ...\}$ formato da tali punti sia o meno limitato.*
- *Decidere se la successione $\{P_n\}$ sia convergente.*
- *Determinare i punti della frontiera $\mathcal{F}E$ di E in R^2.*
- *Esaminare se l'insieme E sia o meno chiuso.*

5.1. *Soluzione:* Per riconoscere se l'insieme dei punti $P_n, n \in N$ sia o meno limitato occorre riconoscere se siano limitati (o meno) entrambi gli insiemi di numeri reali x_n, y_n, $n \in N$ costituiti dalle coordinate.

Esaminiamo, con semplici maggiorazioni, i valori dei primi tre o quattro termini x_n e y_n :

$$|x_1| \leq \frac{1}{4}(|x_0| + 2|y_0|) = \frac{3}{4}, \quad |y_1| \leq \frac{1}{4}(2|x_0| + |y_0|) = \frac{3}{4}$$

$$|x_2| \leq \frac{1}{4}(|x_1| + 2|y_1|) = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad |y_2| \leq \frac{1}{4}(2|x_1| + |y_1|) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

e, in generale,

$$|x_{n+1}| \leq \frac{1}{4}(|x_n| + 2|y_n|), \quad |y_{n+1}| = \frac{1}{4}(2|x_n| + |y_n|) \tag{1}$$

da cui, servendosi della (1) si riconosce [1]

$$\begin{cases} |x_n| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ |y_n| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_{n+1}| \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ |y_{n+1}| \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \end{cases}$$

Ne segue che entrambe le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono infinitesime, quindi la successione $\{P_n\}$ é convergente ad O, origine.
É implicito che, avendo riconosciuto che la successione $\{P_n\}$ é convergente abbiamo anche la prova che essa é limitata.
La frontiera di E nel piano R^2 é formata:

- da tutti i punti $P_0, P_1, \ldots$
- dall'origine O, limite della successione.

Si riconosce che il punto limite $O = (0,0)$ non appartiene alla successione: se infatti l'origine coincidesse con uno, P_m dei punti della successione allora

$$\begin{cases} 4x_m = x_{m-1} - 2y_{m-1} \\ 4y_m = 2x_{m-1} + y_{m-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{m-1} - 2y_{m-1} = 0 \\ 2x_{m-1} + y_{m-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{m-1} = 0 \\ y_{m-1} = 0 \end{cases}$$

cioé coinciderebbe con l'origine anche il precedente P_{m-1} e cosí procedendo a ritroso si finirebbe per riconoscere che anche P_0 coincide con l'origine, contrariamente all'ipotesi che $P_= = (1,1)$.
Si riconosce pertanto che l'insieme E non contiene tutti i suoi punti di frontiera (gliene sfugge uno, l'origine. . .) e quindi si riconosce che E non é chiuso.
Per chi é interessato si puó aggiungere che. . . E non é neanche aperto !

6. Esercizio

Assegnate le due funzioni

$$f(x,y) = x + y - 1, \quad g(x,y) = x - 2y$$

disegnare qualitativamente i grafici di

- $f(x,y), \quad g(x,y)$
- $|f(x,y)|, \quad |g(x,y)|$

6.1. *Soluzione:* I grafici delle prime due funzioni sono due piani, quelli delle altre due, vedi Figura 5, sono. . . piani piegati in corrispondenza della retta lungo la quale traversavano il piano terra $z = 0$!

[1] Stiamo usando il principio di *Induzione Matematica*, vedi Courant, Vol. I §1.5, pag 57

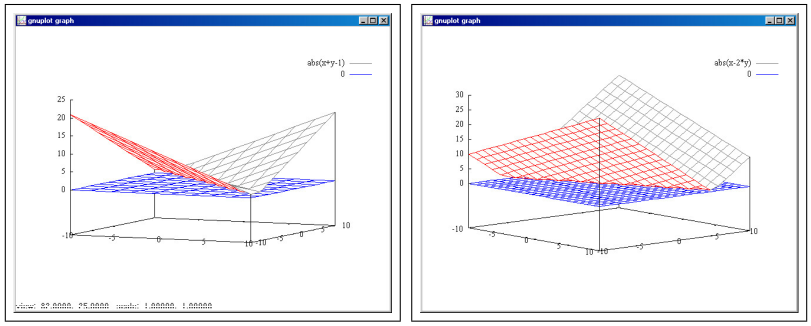


FIGURA 5. ...i due piani piegati.

7. Esercizio

Costruire un polinomio $P(x, y)$ che soddisfi le seguenti condizioni

- $P(0, y) = 0$
- $P(1, y) = 1$
- $P(x, 0) = x$
- $P(x, 1) = x^2$

7.1. ***Soluzione:*** Le condizioni richieste possono essere soddisfatte una alla volta, particolareggiando via via maggiormente il polinomio:

- tutti i polinomi $P(x, y) = x\, q(x, y)$ soddisfano, qualunque sia il polinomio $q(x, y)$ la prima richiesta,
- scelto poi $q(x, y) = 1 + (x - 1)g(x, y)$ si ha, qualunque sia il polinomio $g(x, y)$ che

$$\begin{cases} P(0, y) = 0 \\ P(1, y) = 1 \end{cases}$$

- scelto poi $g(x, y) = y\, s(x, y)$ si ha

$$\begin{cases} P(0, y) = 0 \\ P(1, y) = 1 \\ P(x, 0) = x \end{cases}$$

- In ultimo $P(x, y) = x(1 + (x - 1)\, y\, s(x, y))$, $\quad P(x, 1) = x(1 + (x - 1)\, s(x, 1)) = x^2$ si realizza semplicemente prendendo

$$s(x, y) \equiv 1$$

Il polinomio

$$P(x, y) = x(1 + (x - 1)y) = x^2y - xy + x$$

soddisfa, vedi Figura 6, tutti e quattro i requisiti richiesti.

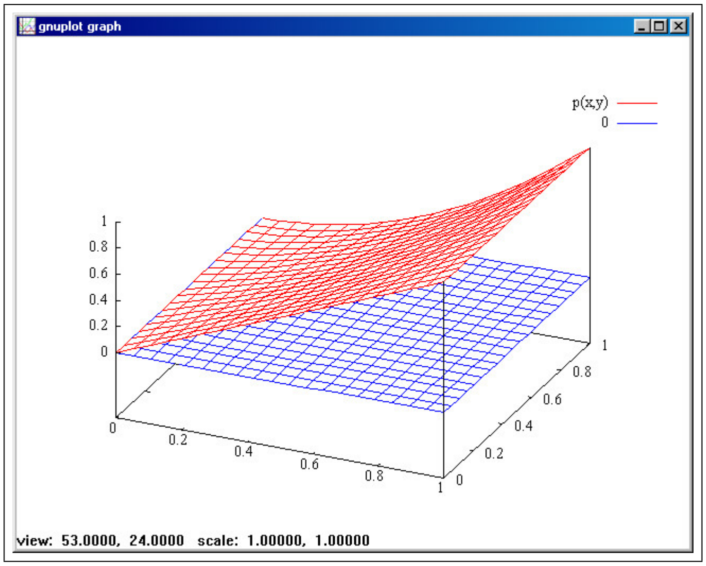


FIGURA 6. Il grafico di $P(x, y) = x(1 + (x - 1)y)$

OSSERVAZIONE 7.1. *Ovviamente il polinomio $P(x, y)$ trovato non é l'unico: se ne ottengono molti altri $Q(x, y)$ aggiungendo ad esso qualsiasi polinomio che valga 0 sulle quattro rette assegnate.*
Ad esempio

$$Q(x, y) = P(x, y) + x\,(x - 1)\,y\,(y - 1)\,p(x, y), \quad \forall p(x, y)$$

OSSERVAZIONE 7.2. *Una seconda osservazione: le condizioni assegnate sulle quattro rette dovevano essere coerenti: nei punti di intersezione di tali rette le due assegnazioni dovevano sposarsi correttamente $P(0, y) = 0 \to P(0, 1) = 0$, ecc.*
In altri termini un problema che avesse (cambiamento sulla seconda riga) richiesto

- $P(0, y) = 0$
- $P(1, y) = 2$
- $P(x, 0) = x$
- $P(x, 1) = x^2$

sarebbe stato privo di soluzione, per via di una contraddizione tra la seconda e la quarta riga.

8. Esercizio

Costruire, assegnandone una rappresentazione analitica, una funzione $f(x, y)$ definita in tutto il R^2 che valga 0 nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ e valga 1 per $x^2 + y^2 \geq 4$

8.1. *Soluzione:* Possiamo cercare soluzioni (certamente piú d'una) sotto forma di funzioni radiali: cerchiamo pertanto funzioni $g(t)$ che valgano 0 per $t \in [0,1]$ e valgano 1 per $t \in [2,+\infty)$.
Per costruirle prepariamo un polinomio $P(t)$ tale che

$$P(1) = 0, P'(1) = 0, P(2) = 1, P'(2) = 0$$

4 condizioni si possono soddisfare (probabilmente) con un polinomio di terzo grado

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Le condizioni richieste impongono che i coefficienti soddisfino il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{lll} P(1) & = a+b+c+d & = 0 \\ P'(1) & = 3a+2b+c & = 0 \\ P(2) & = 8a+4b+2c+d & = 1 \\ P'(2) & = 12a+4b+c & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \{a=-2, b=9, c=-12, d=5\}$$

$$P(t) = -2t^3 + 9t^2 - 12t + 5 \tag{2}$$

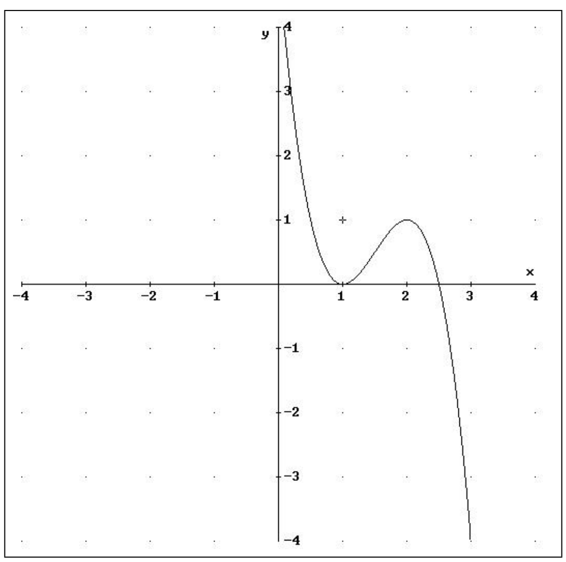


FIGURA 7. Il grafico del polinomio $P(t)$ di (2)

Definiamo ora per $t \in [0,+\infty)$

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{se} & t \in [0,1) \\ P(t) & \text{se} & t \in [1,2] \\ 1 & \text{se} & t > 2 \end{array} \right.$$

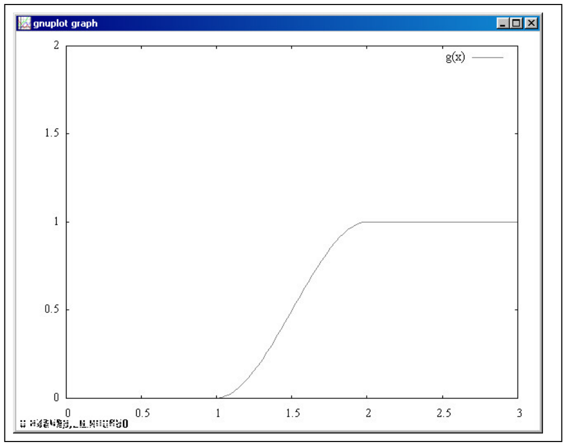


FIGURA 8. Il grafico della $g(x)$ di (2)

e, di conseguenza,

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

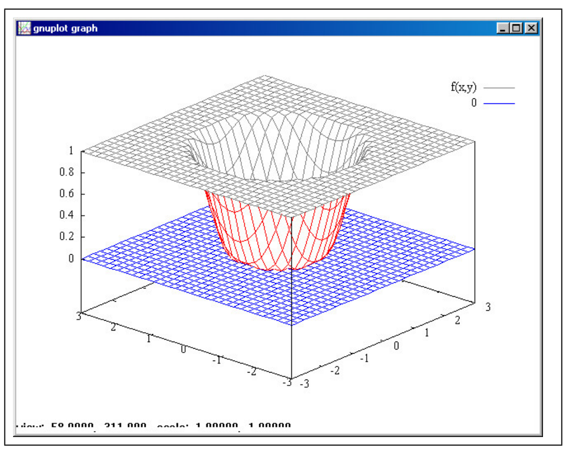


FIGURA 9. Il grafico della superficie di rotazione $f(x,y)$

9. Esercizio

Sia $f(x) = e^x$: *disegnare qualitativamente il grafico di*

- $f(-x^2)$ *come funzione di una variabile*
- $f(-x^2)$ *come funzione di due variabili*
- $f(-x^2 - y^2)$
- $f(-(x-5)^2 - (y-3)^2)$
- $f(-x^2 - y^2) + f(-(x-5)^2 - (y-3)^2)$

9.1. ***Soluzione:*** Vedi Figure 10, 11, 12.

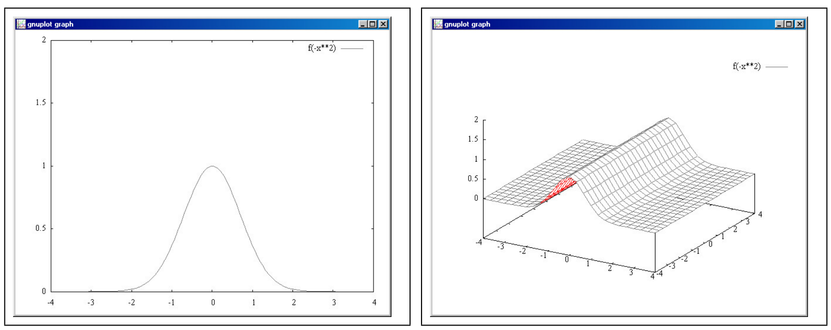


FIGURA 10. Il grafico della prime due $y = f(-x^2), \quad z = f(-x^2)$

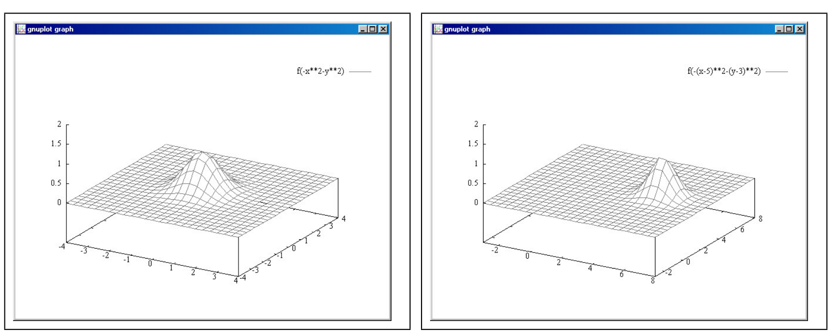


FIGURA 11. Il grafico della prime due $z = f(-x^2 - y^2), \quad z = f(-(x-5)^2 - (y-3)^2)$

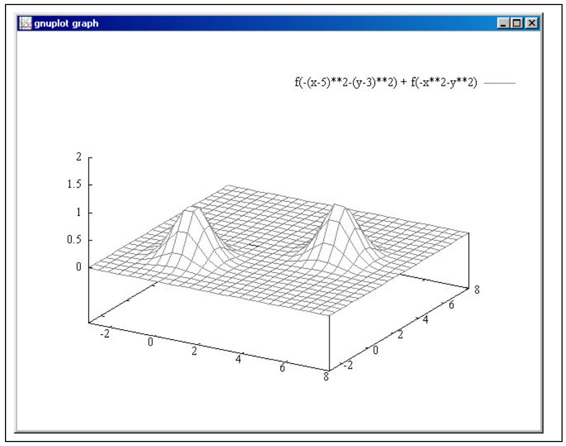


FIGURA 12. Il grafico della somma $z = f(-x^2 - y^2) + f(-(x-5)^2 - (y-3)^2)$

10. Esercizio

Costruire, assegnandone una rappresentazione analitica che si serva delle funzioni definite nell'esercizio precedente, una funzione $F(x, y)$ tale che

- $0 \leq F(x, y) \leq 1 \quad \forall (x, y) \in R^2$
- $F(0, 0) = 1$
- $F(5, 3) = 1$

10.1. *Soluzione:* Appare plausibile, vedi Figura 12, cercare una risposta nella forma

$$F(x, y) = \alpha\, e^{-x^2 - y^2} + \beta\, e^{-(x-5)^2 - (y-3)^2}$$

scegliendo opportunamente i due coefficienti α e β
Il sistema che i due coefficienti dovranno soddisfare dipende dalle due condizioni $F(0, 0) = 1$ e $F(5, 3) = 1$

$$\begin{cases} F(0,0) = \alpha + \beta\, e^{-5^2 - 3^2} = 1 \\ F(5,3) = \alpha\, e^{-5^2 - 3^2} + \beta = 1 \end{cases} \to \alpha = \beta = \frac{1}{1 + e^{-5^2 - 3^2}} \approx 1$$

OSSERVAZIONE 10.1. *La soluzione proposta non é esatta, detto γ il comune valore dei due coefficienti α e β precedenti la funzione*

$$F(x, y) = \gamma \left(e^{-x^2 - y^2} + e^{-(x-5)^2 - (y-3)^2} \right)$$

soddisfa certamente le condizioni $F(0,0) = F(5,3) = 1$ *ma non soddisfa, anche se in maniera numericamente impercettibile, la condizione* $F(x,y) \leq 1$
Infatti riesce

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{-2\,e^{-(-5+x)^2-(-3+y)^2}\,(-5+x) - 2\,e^{-x^2-y^2}\,x}{1+e^{-34}}$$

ovvero, nell'origine,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)\right|_{(0,0)} = \frac{10\,e^{-34}}{1+e^{-34}} > 0$$

risultato che vede il profilo altimetrico relativo ai punti $(x,0)$ *crescente in corrispondenza di* $x = 0$.
Quindi da $F(0,0) = 1$ *c'é da attendersi che riesca* $F(x,0) > 1$ *per qualche* $x > 0$.
Qual'é quindi la risposta corretta al quesito dell'esercizio ?

$$F(x,y) = \max\left\{e^{-x^2-y^2},\ e^{-(x-5)^2-(y-3)^2}\right\}$$

espressione che

- *nel punto* $(0,0)$ *vale 1,*
- *nel punto* $(5,3)$ *vale 1,*
- *non puó superare 1 in quanto nessuna delle due espressioni* $e^{-x^2-y^2}$, $e^{-(x-5)^2-(y-3)^2}$ *lo supera mai.*

La nuova funzione proposta, massimo tra due funzioni continue, é continua: purtroppo é poco regolare, il suo grafico puó presentarsi, su alcune linee, angoloso...

11. Esercizio

Fornire una rappresentazione parametrica

- *del segmento di estremi* $(\pi,2)$ *e* $(5,0)$,
- *dell'arco di circonferenza di centro* $C \equiv (1,1)$, *raggio* $r = \sqrt{2}$ *contenuto nel primo quadrante,*
- *dell'arco di ellisse* $x^2 + 4\,y^2 - 1 = 0$ *contenuto nel secondo quadrante.*

11.1. ***Soluzione:***

- **Segmento:**

$$\begin{cases} x &= \pi + (5-\pi)t \\ y &= 2 + (0-2)t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

- **Arco di circonferenza:**

$$\begin{cases} x &= 1 + \sqrt{2}\cos(t) \\ y &= 1 + \sqrt{2}\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$$

- **Arco di ellisse :**

$$\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \frac{1}{2}\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$$

OSSERVAZIONE 11.1. *Ricordate che esistono sempre piú rappresentazioni parametriche di una stessa curva assegnata: nel primo caso del segmento si considerino, ad esempio le seguenti altre rappresentazioni*

$$\begin{cases} x &= \pi + (5-\pi)t^2 \\ y &= 2 + (0-2)t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\begin{cases} x &= \pi + (5-\pi)t^3 \\ y &= 2 + (0-2)t^3 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

CAPITOLO 14

Foglio 2

2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Disegnare gli insiemi seguenti e, per ognuno decidere se si tratta di insieme limitato, aperto o chiuso:

$$E_1 = \{x < y\} \cup \{|x| < 1\}$$

$$E_3 = \{e^{x+y} < 1\} \cap \{\ln(|y|) < 0\}$$

$$E_2 = \{\tfrac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{y \leq x^2\}$$

$$E_4 = \{|\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} > 1\} \cap \{|x| \leq 1\} \cap \{|y| \leq 2\}$$

1.0.1. ***Soluzione:***

- E_1 é un insieme aperto e non limitato,
- E_2 é un insieme chiuso e limitato,
- E_3 é un insieme aperto e illimitato,
- E_4 é un insieme limitato che non é né aperto né chiuso.

2. Esercizio

Sia $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ la successione cosí definita

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad x_{n+1} = \lambda y_n, \quad y_{n+1} = \lambda x_n, \quad n \in N$$

relativamente ai tre valori di λ

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -1, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Detto $E = \{P_0.P_1, P_2, \dots\}$ esaminare, in corrispondenza ai tre valori di λ se

- E é limitato,

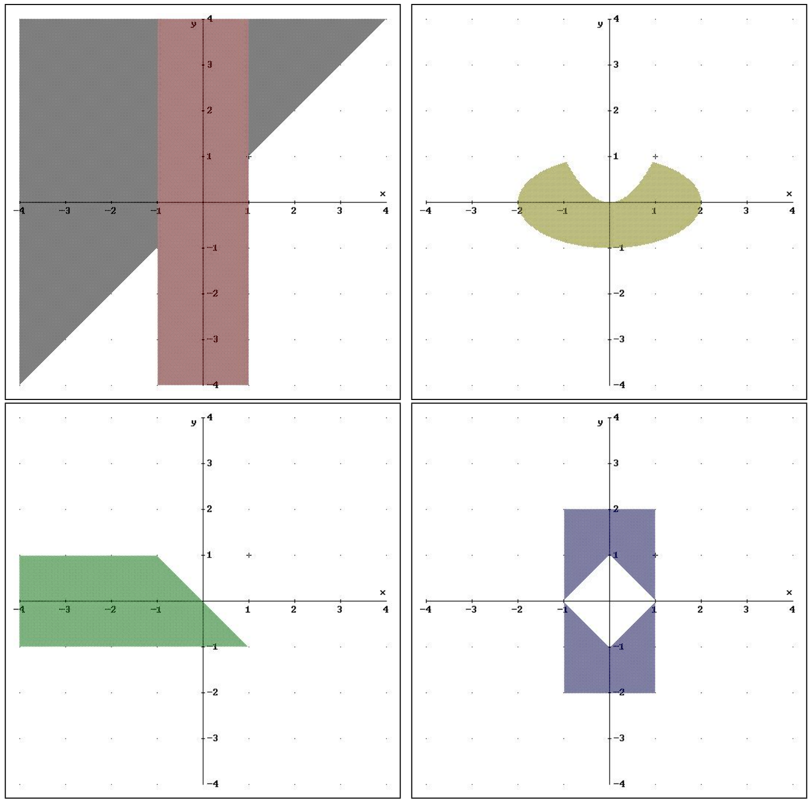


FIGURA 1. Nell'ordine gli insiemi E_1, E_2, E_3, E_4 del primo esercizio

- E é chiuso,
- la successione $\{P_n\}$ é convergente.

2.1. *Soluzione:*

- $\boxed{\lambda = 1}$

$$(1,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,1),\ \dots$$

L'insieme E é formato da due soli punti, quindi é limitato e chiuso.
La successione $\{P_n\}$ non é convergente.

- $\boxed{\lambda = -1}$

$$(1,0),\ (0,-1),\ (1,0),\ (0,-1),\ (1,0),\ (0,-1),\ (1,0),\ (0,-1),\ \dots$$

L'insieme E é formato da due soli punti, quindi é limitato e chiuso.
La successione $\{P_n\}$ non é convergente.

- $\boxed{\lambda = 1/2}$

  $$(1,0),\ (0,1/2),\ (1/4,0),\ (0,1/8),\ (1/16,0),\dots$$

  L'insieme E, formato da infiniti punti é limitato ma non é chiuso: il punto $(0,0)$ é punto di frontiera per E ma non appartiene ad E.
  La successione $\{P_n\}$ é convergente a $C = (0,0)$.

Osservazione 2.1. *Se una successione $\{P_n\}$ converge a C l'insieme*

$$E = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$$

non puó essere chiuso se non contiene il punto C. Gli insiemi chiusi infatti contenendo la loro frontiera devono contenere inevitabilmente i loro eventuali punti di accumulazione: il punto C limite della $\{P_n\}$ o appartiene ad E o é, comunque suo punto di accumulazione.

3. Esercizio

Sia

$$P_n = \left\{ e^{-n}\cos(n)(1+n), \quad \sin(n\frac{\pi}{2}) \right\}$$

- detto $E = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ esaminare se E é limitato, e, nel caso, determinare un cerchio di centro l'origine che lo contenga,
- esaminare se E é chiuso,
- esaminare se la successione $\{P_n\}$ sia convergente,
- estrarre da $\{P_n\}$ qualche sottosuccessione convergente.

3.1. *Soluzione:* La successione P_n ha le proprietá (limitatezza e/o convergenza) che possiedono le due successioni

$$x_n = e^{-n}\cos(n)(1+n), \quad y_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$$

Tenuto presente che la $\{y_n\}$ non é convergente si riconosce, di conseguenza che la $\{P_n\}$ non é convergente.
Tenuto presente che

$$e^n > 1 + n \to (1+n)e^{-n} < 1 \to |x_n| \leq 1$$

si riconosce che entrambe le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono limitate e quindi é limitata la $\{P_n\}$.

Dalla successione limitata $\{P_n\}$ si possono estrarre (teorema di Bolzano) infinite sottosuccessioni convergenti: la successione delle x_n é essa stessa convergente a zero, basta estrarre dalla successione y_n la sottosuccessione relativa ai posti pari

$$\{y_0, y_2, y_4, \dots\} = \{0, 0, 0, \dots\}$$

La sottosuccessione

$$P_0, P_2, P_4, P_6, \dots$$

é pertanto una sottosuccessione della $\{P_n\}$ convergente a $O = (0, 0)$. Un'altra sottosuccessione convergente sarebbe stata la

$$P_1, P_9, P_{17}, \dots P_{8n+1}, \dots$$

questa volta convergente a $C = (0, 1)$.

4. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 5x + 1 & \text{se} \quad y < 2x \\ x - y & \text{se} \quad y \geq 2x \end{cases}$$

- determinare in quali punti F sia continua o meno,
- disegnare la linea di livello $F(x, y) = 1$.

4.1. ***Soluzione:*** Sulla linea $y = 2x$ di separazione i due polinomi che determinano F prendono i valori

$$x^2 + (2x)^2 + 5x + 1, \qquad x - (2x)$$

Il raccordo é corretto se, svolti i calcoli, riesce

$$x^2 + 4x^2 + 5x + 1 = -x \to 5x^2 + 6x + 1 = 0$$

uguaglianza che (ahimé) si verifica solo se $x = -1$ oppure se $x = -1/5$. Pertanto la funzione F é continua

- nel semipiano aperto $y < 2x$
- nel semipiano aperto $y > 2x$
- nei soli due punti $(-1, -2)$ e $(-1/5, -2/5)$ della linea di separazione.

La linea di livello $F(x, y) = 1$ corrisponde a

$$\begin{array}{l} \{x^2 + y^2 + 5x + 1 = 1\} \cap \{y < 2x\} \\ \{x - y = 1\} \cap \{y \geq 2x\} \end{array}$$

Una porzione di circonferenza nel semipiano $y < 2x$ e una semiretta nell'altro, vedi Figura 2: si noti il buon raccordo, la linea di livello traversa la linea di separazione in uno dei due punti di continuitá.

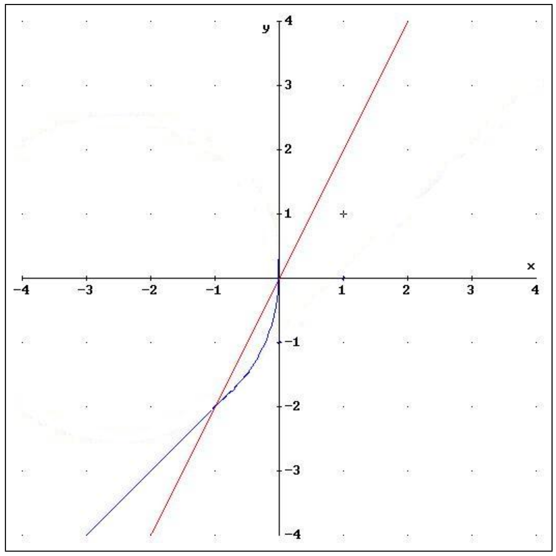


FIGURA 2. La linea di livello $F(x, y) = 1$

5. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$$

- determinare l'insieme di definizione di F,
- esaminare se F sia o meno limitata,
- determinare l'immagine di F.

5.1. *Soluzione:*

- Le due frazioni che compongono F sono definite rispettivamente per

  $$x^2 + y^2 \neq 1 \qquad x^2 + y^2 \neq 4$$

  Pertanto l'insieme E di definizione di F é il piano R^2 privato delle due circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2.
- Nei punti vicini alla circonferenza $x^2+y^2 = 1$ la prima frazione produce valori sia positivi che negativi molto grandi... mentre la seconda frazione si mantiene limitata: quindi la F somma delle due frazioni prende valori positivi e negativi comunque grandi in modulo nei punti vicini a detta prima circonferenza. Discorso analogo, riferendosi alla seconda frazione, nei punti vicini alla circonferenza di raggio 2.
  Quindi si riconosce che F non puó essere limitata.

- - L'immagine $F(E)$ contiene certamente l'immagine $F(C)$ della corona circolare
$$C = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$$
  - tenuto conto che C é connesso per poligonali ed F é continua in C, $F(C)$ (teorema d'esistenza degli zeri) non puó che essere un intervallo,
  - tenuto conto che $F(C)$ é illimitato sia superiormente che inferiormente non puó che essere $F(C) = \mathbb{R}$

  ... ma allora $F(E) = \mathbb{R}$

6. Esercizio

Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$

- calcolare le derivate parziali, f_x e f_y,
- disegnare, in corrispondenza ai punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ il vettore
$$\nabla f = \{f_x,\, f_y\}$$
- calcolare il laplaciano
$$\triangle f = f_{xx} + f_{yy}$$

6.1. *Soluzione:*

- $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \to f_x = 2x, \quad f_y = 2y$
- Il gradiente $\nabla(x^2 + y^2)$ ha, in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ la direzione radiale e il verso uscente dal cerchio. In altri termini il gradiente indica la direzione lungo la quale, camminando sul grafico, si incontrerebbe la salita piú ripida.
- $\triangle f(x, y) = f_{xx} + f_{yy} = 2 + 2 = 4$

7. Esercizio

Detta $f(x, y) = \cos(x\, y) - 3 \sin(x\, y)$

- calcolare le due derivate parziali prime,
- calcolare le tre derivate parziali seconde,
- verificare la relazione
$$f_{xx} + y^2 f = 0$$

7.1. *Soluzione:*

- $$f(x,y) = \cos(x\,y) - 3\sin(x\,y) \to \begin{cases} f_x = -3\,y\,\cos(x\,y) - y\,\sin(x\,y), \\ f_y = -3\,x\,\cos(x\,y) - x\,\sin(x\,y) \end{cases}$$
- $$\begin{cases} f_{xx} = -y^2\cos(xy) - 3y^2\sin(xy), \\ f_{xy} = -3\,\cos(x\,y) - x\,y\,\cos(x\,y) - \sin(x\,y) + 3\,x\,y\,\sin(x\,y) \\ f_{yy} = -x^2\cos(xy) - 3x^2\sin(xy), \end{cases}$$
- $$f_{xx} + y^2\,f = -y^2\cos(xy) - 3y^2\sin(xy) + y^2(\cos(x\,y) - 3\sin(x\,y)) = 0$$

8. Esercizio

Sia $f(x,y) = \ln(1 + |x+y|)$

- determinare l'insieme di definizione,
- disegnare le linee di livello

$$f(x,y) = n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

8.1. *Soluzione:*

- La funzione f costruita con un logaritmo richiede, naturalmente che l'argomento $1 + |x+y|$ su cui calcolare il logaritmo sia positivo: cosa che avviene, per via del modulo, qualunque siano x e y.
  L'insieme di definizione é quindi l'intero $\mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{Linea } 0}$

  $$f(x,y) = 0 \to 1 + |x+y| = 1 \to x + y = 0$$

  si tratta della retta bisettrice del secondo e quarto quadrante,
- $\boxed{\text{Linea n}}$

  $$f(x,y) = n \to 1 + |x+y| = e^n \to |x+y| = e^n - 1$$

  $$\to x + y = \pm(e^n - 1)$$

  si tratta, per ognuno dei valori n assegnati, di una coppia di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

9. Esercizio

Sia

$$F = \left\{|x| < 1, |y| < \sqrt{1-x^2}\right\}$$

- disegnare l'insieme F,
- rappresentare F come contrimmagine di un aperto di R tramite una funzione continua.

9.1. *Soluzione:*

- L'insieme F assegnato é il cerchio di centro l'origine e raggio 1,
- Indicata con $f(x,y) = x^2 + y^2$ l'insieme F é la contrimmagine dell'intervallo aperto

$$(-\infty, 1) \subseteq \mathbb{R}$$

10. Esercizio

Sia S il segmento di estremi $A = (1,0)$ e $B = (0,1)$

- fornire due rappresentazioni parametriche di S,
- detto $\mathcal{A}$ il profilo altimetrico relativo ad S e alla funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ determinare il punto piú alto e quello piú basso di $\mathcal{A}$.

10.1. *Soluzione:*

- Il segmento S si rappresenta nei modi seguenti

$$\begin{cases} x_1(t) = 1-t \\ y_1(t) = t \end{cases} t \in [0,1], \quad \begin{cases} x_2(t) = 1-t^{17} \\ y_2(t) = t^{17} \end{cases} t \in [0,1]$$

- Serviamoci della prima rappresentazione di S: le quote raggiunte dal profilo altimetrico sono

$$f(x_1(t), y_1(t)) = (1-t)^2 + t^2 = 2t^2 - 2t + 1$$

Il minimo e il massimo di tale espressione di $t \in [0,1]$ sono da cercarsi tra i valori agli estremi, entrambi uguali ad 1, e il valore, 1/2 nel punto $t = 1/2$ in cui si annulla la derivata prima.
Risulta:

$$\min = \frac{1}{2}, \quad \max = 1$$

11. Esercizio

Sia $f(t) = t^2 e^{-t}$ e sia $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ la funzione radiale ad essa associata

- disegnare qualitativamente il grafico di F
- determinare massimo e minimo di F,
- indicare i punti (x_m, y_m) e (x_M, y_M) in cui tali minimo e massimo vengono ottenuti.

11.1. *Soluzione:*

- Il grafico della funzione radiale F si ottiene ruotando il grafico della $f(t) = t^2 e^{-t}$, $t \geq 0$

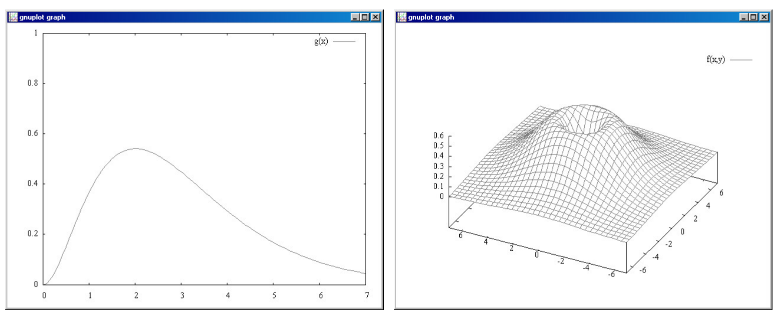


FIGURA 3. $t^2 e^{-t}$ e la radiale associata

  Tenuto presente che
  - $f(0) = 0$
  - $f'(t) = (2 - t)t\, e^{-t}$ positiva per $t \in (0, 2)$ e negativa dopo: $f(t)$ é crescente nel tratto $(0, 2)$ e decrescente, asintoticamente verso zero, dopo.
  - Il minimo di $f(t)$ si raggiunge per $t = 0$, e vale zero, il massimo per $t = 2$ e vale $4\, e^{-2}$
- $$\min F = 0, \quad \max F = 4\, e^{-2}$$
- Il minimo di F é raggiunto solo nell'origine.
  Il massimo é raggiunto in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$

12. Esercizio

Sia

$$F(x,y) = \cos^2(x) + \sin^3(y)$$

- determinare massimo e minimo di F,
- indicare i punti (x_m, y_m) e (x_M, y_M) in cui tali minimo e massimo vengono ottenuti.

12.1. *Soluzione:*

- F é formata da due addendi indipendenti: piú sono alti tali addendi piú sará alta la loro somma, piú sono bassi tali addendi piú sará bassa la loro somma.
  $\cos^2(x)$ produce valori di $[0,1]$, $\sin^3(x)$ produce valori di $[-1,1]$.
  $$\min F = -1, \quad \max F = 2$$
- $$\begin{array}{l} (x_m, y_m) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2h\pi\right), \\ (x_M, y_M) = \left(k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2h\pi\right) \end{array}, \quad k, h \in \mathbb{N}$$

13. Esercizio

Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin(\dfrac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

esaminare se essa sia continua o meno nell'origine.

13.1. ***Soluzione:*** La funzione ha, per definizione, il valore zero nell'origine: riconoscere che in tale punto f é continua significa riconoscere che nei punti vicini all'origine la f produce valori vicini allo zero.
Tenuto conto che

$$|f(x,y)| = \left| y \sin(\frac{1}{x^2}) \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

si riconosce che piú il punto (x,y) é vicino all'origine piú $f(x,y)$ ha valori piccoli, ovvero si riconosce che f é continua nell'origine.

14. Esercizio

Sia $f(x,y) = (x-y)\,|x-y|$

- esaminare in quale sottinsieme di R^2 sia continua,
- calcolare le due derivate parziali prime nei punti degli insiemi $A = \{x > y\}$ e $B = \{x < y\}$,
- esaminare in quale sottinsieme di R^2 sia derivabile parzialmente.

14.1. *Soluzione:*

- Il polinomio $x - y$ é, ovviamente, una funzione continua in tutto $\mathbb{R}^2$, il modulo di una funzione continua é ancora una funzione continua, quindi $|x-y|$ é continua in tutto $\mathbb{R}^2$,il prodotto di funzioni continue produce funzioni continue. Quindi F é continua in tutto $\mathbb{R}^2$.
- Nel semipiano aperto $A = \{x > y\}$ riesce $f(x,y) = (x-y)^2$ e quindi
$$f_x = 2(x-y), \quad f_y(= -2(x-y)$$
Nel semipiano aperto $B = \{x < y\}$ riesce $f(x,y) = -(x-y)^2$ e quindi
$$f_x = -2(x-y), \quad f_y = 2(x-y)$$
- Gli unici punti in cui f potrebbe non essere derivabile parzialmente sono quelli della retta $x = y$ che separa A da B
Prendiamo un punto (a,a) appartenente a tale retta e studiamo i rapporti incrementali relativi alle due derivate parziali
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a) + f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|)}{h} = 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a,a+h) + f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|)}{h} = 0$$
Riconosciuta l'esistenza dei due limiti si conclude che la funzione f é derivabile parzialmente in tutto $\mathbb{R}^2$.

Foglio 3

2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} -x^2y^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ x^2y^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

- *esaminare se* f *é continua in* $\mathbb{R}^2$
- *calcolare le derivate parziali prime e seconde nei due semipiani* $x < 0$ *e* $x > 0$,
- *esaminare se* f *ammette le derivate parziali prime sui punti* $(0,y)$ *della retta che separa i due semipiani,*
- *disegnare le linee di livello* $f(x,y) = 1$ *e* $f(x,y) = -4$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- La funzione assegnata f, vedi grafico in Figura 1, é certamente continua nei due semipiani aperti $x < 0$ e $x > 0$.
  Sulla retta $x = 0$ che separa i due semipiani, le due funzioni $-x^2y^2$ e x^2y^2, entrambe continue in $\mathbb{R}^2$, prendono lo stesso valore, zero: quindi f é continua in $\mathbf{R}^2$
- Nel semipiano $x < 0$ riesce $f(x,y) = -x^2y^2$ e quindi
  $$f_x = -2xy^2, \quad f_y = -2x^2y$$
  Nel semipiano $x > 0$ riesce $f(x,y) = x^2y^2$ e quindi
  $$f_x = 2xy^2, \quad f_y = 2x^2y$$
- $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2y^2}{h} = 0$$
  $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2y^2}{h} = 0$$

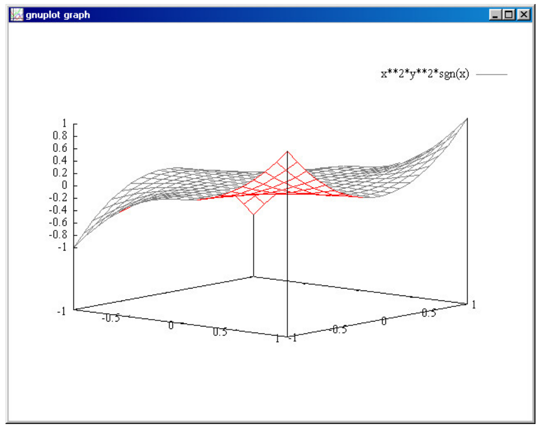


FIGURA 1. Il grafico della funzione del primo esercizio

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Sui punti della retta $x = 0$ la f ammette entrambe le derivate parziali prime

$$f_x(0,y) = f_y(0,y) = 0$$

- La linea di livello $f(x,y) = 1$ si trova tutta nel semipiano $x > 0$, perché negli altri punti riesce $f(x,y) \leq 0$

$$x^2y^2 = 1 \to y^2 = \frac{1}{x^2} \to y = \pm\frac{1}{x}, \quad x > 0$$

essa corrisponde, vedi Figura 2, quindi ai due rami di iperbole $y = \pm 1/x$ contenuti nel semipiano $x > 0$.

La linea di livello $f(x,y) = -4$ si trova tutta nel semipiano $x < 0$, perché negli altri punti riesce $f(x,y) \geq 0$

$$-x^2y^2 = -4 \to y^2 = \frac{4}{x^2} \to y = \pm\frac{2}{x}, \quad x < 0$$

essa corrisponde quindi ai due rami di iperbole $y = \pm 2/x$ contenuti nel semipiano $x < 0$.

2. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$$

- *Disegnare le linee di livello $\{f(x,y) = c\}$ per $c = 1, 2$, e disegnare il gradiente ∇f in corrispondenza di punti appartenenti a tali linee di livello,*

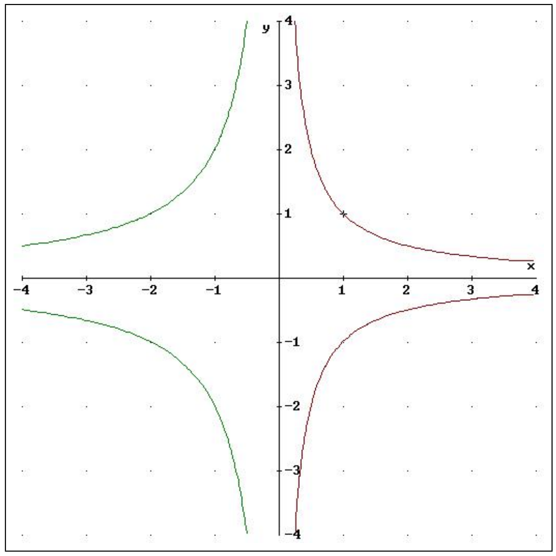


FIGURA 2. $f(x, y) = 1$, in nero a destra, $f(x, y) = -4$ in verde a sinistra.

- *calcolare la differenza* $f(3, 3) - f(0, 0)$ *e rappresentarla mediante il teorema di Lagrange,*
- *determinare una maggiorazione delle due derivate parziali prime di* f *nel rettangolo* $R : -1 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 4$
- *determinare una costante di Lipschitz per* f *nel rettangolo* R *assegnato sopra.*

Soluzione:

- Le linee di livello sono le due ellissi

  $$3x^2 + 5y^2 = 1, \quad 3x^2 + 5y^2 = 2$$

  vedi Figura 3.

  Il gradiente di $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$ é, in ogni punto di tali linee di livello ortogonale alle linee stesse, vedi Figura 4
- $$f(3, 3) - f(0, 0) = 72 =$$
  $$= [f(3, 3) - f(3, 0)] + [f(3, 0) - f(0, 0)]$$
  $$f(3, 3) - f(3, 0) = 45 = 10\eta\, 3 \quad \eta = 1.5$$
  $$f(3, 0) - f(0, 0) = 27 = 6\xi\, 3, \quad \xi = 1.5$$

$$= (3 - 0)f_y(3, 1.5) + (3 - 0)f_x(1.5, 0) = 3\,.\,15 + 3\,.\,9 = 72$$

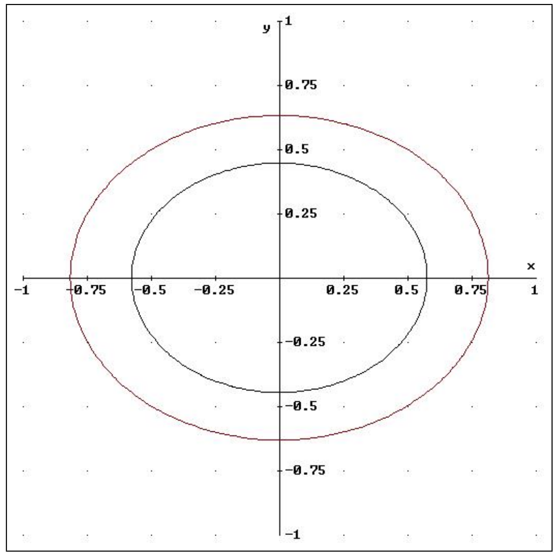


FIGURA 3. $3x^2 + 5y^2 = 1$, $3x^2 + 5y^2 = 2$

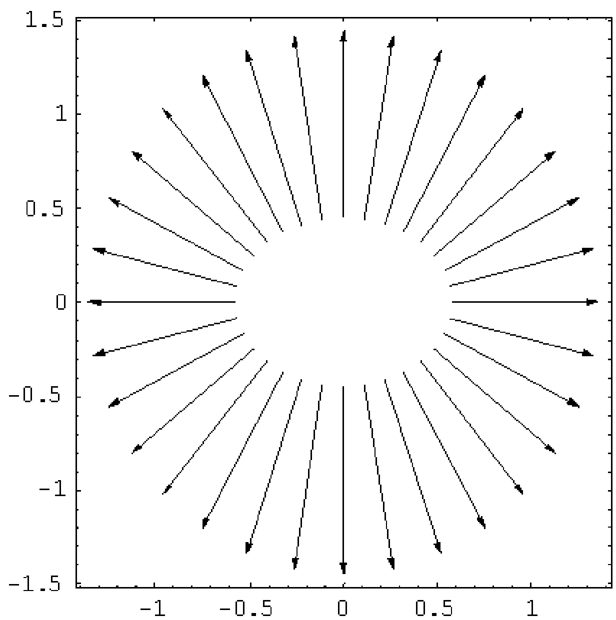


FIGURA 4. $3x^2 + 5y^2 = 1$ e il gradiente

- Le derivate parziali sono

$$f_x = 6x, \quad f_y = 10y$$

nel rettangolo assegnato $R: -1 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 4$ si riconoscono, quindi, le seguenti maggiorazioni

$$|f_x| \leq 18, \quad |f_y| \leq 40$$

ovvero

$$|f_x| \leq M, \quad |f_y| \leq M, \quad M = 40$$

- Tenuta presente la stima precedente per le due derivate parziali di f nel rettangolo assegnato, la f é lipschitziana in tale rettangolo, con costante di Lipschitz

$$L = 2\,M = 80$$

Questo vuol dire che presi comunque due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) in tale rettangolo riesce

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq 80\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Cosí, ad esempio

$$f(-1, -2) - f(3, 4) = 23, \quad \sqrt{(3+1)^2 + (4+2)^2} \approx 7$$

riesce $23 < 80\,.\,7$.

3. Esercizio

Sia Σ la superficie di rotazione, grafico della funzione radiale

$$f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- *determinare le derivate parziali prime,*
- *determinare l'insieme E dei punti critici e disegnarlo, qualitativamente, sul piano xy,*
- *determinare i piani tangenti a Σ relativi ai punti $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\pi^2$*

Soluzione:

- La funzione $f(x, y)$ assegnata é definita per $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - (0, 0)$, si tratta della funzione radiale associata alla funzione

$$g(r) = \frac{\sin(r)}{r}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{r \to 0} g(r) = 1$$

si puó prolungare la f a tutto R^2 attribuendole il valore 1 nell'origine.

$$f_x(x,y) = g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f_x(x,y) = g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Tenuto conto che

$$g'(t) = \frac{1}{t^2}\left(t\cos(t) - \sin(t)\right)$$

si ha

$$f_x = x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\left(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\sqrt{x^2+y^2}) - \sin(\sqrt{x^2+y^2})\right)$$
$$f_y = y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\left(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\sqrt{x^2+y^2}) - \sin(\sqrt{x^2+y^2})\right)$$

- I punti critici sono i punti in cui le due derivate parziali sono nulle contemporaneamente: si tratta quindi dei punti in cui $g'(\sqrt{x^2+y^2}) = 0$, incluso l'origine, tenuto conto che

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = 0$$

Si tratta dei punti in cui riesce

$$\sqrt{x^2+y^2} = \tan(\sqrt{x^2+y^2})$$

In altri termini si tratta di trovare i valori t tali che

$$t = \tan(t)$$

valori che si intuiscono in Figura 5 vedendo le ascisse in corrispondenza alle quali i grafici di t e di $\tan(t)$ si incrociano. L'insieme dei punti critici é formato dall'origine e da circonferenze, vedi Figura 6, di raggi opportuni, le infinite radici positive dell'equazione $t = \tan(t)$.
Si noti che esse non sono distribuite uniformemente secondo multipli interi di π : la loro distribuzione é assai meno oviia...
- Sia $(x_0, y_0)|x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{4}\pi^2$ il piano tangente in tale punto ha equazione

$$z = f(x_0.y_0) * f_x(x_0.y_0)(x-x_0) + f_y(x_0.y_0)(y-y_0)$$

ovvero

$$z = \frac{2}{\pi} - \frac{2^3}{\pi^3}\left\{x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0)\right\}$$

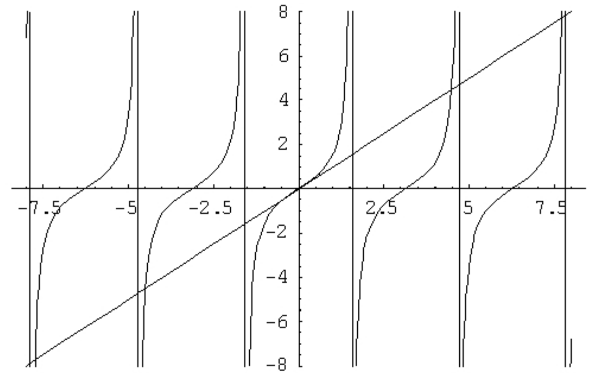


FIGURA 5. $t = \tan(t)$

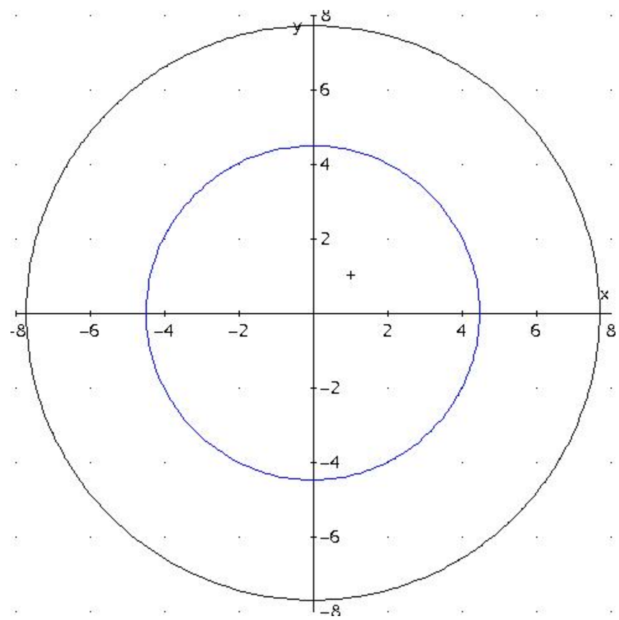


FIGURA 6. E insieme dei punti critici

$$z = \frac{4}{\pi} - \frac{2^3}{\pi^3} \{x_0 x + y_0 y)\}$$

Non si tratta di un piano orizzontale: i punti della circonferenza assegnata non sono punti critici..., vedi Figura 7.

4. Esercizio

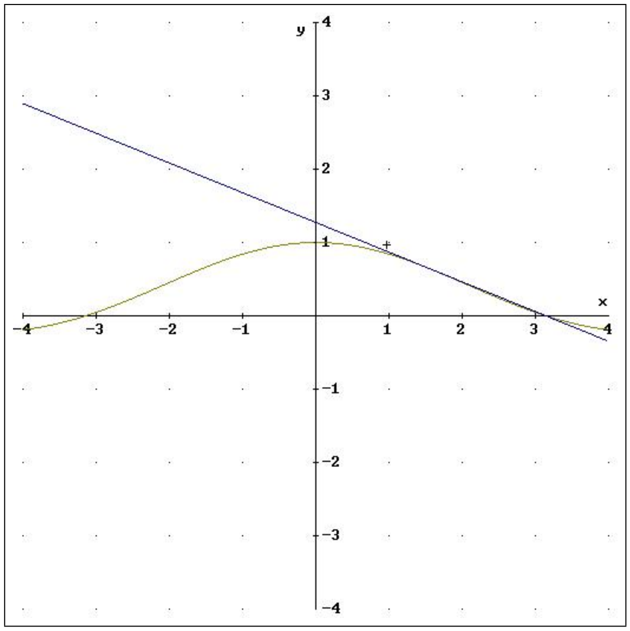


FIGURA 7. Il grafico della $g(t)$ e la retta tangente in $t = \pi/2$

- *Determinare i punti critici (o stazionari) della funzione*

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + x^2 + y^2$$

- *calcolare la matrice hessiana*
- *calcolare gli autovalori di tale hessiana in corrispondenza del punto* $(1, 1)$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- $$f_x = 2\,x + 4\,x\,\left(x^2 + y^2\right), \quad f_y = 2\,y + 4\,y\,\left(x^2 + y^2\right)$$

  C'é un solo punto critico o stazionario

  $$\begin{cases} 2x\,[1 + 2(x^2 + y^2)] = 0 \\ 2y\,[1 + 2(x^2 + y^2)] = 0 \end{cases}$$

  o nel quale il piano tangente sia orizzontale, l'origine, come si riconosce, anche, osservando che f é la funzione radiale associata alla $g(t) = t^4 + t^2$ che ha il grafico di Figura 8.
- La matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 8\,x^2 + 4\,(x^2 + y^2) & 8\,x\,y \\ 8\,x\,y & 2 + 8\,y^2 + 4\,(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

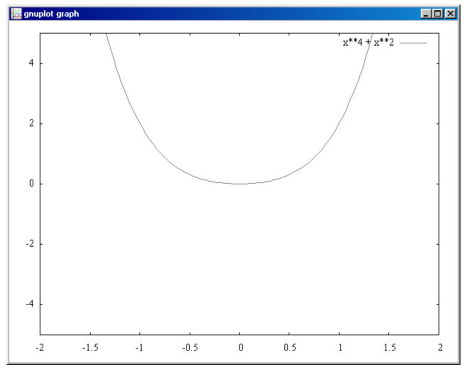


FIGURA 8. Il grafico di $g(t) = t^4 + t^2$

- La matrice hessiana nel punto $(1, 1)$ é la seguente

$$\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono le radici dell'equazione in λ

$$\det \begin{pmatrix} 18-\lambda & 8 \\ 8 & 18-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 26$$

si tratta di due numeri positivi: osservate, Figura 9, la forma del grafico di f e la sua collocazione in relazione al piano tangente in tale punto

$$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) =$$
$$= 10(x+y) - 15$$

5. Esercizio

Ricordato che si chiamano armoniche le funzioni di due variabili che verificano la condizione

$$f_{xx} + f_{yy} = 0, \quad \forall (x, y)$$

determinare 4 polinomi in x e y, rispettivamente di primo, secondo, terzo e quarto grado, che risultino funzioni armoniche.

Soluzione:

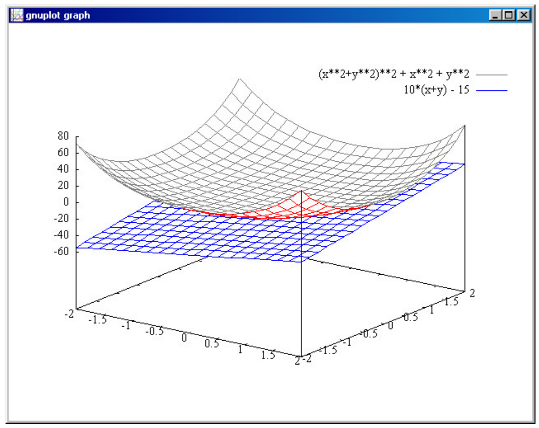


FIGURA 9. Il grafico di f e del piano tangente in $(1, 1)$

- Tutti i polinomi di primo grado $P(x, y) = ax + by + c$ sono funzioni armoniche tenuto conto che essi hanno le derivate seconde tutte nulle.
- Non tutti i polinomi di secondo grado sono funzioni armoniche:
  - x^2 non lo é,
  - $x^2 - y^2$ lo é,
  - $x\,y$ lo é.
- Naturalmente non tutti i polinomi di terzo o quarto grado sono funzioni armoniche: ricordate che posto $z = x + i\,y$, le potenze $z^n = (x + i\,y)^n$ danno, svolta la potenza del binomio e tenuto conto che $i^2 = -1$

$$z^n = P_n(x, y) + i\,Q_n(x, y)$$

con P_n e Q_n polinomi opportuni di grado n : essi sono, qualunque sia la potenza n, funzioni armoniche.

Cosí ad esempio

$$z^3 = (x + i\,y)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - i\,y^3 =$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3)$$

$$P_3(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad Q_3(x, y) = 3x^2y - y^3$$

sono due polinomi di terzo grado armonici (provare per credere !)

Ancora ad esempio

$$z^4 = x^4 + 4ix^3y - 10x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4$$

$$P_4(x, y) = x^4 - 10x^2y^2 + y^4, \quad Q_4(x, y) = 4x^3y - 4xy^3$$

sono due polinomi di quarto grado armonici (provare per credere !)

6. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + y^3$

- *determinare il gradiente* ∇f
- *determinare la derivata di* f *nel punto* $(1,1)$ *secondo la direzione indicata dal vettore* $\overrightarrow{v} = \{3,4\}$
- *confrontare il limite seguente*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h, 1+4h) - f(1,1)}{h}$$
col valore della precedente derivata direzionale.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- $$\nabla f = \left\{3\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2,\ 3\,x^2 + 10\,x\,y + 3\,y^2\right\}$$
- Alla direzione indicata dal vettore $\{3,4\}$ compete il versore
$$\overrightarrow{n} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$$
la formula della derivata direzionale di una funzione come f certamente differenziabile é la seguente
$$\frac{df}{dn} = \nabla f \times \overrightarrow{n}$$
essendo il gradiente calcolato nel punto $(1,1)$
$$\nabla f = \{14, 16\}$$
si ha
$$\frac{df}{dn} = \{14,16\} \times \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{106}{5}$$
- $$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h, 1+4h) - f(1,1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+3h)^3 + 3(1+3h)^2(1+4h)y + 5(1+3h)(1+4h)^2 + (1+4h)y^3 - 10}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{106\,h + 374\,h^2 + 439\,h^3}{h} = 106$$

Come si spiega la discordanza tra i due risultati osservati: quello della derivata direzionale calcolata con la formula del

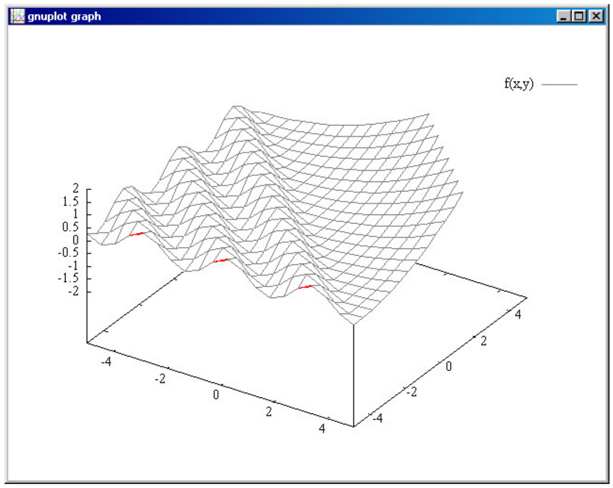


FIGURA 10. Il grafico della f dell'Esercizio 7

gradiente e quella diretta del limite del rapporto incrementale ?
Il rapporto incrementale usato non é quello giusto: a denominatore non c'é la distanza con segno tra il punto $(1+3h, 1+4h)$ e il punto $(1,1)$, distanza che vale $5h$.
Infatti i conti tornano in armonia se nel rapporto incrementale si mette a denominatore $5h$: il limite torna a essere $106/5$ come deve essere...!

7. Esercizio

Sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin^2(x+y) & x+y<0, \\ a(x+y)^2 & x+y \geq 0 \end{cases}$$

- *Per quali a la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?*
- *Per quali a la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}^2$?*

Soluzione:

- Le due espressioni $\sin^2(x+y)$ e $a(x+y)^2$, funzioni continue in tutto R^2 si raccordano bene sulla linea di demarcazione $x+y=0$ sulla quale prendono entrambe il valore zero qualunque sia a, vedi Figura 10.
- Stesso discorso per quanto concerne le derivate parziali prime : si osservi che é sufficiente riconoscere che

– le due espressioni $\sin^2(x+y)$ e $a(x+y)^2$, sono dotate di derivate parziali prime, uguali fra loro, in tutto R^2
– $\sin^2(x+y) :\rightarrow 2\sin(x+y)\cos(x+y)$,
$a(x+y)^2 :\rightarrow 2a(x+y)$
– tali derivate parziali si raccordano sulla linea $x+y=0$ di demarcazione in modo coerente, prendono lo stesso valore, ancora lo zero.
– tanto basta a riconoscere che la funzione assegnata é derivabile parzialmente in tutto R^2 qualunque sia a.

8. Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(x+1)^2 y}{(x+1)^2 + y^2}\,, & (x,y) \neq (-1,0) \\ \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

- *Dire se è continua.*
- *Calcolare le derivate parziali nei punti* $(x,y) \neq (-1,0)$*.*
- *Calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali nel punto* $(-1,0)$*.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- L'unico punto in cui f potrebbe non essere continua é $(-1,0)$: per riconoscere che f sia continua in tale punto occorre riconoscere quindi che
$$(x,y) \approx (-1,0) \rightarrow |f(x,y) - f(-1,0)| \approx 0$$
ovvero che
$$(x,y) \approx (-1,0) \rightarrow \left|\frac{(x+1)^2 y}{(x+1)^2 + y^2}\right| \approx 0$$
La nota diseguaglianza $|a\,b| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ applicata al prodotto
$$|x+1||y| \leq \frac{1}{2}((x+1)^2 + y^2)$$
consente di riconoscere che
$$\left|\frac{(x+1)^2 y}{(x+1)^2 + y^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x+1|$$

e quindi che la frazione considerata diventa piccola mano mano che x si avvicina a -1.
In altri termini abbiamo riconosciuto la diseguaglianza

$$|f(x,y) - f(1,1)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

che implica la continuitá, lipschitziana, di f nel punto $(-1,0)$, vedi Figura 11.

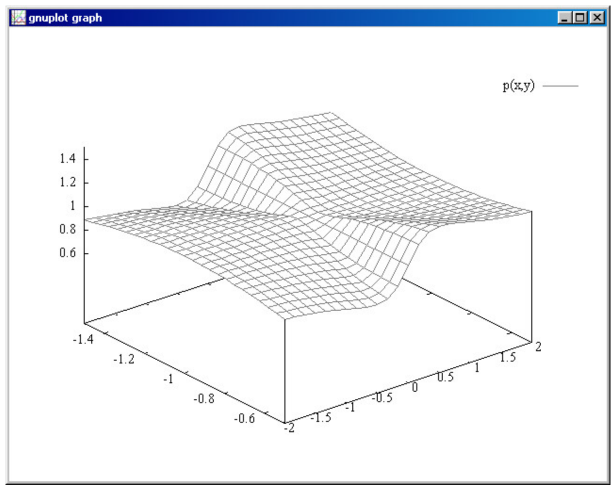


Figura 11. Il grafico della f dell'Esercizio 8

- Le derivate parziali, fuori dal punto $(-1,0)$ si calcolano con le usuali regole di derivazione delle funzioni razionali

$$f_x = \frac{-2\,(1+x)^3\,y}{\left((1+x)^2+y^2\right)^2} + \frac{2\,(1+x)\,y}{(1+x)^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{-2\,(1+x)^2\,y^2}{\left((1+x)^2+y^2\right)^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+y^2}$$

- $$f_x(-1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h,0) - f(-1,0)}{h} = 0$$

$$f_y(-1,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(-1,0+k) - f(-1,0)}{k} = 0$$

avendo in entrambi i conti tenuto conto che $f = 1$ sia per $y = 0$ che per $x = -1$.
Si noti che in tutti i punti $(x,0) \neq (-1,0)$ riesce $f_y(x,0) = 1$ e quindi che la derivata parziale f_y presenti una discontinuitá in corrispondenza di $x = -1$.

CAPITOLO 16

Foglio 4

2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Date le funzioni $f_k(x, y) = |x|^k + |y|^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

- *determinare per quali* k *hanno le derivate parziali prime,*
- *determinare per quali* k *hanno anche le derivate seconde.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'esercizio corrisponde a chiedere per quali $k \in N$ la funzione

$$g_k(t) = |t|^k$$

possieda le prime due derivate $g_k'(t)$ e $g_k''(t)$

- ovviamente se k é pari $g_k(t)$ diventa una potenza intera di t ed ha tutte le derivate, non solo le prime due...
  tra le potenze pari rientra ovviamente anche la banale scelta $k = 0 : \quad g_0(t) = 2$
- se $k = 1$ $g_1(t) = |t|$ non é derivabile per $t = 0$, quindi non ha neanche in tale punto la derivata seconda,
- se $k = 3$ $g_3(t) = t^2|t|$ é derivabile per ogni $t \in R$ e la sua derivata vale $g_3'(t) = 3\,t\,|t|$. Esiste la derivata seconda, $6|t|$, anche per $t = 0$
- se $k = 3, 5, 7, \dots$ allora $g_k(t)$ é derivabile due volte per ogni $t \in R$

Riassumendo: Le funzioni $f_k(x, y) = |x|^k + |y|^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ sono dotate delle derivate prime e seconde in tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $k \geq 2$.

OSSERVAZIONE 1.1. *Dopo aver osservato che* $|t|^3$ *é derivabile due volte per ogni* t *e che le potenze pari* t^2, t^4, ... *sono indefinitamente derivabili si riconosce facilmente che le potenze* $|t|^5$, $|t|^7, \dots$ *sono derivabili almeno due volte anch'esse dal momento che*

$$|t|^5 = |t|^3 \cdot t^2, \quad |t|^7 = |t|^3 \cdot t^4, \dots$$

ricordando cioé che il prodotto di funzioni derivabili é derivabile.

2. Esercizio

Usare la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare la derivata di $F(t) = f(x(t), y(t)))$ nei seguenti casi:

$$\begin{cases} f(x,y) = & \sin(x+y^2), \qquad\qquad x(t) = \pi\, t, \quad y(t) = \sqrt{t} \\ f(x,y) = & x\, \log(x^2 + 2y^2 + 1), \quad x(t) = \sin t, \quad y(t) = \cos t \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Sia $F[t] = f[x(t), y(t)]$ la funzione composta: la regola di derivazione é la seguente

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

regola superflua quando la funzione composta sia espressa esplicitamente.

- primo caso: l'espressione della funzione composta é esplicita, il calcolo della sua derivata si esegue con le regole di derivazione standard

$$F[t] = \sin(\pi\, t + \sqrt{t}^2) = \sin((\pi+1)t)$$

$$\rightarrow F'(t) = \cos(((\pi+1)t)(\pi+1)$$

- secondo caso: come sopra

$$F(t) = \sin(t)\, \log(\sin^2(t) + 2\cos^2(t) + 1)$$

da cui

$$F'(t) = \cos(t)\log(\sin^2(t) + 2\cos^2(t) + 1) + \sin(t)\frac{-2\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t) + 2\cos^2(t) + 1}$$

3. Esercizio

Assegnata la funzione $f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^2-4}$

- *determinare l'insieme* E *di definizione di* f,
- *determinare in quali punti di* E f *é dotata delle derivate parziali prime,*
- *verificare la validità del Teorema di Lagrange, sia nella forma che fa ricorso a due punti sia in quella che usa uno stesso punto per le due derivate, per rappresentare* $f(2,2)-f(-3,-3)$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- La funzione é definita per $2x^2+3y^2-4\geq 0$ i punti esterni all'ellisse
$$2x^2+3y^2=4$$
- f é dotata di derivate parziali prime dove la funzione $\sqrt{\cdot}$ é derivabile, cioé per
$$2x^2+3y^2-4>0$$
si tratta dell'insieme di definizione privato dell'ellisse frontiera,

- **Uso del teorema di Lagrange:**
$f(2,2)=4,\quad f(-3,-3)=\sqrt{41}$
  – *uso di due punti:*

$$f(2,2)-f(-3,-3)=[f(2,2)-f(2,-3)]+[f(2,-3)-f(-3,-3)]$$

$$f(2,2)-f(2,-3)=(2+3)f_y(2,\eta),$$
$$f(2,-3)-f(-3,-3)=(2+3)f_x(\xi,-3)$$

$$f(2,2)-f(2,-3)=4-\sqrt{31}=5\,\frac{3\eta}{\sqrt{4+3\eta^2}},\tag{3}$$

$$f(2,-3)-f(-3,-3)=\sqrt{31}-\sqrt{41}=5\,\frac{2\xi}{\sqrt{2\xi^2+23}}\tag{4}$$

Dalla prima equazione (3) si ricava

$$\eta=-\sqrt{\frac{-11+2\sqrt{31}}{3}}\sim -0.212$$

dalla seconda (4)

$$\xi=\frac{-\sqrt{-35+\sqrt{1271}}}{2}\sim -0.403$$

I due punti di Lagrange sono quindi

$$(-0.403,\ -3), \quad (2,\ -0.212)$$

Verifichiamo (numericamente) tenendo conto delle approssimazioni usate nel calcolare sia η che ξ

$$\begin{cases} \dfrac{3\eta}{\sqrt{4+3\eta^2}} \approx -0.312772 \\ \\ \dfrac{2\xi}{\sqrt{2\xi^2+23}} \approx -0.166888 \\ \\ 5(-0.312772 - 0.166888) = -2.3983 \\ \\ f(2,2) - f(-3,-3) = -2.40312 \end{cases}$$

– *uso di un solo punto:* non si puó, la f non é definita sul segmento che congiunge i due punti, segmento che passa, ad esempio per l'origine, punto proibito...

Osservazione 3.1. *Nel precedente esercizio si chiedeva in quali punti la funzione $f(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2-4}$ fosse dotata delle derivate parziali prime: si é (giustamente) concluso di indicare i punti esterni all'ellisse, ellisse stessa esclusa.*
Consideriamo ora un fatto generale: supponiamo che $f(x,y)$ sia una qualsiasi funzione definita all'interno dell'ellisse $2x^2+3y^2=4$ cioé definita, vedi Figura 1, per

$$2x^2 + 3y^2 \geq 4$$

Consideriamo il punto dell'asse y $(0, 2/\sqrt{3})$, intersezione superiore con l'ellisse: avrebbe senso cercare la derivata parziale $f_x(0, 2/\sqrt{3})$ in tale punto ?
Per calcolarla dovremmo poter considerare il rapporto incrementale

$$\frac{f(h, 2/\sqrt{3}) - f(0, 2/\sqrt{3})}{h}$$

rapporto improponibile perché tutti i punti

$$(h, 2/\sqrt{3})$$

cadono fuori dell'insieme di definizione di f.

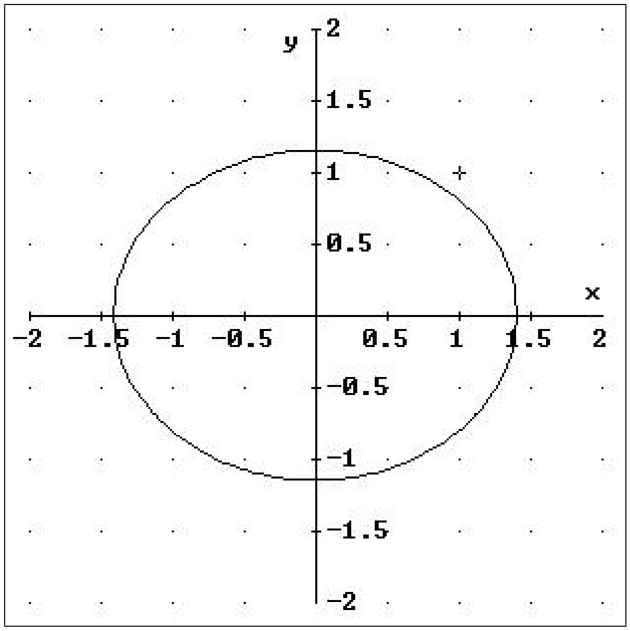


FIGURA 1. $2x^2 + 3y^2 \geq 4$

4. Esercizio

Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$ *e sia assegnata la curva* $\mathbb{C}$

$$\phi(t) = \{a\ \cos(t),\ b\ \sin(t)\}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

- *si determinino tre coppie di parametri* a, b, *per i quali* $\mathbb{C}$ *passi per il punto* $(1, 2)$ *;*
- *si determini, in tale punto, un vettore tangente al profilo altimetrico* $\mathbb{F}$ *relativo a tali* a *e* b*.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- I due parametri a e b devono soddisfare la condizione

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

Ci sono infinite coppie che soddisfano tale relazione, ovvero ci sono infinite ellissi che passano per il punto $(1, 2)$: consideriamo le tre scelte seguenti

$$\begin{cases} a = 2 \quad b = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\[2ex] a = 3 \quad b = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\[2ex] a = 4 \quad b = \dfrac{8}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

A tali scelte deve aggiungersi quella piú ovvia, $a = b = \sqrt{5}$ che determina una circonferenza...

- I profili altimetrici di cui si parla hanno equazione parametrica

$$x = a\cos(t),\ y = b\ \sin(t), z = a^2\cos^2(t) + b^2\ \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Un vettore tangente in ogni punto di tale curva ha componenti

$$\overrightarrow{v} = \left\{-a\sin(t),\ b\cos(t),\ 2(b^2 - a^2)\cos(t)\sin(t)\right\}$$

Tenuto presente che ci riferiamo al punto con $x = 1$ e $y = 2$ abbiamo

$$\cos(t) = \frac{1}{a},\ \sin(t) = \frac{2}{b}$$

ne segue quindi

$$\overrightarrow{v} = \left\{-a\frac{2}{b},\ b\frac{1}{a},\ 2(b^2 - a^2)\frac{1}{a}\frac{2}{b}\right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a = 2 \quad b = \dfrac{4}{\sqrt{3}} & \to \overrightarrow{v} = \left\{-\sqrt{3}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\} \\[3ex] a = 3 \quad b = \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \to \overrightarrow{v} = \left\{-2\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -3\sqrt{2}\right\} \\[3ex] a = 4 \quad b = \dfrac{8}{\sqrt{15}} & \to \overrightarrow{v} = \left\{-\sqrt{15}, \dfrac{2}{\sqrt{15}}, \dfrac{22}{\sqrt{15}}\right\} \end{array} \right.$$

5. Esercizio

Assegnata la curva $\mathbb{C}$

$$\phi(t) = \left\{t,\ t^2,\ \frac{2}{3}t^3\right\}, \quad t \in [0, 1]$$

- *determinare la lunghezza di* $\mathbb{C}$,

- *detto P il punto corrispondente a $t = 1/2$ esaminare quale sia piú lungo dei due archi AP e PB, avendo indicato con A e B gli estremi della curva.*

Soluzione:

La formula della lunghezza é

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t^2)^2}\, dt = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, dt$$

da cui

$$\ell(C) = \frac{5}{3}$$

La stessa formula si applica a calcolare la lunghezza dei due archi AP e PB

$$\ell(AP) = \int_0^{1/2} (1 + 2t^2)\, dt = \frac{7}{12}$$

$$\ell(PB) = \int_{1/2}^1 (1 + 2t^2)\, dt = \frac{13}{12}$$

...é piú lungo PB !
La cosa fa riconoscere che il valore medio del parametro t, $t = 1/2$ non produce necessariamente il punto medio della curva...!

6. Esercizio

Sia $\mathbb{C}$ la curva di equazioni parametriche

$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad t \in [0, 10]$$

- *determinare la lunghezza di $\mathbb{C}$*
- *determinare il punto medio M di $\mathbb{C}$, cioé tale che, detti A e B gli estremi della curva riesca $\ell(\widehat{AM}) = \ell(\widehat{MB})$,*
- *determinare un punto $P \in \mathbb{C}$ tale che la tangente in P a $\mathbb{C}$ sia parallela alla corda AB*

Soluzione:

La lunghezza di $\mathcal{C}$ é data dalla formula

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{10} \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^{10} t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt =$$

$$\frac{1}{18}\frac{2}{3}\left(904^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{1}{27}(904\sqrt{904} - 8) \simeq 1006.38$$

Il punto medio cercato, $\ell(\widehat{AM}) = \ell(\widehat{MB})$, vefi Figura 2, corrisponde alla soluzione dell'equazione in τ

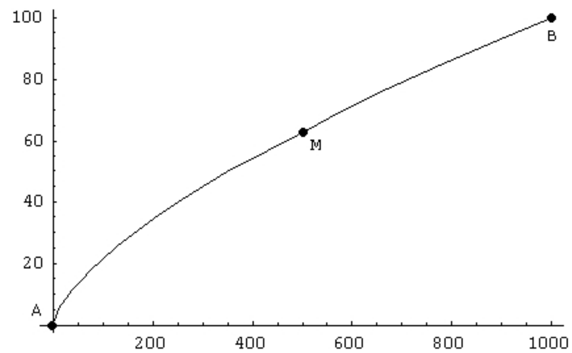


FIGURA 2. La curva dell'Esercizio 6 e il punto medio M

$$\int_0^\tau t\sqrt{9t^2+4}\,dt = \int_\tau^{10} t\sqrt{9t^2+4}\,dt$$

ovvero

$$\frac{1}{27}\left((9\tau^2+4)^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{1}{27}\left(904^{3/2} - (9\tau^2+4)^{3/2}\right)$$

$$2\,(9\tau^2+4)^{3/2} = 904\sqrt{904} + 8$$

$$(9\tau^2+4)^{3/2} = 904\sqrt{226} + 4$$

$$9\tau^2 = \left(904\sqrt{226}+4\right)^{2/3} - 4$$

$$\tau = \frac{1}{3}\sqrt{\left(904\sqrt{226}+4\right)^{2/3} - 4} \simeq 7.92742$$

La corda AB é il vettore $(1000, 100)$, i vettori tangenti alla $\mathcal{C}$ sono, per ogni punto $t \in [0, 10]$ paralleli a $(3t^2, 2t)$.
Quindi

$$(3t^2, 2t) \setminus\setminus (1000, 100) \to \frac{3t^2}{2t} = \frac{1000}{100} \to t = 10\frac{2}{3} = 6.\overline{6}$$

cioé la retta tangente a C in corrispondenza al punto $((6.\overline{6})^3, (6.\overline{6})^2)$ é parallela alla corda determinata dagli estremi A e B di $\mathcal{C}$

7. Esercizio

Sia $g(x, y) = x + y^2$, *e sia* $\mathcal{S}$ *il segmento* $(-1, -1)$ $(1, 1)$

- *determinare una rappresentazione parametrica di* $\mathcal{S}$
- *determinare l'espressione integrale dell'ascissa curvilinea* $s = s(t)$ *sul profilo altimetrico* G *di* g *relativo ad* $\mathcal{S}$
- *detta* $z = z(s)$ *l'espressione della quota di* S *in funzione dell'ascissa curvilinea, determinare* $z'(s)$ *la derivata di* z *rispetto ad* s *in corrispondenza ad* $s = 0$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Il segmento $\mathcal{S}$ si rappresenta, parametricamente con

$$x = t,\ y = t, \quad t \in [-1, 1]$$

La curva profilo altimetrico corrispondente ai punti di S sul grafico di g ha la rappresentazione seguente

$$x = t,\ y = t,\ z = t + t^2 \quad t \in [0, 1]$$

da cui segue

$$s(t) = \int_{-1}^{t} \sqrt{1 + 1 + [1 + 2\xi]^2}\, d\xi$$

$$s(t) = \int_{0}^{t} \sqrt{3 + 4\xi + 4\xi^2}\, d\xi$$

Detta $z(s)$ la quota dei punti del profilo altimetrico espressa in funzione dell'ascissa curvilinea riesce

$$\frac{dz}{ds} = \frac{z'(t)}{\sqrt{3 + 4t + 4t^2}}$$

nel caso dell'esercizio si fa riferimento ad $s = 0$ quindi il secondo membro va calcolato nel t corrispondente, cioé per $t = -1$: si ha quindi, vedi Figura 3,

$$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{1 + 2t}{\sqrt{3 + 4t + 4t^2}}\right|_{t=0} = -\frac{1}{3} \simeq -0.\overline{3}$$

Si parte quindi con... un po' di discesa !

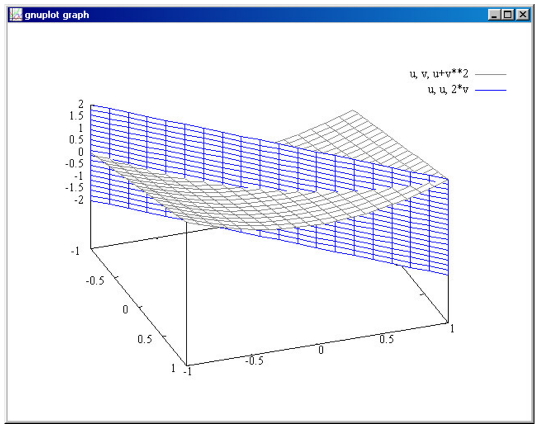


FIGURA 3. Il profilo altimetrico dell'esercizio 7.

8. Esercizio

Sia $g(x, y) = x^3 + y^2$, e sia $\mathcal{C}$ la circonferenza del piano $x\,y$ di centro l'origine e raggio 1 : detto $\mathcal{G}$ il profilo altimetrico di g relativo alla $\mathcal{C}$

- *determinare una rappresentazione parametrica di $\mathcal{G}$*
- *riconoscere che tale rappresentazione é iniettiva, cioé trasforma valori diversi del parametro in punti diversi di $\mathcal{G}$,*
- *scrivere l'espressione integrale della lunghezza di $\mathcal{G}$*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Una rappresentazione del profilo $\mathcal{G}$ é

$$x = \cos(t),\; y = \sin(t),\; z = \cos^3(t) + \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si tratta di una rappresentazione iniettiva tenuto conto che é iniettiva la rappresentazione $x = \cos(t),\; y = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$ della sola circonferenza.
La lunghezza di $\mathcal{G}$ é

$$\ell(\mathcal{G}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + (-3\cos^2(t)\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t))^2}\, dt$$

$$\ell(\mathcal{G}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t)\sin^2(t)[2 - 3\cos(t)]^2}\, dt \simeq 8.51$$

Si noti come il valore approssimato trovato per la lunghezza sia maggiore di 2π, lunghezza della circonferenza.
Il profilo $\mathcal{G}$ infatti, non é una curva piana: si proietta sulla circonferenza del piano xy ma sta sulla superficie, curva, grafico di $g(x, y) = x^3 + y^2$.

9. Esercizio

Sia $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

- *scrivere la formula integrale della lunghezza del profilo altimetrico* $\mathcal{F}$ *di* f *relativo al segmento* $(1,0)$ $(0,-2)$ *del piano* $x\,y$,
- *detta* $s = s(t)$ *l'ascissa curvilinea su* $\mathcal{F}$ *determinare la pendenza,*
$$\frac{dz(s)}{ds}$$
massima che tale profilo presenta.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Il segmento del piano xy ha la rappresentazione parametrica

$$x = 1 - t,\ y = -2t, \quad t \in [0,1]$$

il profilo $\mathcal{F}$ ha pertanto la rappresentazione

$$x = 1 - t,\ y = -2t, z = 4 - (1-t)^2 - (-2t)^2, \quad t \in [0,1]$$

Ne segue

$$\ell(\mathcal{F}) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4 + (-10t+2)^2}\,dt$$

Per quanto concerne la pendenza

$$\left|\frac{dz}{ds}\right| = \left|\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{-10t+2}{\sqrt{1+4+(-10t+2)^2}}\right|$$

occorre determinare il massimo di

$$p(t) = \frac{|-10t+2|}{\sqrt{5+(-10t+2)^2}}, \quad t \in [0,1]$$

Tenuto conto che

$$\frac{|-10t+2|}{\sqrt{5+(-10t+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{5}{(-10t+2)^2}+1}}$$

si riconosce che il massimo si otterrá in corrispondenza al valore $t \in [0,1]$ per il quale $|2 - 10t|$ é maggiore, cioé $t = 1$

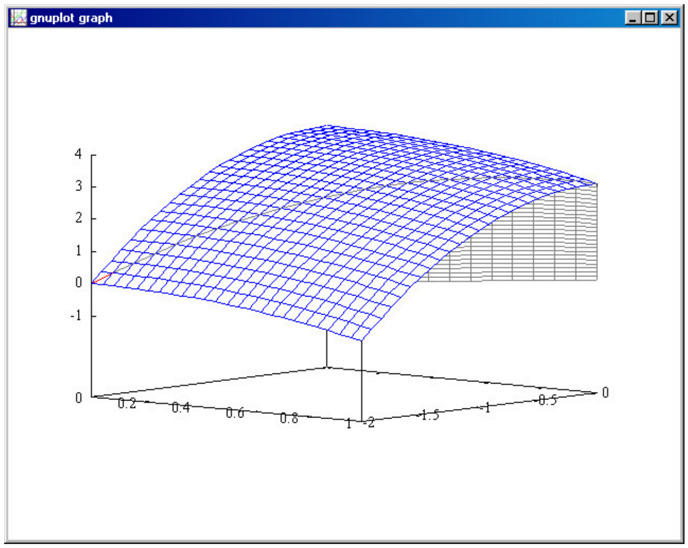


FIGURA 4. Il profilo altimetrico dell'esercizio 9.

Possiamo osservare, vedi Figura 4, i seguenti valori di pendenza:

$$\begin{cases} t = 0 & p(0) = 2/3 \simeq 0.666 \\ t = 0.4 & p(0.4) = 0 \\ t = 1 & p(1) = 8/\sqrt{69} \simeq 0.96 \end{cases}$$

CAPITOLO 17

Foglio 5

2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Sia $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$

- *determinare il massimo e il minimo di* f *nel quadrato*

$$Q: \ -10 \leq x \leq 10, \ -10 \leq y \leq 10$$

- *determinare il massimo e il minimo di* $|f(x, y)|$ *in* Q
- *detta* $g(x, y) = e^{f(x,y)}$ *determinare il massimo e il minimo di* g *ancora nel quadrato* Q

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'espressione assegnata $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$ é lineare, il suo grafico é un piano obliquo; si capisce senza bisogno di calcoli che i valori estremi, il minimo e il massimo, nel quadrato assegnato saranno raggiunti certamente sui vertici.
Un confronto (quasi superfluo) permette di riconoscere che

$$\min_{(x,y)\in Q} f(x, y) = f(-10, -10) = -49, \qquad \max_{(x,y)\in Q} f(x, y) = f(10, 10) = 51$$

Gli estremi di $|f(x, y)|$:

- il massimo é certamente il maggiore tra $|-49|, |51|$ cioé 51
- il minimo é 0, riesce infatti $f = 0$ sui punti della retta

$$1 + 2x + 3y = 0,$$

retta che taglia abbondantemente il quadrato Q

Gli estremi di $g(x, y) = e^{f(x,y)}$: tenuto conto che la funzione esponenziale e^t é monotona crescente si riconosce facilmente che

piú é alto l'esponente $f(x, y)$ *piú é alta la* $g(x, y)$ *e viceversa* quindi

$$\min_{(x,y)\in Q} g(x,y) = e^{f(-10,-10)} = e^{-49}, \quad \max_{(x,y)\in Q} g(x,y) = e^{f(10,10)} = e^{51}$$

Si puó tranquillamente ritenere, visti i risultati, che

- $\min_{(x,y)\in Q} g(x,y) \simeq 0$
- $\max_{(x,y)\in Q} g(x,y) \simeq +\infty$

Osservazione 1.1. *Massimi e minimi di espressioni lineari quali la $f(x,y)$ precedente su poligoni si incontrano in questioni di ottimizzazione (vedi la voce* programmazione lineare *sulla Enciclopedia della Scienza e della Tecnica).*

2. Esercizio

Sia $f(x,y) = 1 + (x^2 + 2y^2)^2$

- *determinare massimo e minimo di f nell'insieme delimitato dall'ellisse* $3x^2 + 5y^2 = 10$,
- *determinare, nello stesso insieme massimo e minimo della reciproca*

$$g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La funzione assegnata, un polinomio é continua e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$, l'insieme $3x^2 + 5y^2 \leq 10$ assegnato é chiuso e limitato quindi esistono certamente il minimo e il massimo di f.
Essi sono raggiunti

- o in punti (x_0, y_0) critici per f interni all'insieme assegnato, cioé $3x_0^2 + 5y_0^2 < 10$
- o sulla frontiera, cioé $3x_0^2 + 5y_0^2 = 10$

I punti critici:

$$f_x = 2(x^2 + 2y^2)2x = 0, \quad f_y = 2(x^2 + 2y^2)4y = 0 \quad \to x_0 = y_0 = 0$$

La cultura che abbiamo sulla classificazione dei punti critici basata sulla forma quadratica

$$f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

non ci aiuta, in questo caso.
Le tre derivate seconde sono, nell'origine, unico punto critico, tutte e tre nulle.

É tuttavia quasi evidente che nell'origine si raggiunge il minimo

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,0) = 1$$

infatti l'addendo $(x^2+2y^2)^2$ é positivo in ogni $(x,y) \neq (0,0)$ e quindi in ogni $(x,y) \neq (0,0)$ riesce $f(x,y) > f(0,0)$
Consideriamo i valori di f sulla frontiera

$$3x^2+5y^2 = 10 \to x^2+2y^2 = \frac{1}{3}(3x^2+6y^2) = \frac{1}{3}(10+y^2)$$

é quindi evidente che l'espressione x^2+2y^2 prende, sull'ellisse, il valore piú alto nei punti che hanno $|y|$ piú grande, valore piú basso nei punti con $y=0$
Pertanto

$$\min_{3x^2+5y^2=10}(x^2+2y^2) = \frac{1}{3}(10) = \frac{10}{3}, \quad \max_{3x^2+5y^2=10}(x^2+2y^2) = \frac{1}{3}(10+2) = 4$$

ne segue:

$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 1+4^2 = 17$$

3. Esercizio

Sia $f(x,y) = 2(x-1)^2 + 3(y-1)^2$ *e sia*

$$Q_t : 0 \leq x \leq t,\ 0 \leq y \leq t \quad \forall t \geq 0$$

- *determinare il massimo e il minimo di* f *nei tre quadrati* Q_1, Q_2, Q_3
- *indicati in generale con* $m(t)$ *ed* $M(t)$ *tali minimo e massimo in* Q_t *disegnare i grafici di* $m(t)$ *e di* $M(t)$

Soluzione:

La funzione f assegnata, un polinomio, é come somma di quadrati mai negativa: pertanto se riconosciamo che in un punto dell'insieme E vale 0 allora tale valore é anche il minimo di f in E

- Q_1 :

$$\min_{(x,y)\in Q_1} f(x,y) = f(1,1) = 0, \quad \max_{(x,y)\in Q_1} f(x,y) = f(0,0) = 5$$

- Q_2 :

$$\min_{(x,y)\in Q_2} f(x,y) = f(1,1) = 0, \quad \max_{(x,y)\in Q_2} f(x,y) = f(0,0) = f(2,2) = 5$$

- Q_3 :

$$\min_{(x,y)\in Q_3} f(x,y) = f(1,1) = 0, \quad \max_{(x,y)\in Q_3} f(x,y) = f(3,3) = 20$$

Le funzioni $m(t), \quad M(t)$:
al crescere di t gli insiemi Q_t si ingrandiscono, in altri termini

$$0 < t_1 < t_2 \to Q_{t_1} \subset Q_{t_2} \to \begin{cases} m(t_1) \geq m(t_2) \\ \\ M(t_1) \leq M(t_2) \end{cases}$$

L'esperienza precedente fatta su $t = 1, 2, 3$ conferma l'osservazione fatta.
Si riconosce facilmente quindi che

$$m(t) = \begin{cases} 2(t-1)^2 + 3(t-1)^2 & t \in [0, 1] \\ \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} 5 & t \in [0, 2] \\ \\ 2(t-1)^2 + 3(t-1)^2 & t > 2 \end{cases}$$

4. Esercizio

Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$

- *determinare il massimo e il minimo di* f *in* $\mathcal{C} : x^2 + y^2 \leq 4$,
- *determinare il massimo e il minimo in* $\mathcal{C}$ *della funzione*

$$g(x, y) = \frac{1}{1 + f(x, y)}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'osservazione precedente é valida anche in questo esercizio: la funzione assegnata é non negativa, se in un punto (x_0, y_0) dell'insieme $E : x^2 + y^2 \leq 4$ assegnato prende il valore zero allora tale valore é il minimo cercato.
Pertanto tenuto conto che $(0, 0) \in E$ e che $f(0, 0) = 0$ riesce

$$\min_{(x,y) \in E} f(x, y) = 0$$

Il massimo:

- puó essere uno dei valori presi in un punto critico di f interno ad E,
- puó essere uno dei valori presi in un punto in cui f non sia differenziabile,
- puó essere il massimo dei valori presi sulla frontiera.

Punti critici:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} = 0, \quad f_y = \frac{2}{y}\sqrt{x^2+2y^2} = 0$$

non ci sono punti critici, l'origine é una tentazione da respingere...
Punti di non differenziabilitá: ce ne sono, l'origine (ricordate che la funzione $\sqrt{t}$ non é derivabile in $t = 0$) tuttavia proprio nell'origine abbiamo giá riconosciuto che la funzione prende il valore minimo, ... non il massimo.
Sulla frontiera:

$$x^2 + y^2 = 4 \to \sqrt{x^2+2y^2} = \sqrt{4+y^2}$$

Ne segue che

$$\max_{x^2+y^2=4} \sqrt{x^2+2y^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Riesce pertanto

$$\max_{(x,y)\in E} \sqrt{x^2+2y^2} = \sqrt{8}$$

La funzione g assegnata vede la f al denominatore: si riconosce quindi che

tanto piú piccola é f tanto piú grande é g e viceversa,

quindi

$$\min_E f = 0 \to \max_E g = 1, \quad \max_E f = \sqrt{8} \to \max_E g = \frac{1}{1+\sqrt{8}}$$

5. Esercizio

Sia $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2 + y + 1)$

- *determinare il polinomio di Taylor di primo ordine relativo a f per $(x_0, y_0) = (0, 0)$,*
- *classificare i punti critici di f in* $\mathbf{R}^2$
- *determinare il massimo e il minimo di f in* $\mathcal{E} : x^2 + 9y^2 \leq 16$

Soluzione:

Lo sviluppo di Taylor richiesto é di quelli *gratuiti*: tenuto conto che

$$\arctan(1+t) \simeq \arctan(1) + \frac{1}{1+1^2}t \to$$

$$\arctan(x^2+y^2+y+1) \simeq \arctan(1) + \frac{1}{2}(x^2+y^2+y) + \dots$$

Il polinomio di Taylor di primo grado richiesto é pertanto

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}y$$

Punti critici:

$$f_x=\frac{1}{1+(x^2+y^2+y+1)^2}\,2x=0,\;\; f_y=\frac{1}{1+(x^2+y^2+y+1)^2}\,(2y+1)=0$$

Si ottiene solo

$$x=0,\quad y=-\frac{1}{2}$$

Analisi qualitativa di tale punto critico:

$$\begin{cases} f_{xx}(0,-1/2)= & \frac{32}{25}\\ f_{xy}(0,-1/2)= & 0\\ f_{yy}(0,-1/2)= & \frac{32}{25}\end{cases}\to\begin{cases} f_{xx}>0,\\ f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0\end{cases}$$

si tratta, vedi Figura 1, di un punto di minimo relativo.
Tenuto conto che

- non esistono altri punti critici oltre $x=0,\quad y=-\frac{1}{2}$
- che si tratta di un punto di minimo relativo

se ne deduce che

$$\min_{R^2} f(x,y)=f(0,-\frac{1}{2})=\arctan(\frac{3}{4})$$

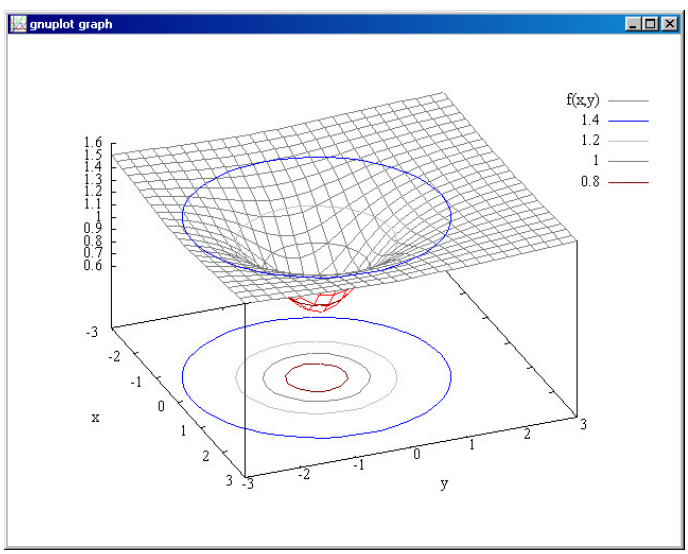


FIGURA 1. $f(x,y)=\arctan(x^2+y^2+y+1)$

Tenuto conto che

- $-\frac{1}{2}\pi < \arctan(t) < \frac{1}{2}\pi, \quad \forall t \in R$
- $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{1}{2}\pi$

si riconosce che

$$\sup_{(x,y)\in R^2} \arctan(x^2 + y^2 + y + 1) = \frac{1}{2}\pi$$

L'estremo superiore $\frac{1}{2}\pi$ non é tuttavia mai raggiunto da $f(x, y)$ che, pertanto, non ha massimo.

6. Esercizio

Sia

$$f(x, y) = \frac{1 + x}{1 + x^2 + y^2}$$

- *determinare il massimo M_ρ di $|f(x, y)|$ per $x^2 + y^2 \geq \rho^2$*
- *determinare il massimo e il minimo di f in tutto $\mathbf{R}^2$.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Punti critici:

$$\left\{\begin{array}{lll} f_x(x, y) = & \dfrac{-2\,x\,(1 + x)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} + \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} & = 0 \\ \\ f_y(x, y) = & \dfrac{-2\,(1 + x)\,y}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} & = 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{2}, \quad y = 0, \\ x = -1 + \sqrt{2}, \quad y = 0 \end{array}\right.$$

A seconda del valore di ρ tali punti critici staranno entrambi, uno solo o nessuno dei due nella regione $x^2 + y^2 \geq \rho^2$ assegnata.
I valori di f nei due punti critici sono:

$$f(-1 - \sqrt{2}, 0) = -\frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)}, \quad f(-1 + \sqrt{2}, 0) = \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)}$$

Tenuto presente che

- sulla circonferenza $\mathcal{C}_\rho : x^2 + y^2 = \rho^2$ riesce $f = \frac{1+\rho\,\cos(\vartheta)}{1+\rho^2}$ e quindi

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{C}_\rho} f(x, y) = \frac{1 - \rho}{1 + \rho^2} \qquad \max_{(x,y)\in\mathcal{C}_\rho} f(x, y) = \frac{1 + \rho}{1 + \rho^2}$$

- $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = 0$

il massimo e il minimo di f nell'insieme illimitato $x^2+y^2 \geq \rho^2$ sono i due valori estremi tra i seguenti:

- se $\rho \leq \sqrt{2}-1$
$$-\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}, \quad \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}, \quad \frac{1-\rho}{1+\rho^2}, \quad \frac{1+\rho}{1+\rho^2}$$
- se $\sqrt{2}-1 < \rho \leq \sqrt{2}+1$
$$\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}, \quad \frac{1-\rho}{1+\rho^2}, \quad \frac{1+\rho}{1+\rho^2}$$
- se $\sqrt{2}+1 < \rho$
$$\frac{1-\rho}{1+\rho^2}, \quad \frac{1+\rho}{1+\rho^2}$$

Il massimo e il minimo di f in tutto R^2 sono, ovviamente tenuto conto che f é infinitesima all'infinito, i valori presi nei due punti critici

$$\min_{(x,y)\in R^2} f(x,y) = \frac{-1}{2(\sqrt{2}+1)}, \quad \max_{(x,y)\in R^2} f(x,y) = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

7. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = e^{-(3x^2+4y^2)}$$

- *determinare gli estremi inferiore e superiore di f in tutto $\mathbf{R}^2$,*
- *riconoscere se si tratta di minimo e di massimo,*
- *determinare massimo e minimo di*

$$(x+y)\, f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La funzione assegnata $e^{-(3x^2+4y^2)}$ é infinitesima all'infinito: quindi é limitata e ha, almeno uno tra minimo e massimo, che, stante la regolaritá della funzione cadono necessariamente in un punto critico.
Punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6xe^{-(3x^2+4y^2)} = 0 \\ f_y(x,y) = -8ye^{-(3x^2+4y^2)} = 0 \end{cases} \rightarrow x=0,\ y=0$$

$$f(0,0) = 1$$

Pertanto riesce:

$$\inf_{(x,y)\in R^2} f(x,y) = 0, \qquad \max_{(x,y)\in R^2} f(x,y) = 1$$

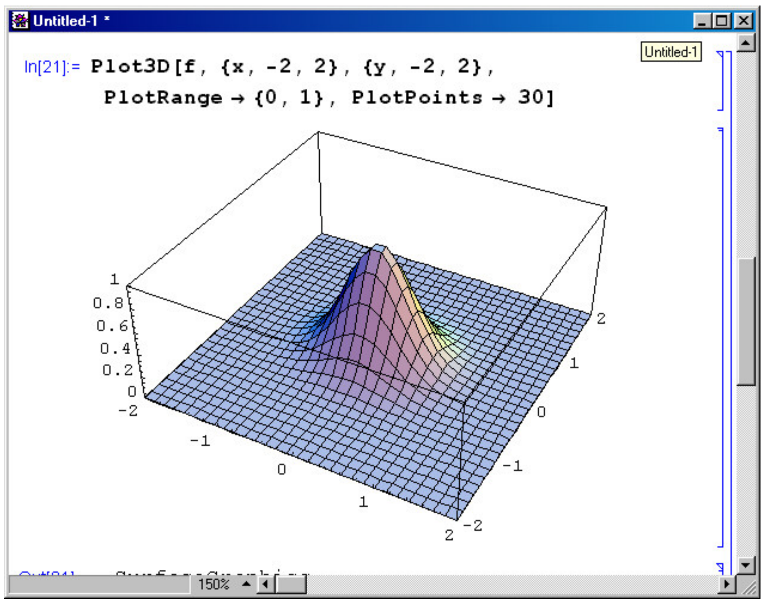


FIGURA 2. $f(x,y) = e^{-(3x^2+4y^2)}$

La seconda funzione assegnata $(x+y)\,e^{-(3x^2+4y^2)}$ é anch'essa infinitesima all'infinito: valgono pertanto, anche per essa le osservazioni precedenti.
Punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-3\,x^2-4\,y^2}\,(1-6\,x^2-6\,x\,y) = 0 \\ f_y(x,y) = e^{-3\,x^2-4\,y^2}\,(1-8\,x\,y-8\,y^2) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \{x = -\sqrt{\frac{2}{21}}, y = \frac{-\sqrt{\frac{3}{14}}}{2}\}, \quad \{x = \sqrt{\frac{2}{21}}, y = \frac{\sqrt{\frac{3}{14}}}{2}\}$$

I due punti critici trovati

$$x = \pm\, 0.308607, \quad y = \pm\, 0.231455$$

sono simmetrici rispetto all'origine: ovviamente la funzione

$$g(x,y) = (x+y)\,e^{-(3x^2+4y^2)}$$

prende su di essi valori opposti, vedi Figura 3.
Il minimo e il massimo della funzione sono pertanto i due valori opposti

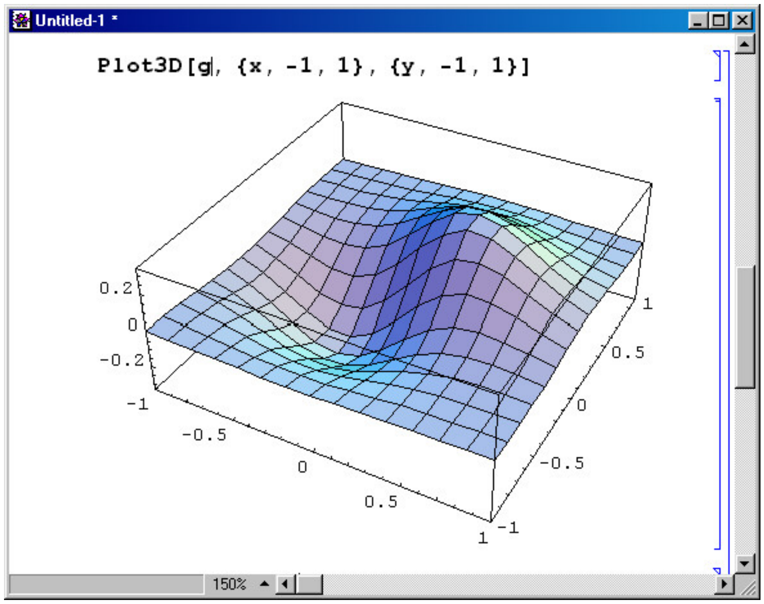


FIGURA 3. $g(x,y) = (x+y)\,e^{-(3x^2+4y^2)}$

$$\pm\, g\Big(\sqrt{\frac{2}{21}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{14}}\Big) = \pm\,\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\sqrt{\frac{2}{21}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{14}}\right) \simeq \pm\, 0.327564$$

8. Esercizio

Indicata con $d(P,Q)$ l'ordinaria distanza euclidea tra P e Q consideriamo la funzione

$$f(P) = d(P,P_1)^2 \,.\, d(P,P_2)^2$$

essendo P_1, P_2 due fissati punti di $\mathbf{R}^2$,

- *determinare i punti P in cui $f(P) = 0$,*
- *esaminare se $f(P)$ é limitata in $\mathbf{R}^2$,*
- *classificare i punti critici di f*
- *determinare il minimo di f.*

Soluzione:

Supponiamo di aver scelto il riferimento in modo che a P_1 e a P_2 corrispondano le coordinate

$$P_1 = (1,0), \quad P_2 = (-1,0)$$

l'espressione della funzione é pertanto

$$f(x,y) = \left((x-1)^2 + y^2\right)\,\left((x+1)^2 + y^2\right)$$

Il prodotto di due fattori é nullo se e solo se é nullo uno dei fattori: pertanto la funzione assegnata si annulla solo nei due punti P_1 e P_2.
In tutti gli altri assume valori positivi.
Considerato che i fattori che compongono f sono di loro natura illimitati in R^2 altrettanto illimitata sará f.
Punti critici:
indicati con a e b i due fattori che compongono f si ha nei punti critici

$$\begin{cases} a_x\, b + a\, b_x = 0 \\ a_y\, b + a\, b_y = 0 \end{cases} \rightarrow a_x\, b_y - a_y\, b_x = 0$$

avendo osservato che a e b non sono entrambi nulli.
Ne segue

$$(x-1)y = (x+1)y \quad \rightarrow y = 0$$

sostituendo $y = 0$ ad esempio nella prima $f_x = 0$ si ottiene

$$(x-1)(x+1)^2 + (x-1)^2(x+1) = 0 \quad \rightarrow 2\,x\,(x^2-1) = 0 \quad \rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

Esistono pertanto tre punti critici:

$$P_1 = (1,0), \quad O = (0,0), \quad P_2 = (-1,0)$$

Tenuto presente che $f \geq 0$ e che $f(P_1) = f(P_2) = 0$ si riconosce che i punti P_1 e P_2 sono punti di minimo.
Per quanto riguarda l'origine O la matrice hessiana in tale punto é

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

il determinante negativo, -16 é condizione sufficiente a far riconoscere il carattere di sella al punto O, vedi Figura 4
Il minimo della f é naturalmente il valore zero assunto sia in P_1 che in P_2

9. Esercizio

Assegnata la forma quadratica

$$Q(h,k) = 3h^2 + 8h\,k + 3k^2$$

- *esaminare se la forma Q sia definita o meno,*
- *esprimere Q come somma, o differenza di quadrati,*
- *scrivere la matrice simmetrica A ad essa associata, e determinarne gli autovalori λ e μ,*

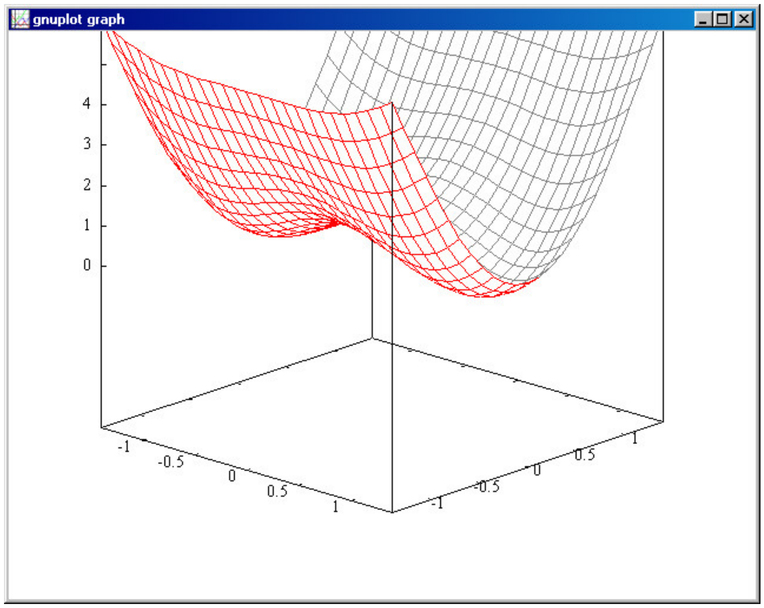


FIGURA 4. $f(x,y) = ((x-1)^2 + y^2)\ ((x+1)^2 + y^2)$

Soluzione:

Affinché la forma quadratica Q sia non definita (cioé prenda, fuori dall'origine, valori sia positivi che negativi) é necessario e sufficiente che riesca

$$a\,c - b^2 < 0$$

nel caso proposto riesce

$$a = 3, b = 4, c = 3 \quad 3\,3 - 4^2 = 9 - 16 = -7 < 0$$

quindi la forma assegnata é non definita.
Possiamo riconoscere la presenza di valori sia positivi che negativi per semplice ispezione diretta:

$$Q(1,0) = 3, Q(1,-1) = -2$$

Una semplice manipolazione algebrica, secondo il metodo di Lagrange, permette di esprimere Q comme somma o differenza di quadrati

$$Q(h,k) = \frac{1}{3}\left(h^2 + 2\frac{4}{3}h\,k + k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(h^2 + 2\,h\,\frac{4}{3}\,k + \left(\frac{4}{3}\,k\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\,k\right)^2 + k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(h + \frac{4}{3}\,k\right)^2 - \frac{7}{9}\,k^2\right\}$$

Il fatto di essere pervenuti ad una differenza di quadrati conferma la precedente osservazione che la forma Q sia non definita:

- sui punti h e $k \neq 0$ tali che $h + \frac{4}{3}\,k = 0$ riesce $Q(h,k) < 0$
- sui punti con $k = 0$ con $h + \frac{4}{3}\,k \neq 0$ riesce $Q(h,0) > 0$.

La matrice simmetrica associata a Q é

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono le radici dell'equazione

$$-7 - 6\,\lambda + \lambda^2 = 0, \quad \lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1$$

Il segno diverso dei due autovalori é un'altra caratteristica delle forme quadratiche non definite.

CAPITOLO 18

Foglio 6

FUNZIONI
DI PIÚ VARIABILI
2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Calcolare le derivate prima e seconda della funzione

$$F(x) = \int_0^{2x} (2x - t)\sin(t)dt$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$F'(x) = \int_0^{2x} \frac{\partial}{\partial x}(2x - t)\sin(t)dt + (2x - 2x)\sin(2x)(2x)' =$$

$$= 2\int_0^{2x} \sin(t)dt = 2[-\cos(2x) + 1]$$

$$F''(x) = 4\,\sin(2x)$$

OSSERVAZIONE 1.1.
Domanda:
Che relazione intercorre tra la $F(x)$ assegnata e la

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)\sin(t)dt \quad ?$$

Risposta:

$$F(x) = G(2x)$$

Quindi, regola di derivazione delle funzioni composte,

$$F'(x) = G'(2x)\,.\,(2x)' = 2\,G'(2x)$$
$$F''(x) = 2\,G''(2x)\,.\,2$$

É noto (dagli Appunti) che riesce

$$G''(x) = \sin(x)$$

quindi

$$F''(x) = 4\,\sin(2x)$$

come si era ottenuto sopra.

Cosa si potrebbe pensare delle derivate seconde delle funzioni

$$P_m(x) = \int_0^{mx} (mx - t)\sin(t)dt \quad ?$$

2. Esercizio

Assegnata la funzione

$$G(x) = \int_{1+2x}^{x^2+5x+1} \log(1 + x^2 + y^2)\, dy$$

determinare l'equazione della tangente al grafico di $G(x)$ *nel punto* $x_0 =$ 0.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$ L'equazione della tangente é

$$y = G(0) + G'(0)\, x$$

per determinarla occorre calcolare $G(0)$ e $G'(0)$

$$G(0) = \int_1^1 \log(1 + y^2)\, dy = 0$$

$$G'(x) = \int_{1+2x}^{x^2+5x+1} \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + x^2 + y^2)\, dy +$$

$$+ \log(1 + x^2 + (x^2 + 5x + 1)^2)(x^2 + 5x + 1)' -$$

$$- \log(1 + x^2 + (1 + 2x)^2)(1 + 2x)'$$

Ponendo quindi $x = 0$ si ottiene

$$G'(0) = \log(1 + 1)5 - \log(1 + 1)2 = 3\log(2)$$

La retta tangente, vedi Figura 1, é pertanto

$$y = 3\log(2)\, x$$

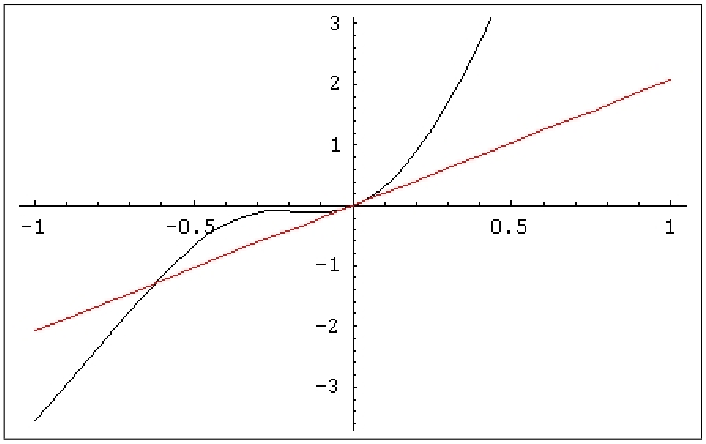


FIGURA 1. $G(x), \quad y = 3\log(2)\,x$

3. Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

essendo $\mathcal{C}$ *l'elica*

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione:

$$ds = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1^2}dt = \sqrt{2}\, dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \int_0^{2\pi} \left[\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2\right] \sqrt{2}\, dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\, dt = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{1}{3}(2\pi)^3\right) \cong 125.818$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Tenuto conto che l'ascissa curvilinea sull'elica* C *assegnata é*

$$s = \int_0^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}} s$$

e quindi che la lunghezza dell'intera elica é $2\sqrt{2}\,\pi$ *l'integrale richiesto corrisponde, geometricamente all'area, vedi Figura 2, del sottografico* *della funzione*

$$f(s) = \cos^2(\frac{1}{\sqrt{2}}s) + \sin^2(\frac{1}{\sqrt{2}}s) + (\frac{1}{\sqrt{2}}s)^2 = 1 + \frac{1}{2}s^2$$

sull'intervallo $s \in [0,\, 2\sqrt{2}\,\pi]$

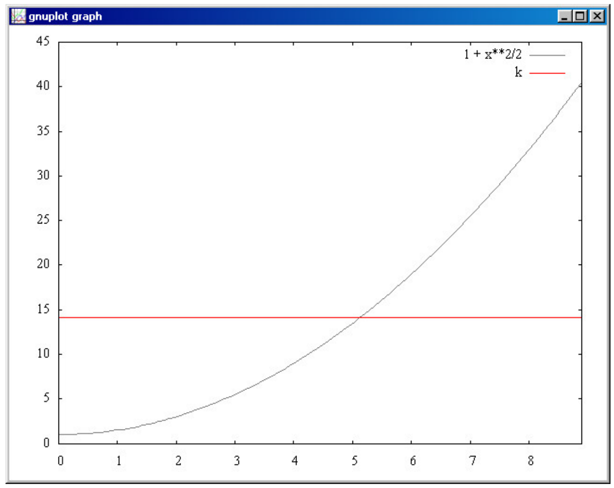


FIGURA 2. Il sottografico e il valor medio

4. Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_C (x^2 + y^2)\, ds$$

essendo C *la porzione della catenaria* $y = \cosh(x), \quad -1 \le x \le 1$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La rappresentazione parametrica della catenaria assegnata é

$$x = t,\ y = \cosh(t), \quad t \in [-1, 1]$$

Ne segue

$$ds = \sqrt{1 + \sinh^2(t)}dt = \cosh(t)\, dt$$

pertanto

$$\int_C (x^2 + y^2)\, ds = \int_{-1}^{1} \left(t^2 + \cosh^2(t)\right) \cosh(t)\, dt$$

tenuto conto che

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$$

si ha

$$\left(t^2 + \cosh^2(t)\right)\cosh(t) = \frac{1}{8}\left\{e^{-3\,t} + 3e^{-t} + 3\,e^t + e^{3\,t} + 4\,t^2 e^{-t} + 4\,e^t\,t^2\right\}$$

I termini $t^2\,e^{-t}$, $\quad t^2 e^t$ si integrano per parti.
Si ottiene complessivamente

$$\int_C (x^2 + y^2)\,ds = -4\,\cosh(1) + \frac{15\,\sinh(1)}{2} + \frac{\sinh(3)}{6} \simeq 4.31133$$

Osservazione 4.1. *La lunghezza della porzione di catenaria assegnata é* $\int_{-1}^{1}\cosh(t)\,dt = 2\sinh(1) \simeq 2.3504$*, la funzione integranda,* $x^2 + y^2$ *prende valori da* 1 *assunto nel punto* $(0, 1)$ *della curva a* $1 + \cosh^2(1) \simeq 3.3811$ *preso nei due estremi.*
Il valore 4.31133 trovato per l'integrale curvilineo rispetta pertanto il teorema della media

$$\int_C (x^2 + y^2)ds = (\xi^2 + \eta^2)\ell(\mathcal{C})$$

5. Esercizio

Determinare per quali valori del parametro λ *il campo*

$$F = \{x + \lambda\,y, \quad y + \lambda^2\,x\}$$

é conservativo, e in corrispondenza ad essi, determinarne i potenziali.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La condizione necessaria affinché F sia conservativo é

$$\mathrm{rot}\,(F) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x + \lambda\,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y + \lambda^2\,x)$$

da cui

$$\lambda = \lambda^2 :\Rightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1$$

Tenuto conto che il campo F é definito in tutto il piano, insieme convesso e quindi stellato, la condizione $\mathrm{rot}\,(F) = 0$ é anche sufficiente perché F sia conservativo.

$$\lambda = 0: \quad F = \{x,\, y\} \qquad F = \nabla\,\left\{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$$

$$\lambda = 1: \quad F = \{x+y,\, y+x\} \quad F = \nabla\,\left\{\tfrac{1}{2}(x+y)^2\right\}$$

6. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$F = \{y,\, x,\, z\}$$

determinare il lavoro di F lungo la poligonale $\overrightarrow{ABCD}$ essendo

$$A = (1,0,0),\ \ B = (1,1,0),\ \ C = (1,1,1,),\ \ D = (1,1,2)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$ Il campo vettoriale F assegnato ha rotore nullo (verifica ovvia) ed essendo assegnato in tutto R^3 é anche conservativo

$$F = \nabla\left\{x\,y + \frac{1}{2}z^2\right\}$$

Il lavoro richiesto si riduce alla differenza del potenziale

$$U(x,y,z) = \left\{x\,y + \frac{1}{2}z^2\right\}$$

ai due estremi

$$\int_{\overrightarrow{ABCD}} F \times T ds = U(1,1,2) - U(1,0,0) = 3$$

Osservazione 6.1. *La notazione delle forme differenziali avrebbe proposto per il lavoro, lungo una poligonale coordinata, la seguente espressione:*

$$\int_0^1 1\,dy + \int_0^2 z\,dz = 1 + \frac{1}{2}2^2 = 3$$

7. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \{2x,\, y^2\}$$

- *disegnare con il metodo delle freccette il campo F sul bordo del quadrato di estremi $O = (0,0)$, $B = (1,1)$*
- *calcolare il lavoro di F lungo il bordo del quadrato precedente percorso in senso antiorario,*
- *calcolare un potenziale di F.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il campo F lungo il bordo del quadrato Q disegnato, vedi Figura 3, con il metodo delle freccette.

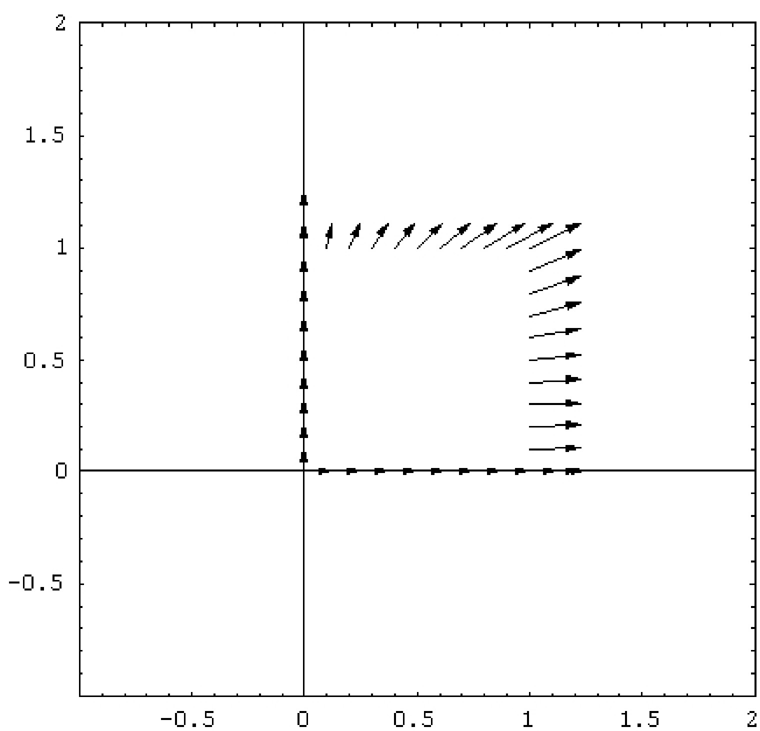


FIGURA 3. Il campo $F = \{2x,\, y^2\}$

Il lavoro lungo il bordo del quadrato é il lavoro lungo una poligonale coordinata: la notazione delle forme differenziali é certamente vantaggiosa

$$\int_{\partial Q} F \times T ds = \int_0^1 y^2\, dy + \int_1^0 2x\, dx + \int_1^0 y^2\, dy + \int_0^1 2x\, dx = 0$$

avendo tenuto conto che i 4 addendi si elidono due a due.
Il precedente lavoro nullo lungo la poligonale chiusa bordo del quadrato era ampiamente prevedibile perché

$$\mathrm{rot}\,(F) = 0 \Rightarrow F = \nabla \left\{ x^2 + \frac{1}{3} y^3 \right\}$$

e quindi il campo é conservativo.

8. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left\{ 3x^2 + 6xy + 2y^2, \quad 3x^2 + 4xy + y^2 \right\}$$

- *calcolare il rotore,*
- *calcolare un potenziale di* $\overrightarrow{F}$

Soluzione:

$$\mathrm{rot}\,(F) = \left\{ 0,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4xy + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy + 2y^2) \right\} = \{0, 0, 0\}$$

Un potenziale di F si determina trovando

- una primitiva di $3x^2 + 6xy + 2y^2$ rispetto ad x

$$U(x, y) = x^3 + 3x^2 y + 2y^2 x + g(y)$$

- Imponendo che riesca $U_y = 3x^2 + 4xy + y^2$ ovvero

$$3x^2 + 4\,x\,y + g'(y) = 3x^2 + 4xy + y^2 \Rightarrow g'(y) = y^2 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{3} y^3$$

- Il potenziale cercato é pertanto (a meno di una costante)

$$x^3 + 3x^2 y + 2y^2 x + \frac{1}{3} y^3$$

9. Esercizio

Assegnato il campo

$$\overrightarrow{F} = \{\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}\}$$

rappresentare un suo potenziale servendosi della formula incontrata nella dimostrazione del Lemma di Poincaré.

Soluzione:

L'algoritmo del Lemma di Poincaré che esprime il potenziale $U(x, y)$ del campo $F = \{a(x, y), b(x, y)\}$ in un campo stellato ad esempio rispetto all'origine é il seguente

$$U(x, y) = \int_0^1 \{a(xt, yt)\, x + b(xt, yt)\, y\}dt$$

quindi nel caso assegnato si ha

$$U(x, y) = \int_0^1 \left\{ \frac{x}{1+x^2t^2} + \frac{y}{1+y^2t^2} \right\} dt$$

tenuto presente che

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2t^2}\, dt = \arctan(xt)|_0^1 = \arctan(x)$$

e analogamente

$$\int_0^1 \frac{y}{1+y^2t^2}\, dt = \arctan(yt)|_0^1 = \arctan(y)$$

si ha

$$U(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y)$$

10. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$F = \left\{ -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x}{x^2+y^2} \right\}$$

determinare il lavoro di F

- *lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio* 1 *percorsa in senso orario,*
- *lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio* 2 *percorsa in senso orario anch'essa,*
- *lungo la circonferenza di centro il punto $C = (2, 3)$ e raggio 1, percorsa in senso orario.*

Soluzione:

- Lavoro lungo la circonferenza di raggio 1 in verso orario:
$$\int_0^{2\pi} \{-\sin(t)(\sin(t)) + \cos(t)(-\cos(t))\}\, dt = -2\pi$$
- Lavoro lungo la circonferenza di raggio 2 in verso orario:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\{-2\sin(t)(2\sin(t)) + 2\cos(t)(-2\cos(t))\}\, dt = -2\pi$$
- Il lavoro lungo la terza circonferenza é nullo per i seguenti motivi:
  - il campo F assegnato ha rotore nullo (verifica),
  - quindi é conservativo, ovvero é un gradiente, in ogni campo stellato,
  - il primo quadrante ($x > 0$, $y > 0$) é un campo stellato... quindi in esso F é conservativo,
  - la terza circonferenza assegnata é interamente contenuta nel quarto quadrante.

CAPITOLO 19

Foglio 7

FUNZIONI
DI PIÚ VARIABILI
2004-2005
Esercitazioni

1. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad S := \{-1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2\}\,.$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

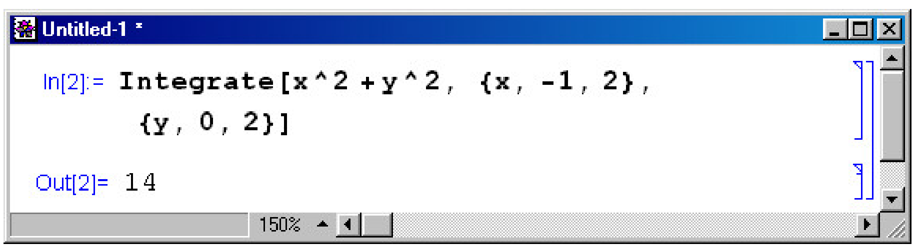


FIGURA 1. Il calcolo con *Mathematica*

$$\iint_S (x^2+y^2)\, dx\, dy, = \int_{-1}^{2} dx \int_0^2 (x^2+y^2)\, dy = \int_{-1}^{2} \left(\frac{8}{3} + 2\,x^2\right)\, dx = 14$$

2. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S (x^2 + y)\, dx\, dy, \quad S := \{|x| + |y| \le 1\}\,.$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

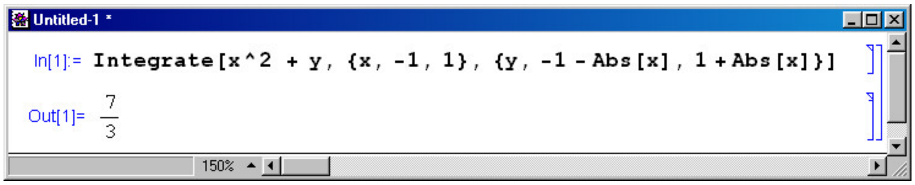


FIGURA 2. Il calcolo con *Mathematica*

$$\iint_S (x^2 + y)\, dx\, dy = \iint_S x^2\, dx\, dy + \iint_S y\, dx\, dy = \iint_S x^2\, dx\, dy$$

avendo riconosciuto che, dalla simmetria di S segua il fatto che l'integrale doppio della funzione y venga nullo.

$$\iint_S x^2\, dx = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1-|x|}^{1+|x|} x^2 dy = 2\int_{-1}^{1} \left(x^2 + |x|x^2\right) dx =$$

$$= 4\int_0^1 (x^2 + x^3) dx = \frac{7}{3}$$

3. Esercizio

Sia E l'intersezione seguente

$$E : \left\{x^2 + 3y^2 \le 1\right\} \cap \left\{3x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

- *riconoscere che E é misurabile,*
- *calcolare la sua area.*

Soluzione:

Si ricordi che l'intersezione di due insiemi misurabili é misurabile: é noto che ciascuno dei due insiemi

$$x^2 + 3y^2 \le 1 \qquad 3x^2 + y^2 \le 1$$

delimitati da ellissi, sono misurabili. Quindi l'insieme E assegnato, vedi Figura **??**, é misurabile.
L'area puó essere geometricamente dedotta dall'area (comune) delle due ellissi sottraendo l'area delle due calotte.
Area calotta:

- punti di intersezione

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}, \quad y = \pm\frac{1}{2}$$

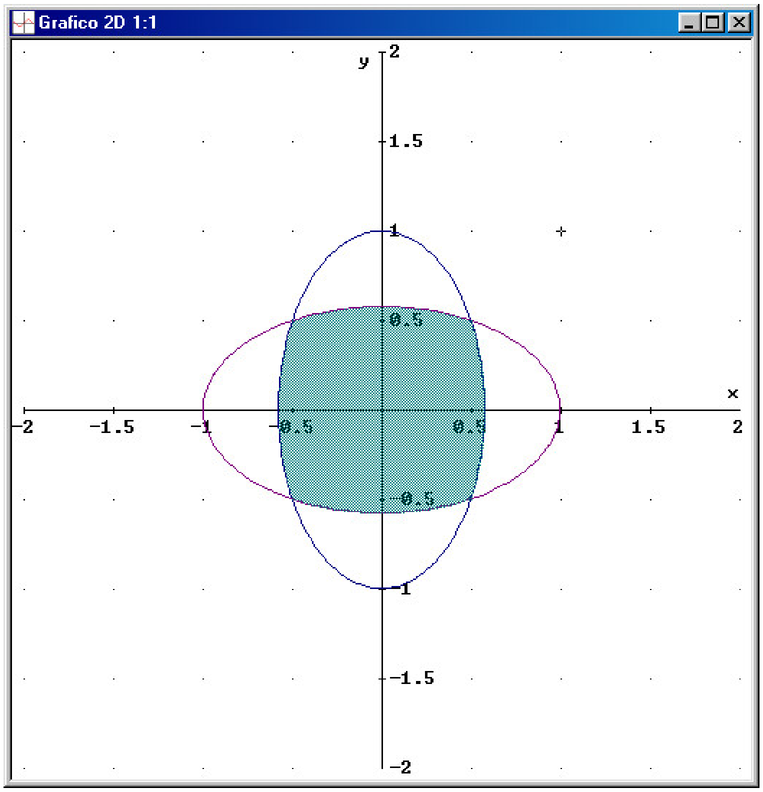


FIGURA 3. L'intersezione di due ellissi simmetriche

- calotta

$$\Omega : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)} \le y \le \sqrt{1-3x^2}$$

- $$Area(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)} \right) dx =$$

Tenuto conto che

$$\int \sqrt{(1-a^2x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1-a^2\,x^2}}{2} + \frac{\arcsin(a\,x)}{2\,a}$$

si ricava

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)} \right) dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

- Ne segue, tenuto conto che ciascuno dei due insiemi, delimitati da ellissi di semiassi 1 e $1/\sqrt{3}$ vale $\pi/\sqrt{3}$ ne segue
$$Area(E) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi \simeq 1.2092$$

Si osservi che l'insieme E assegnato é, per via della convessitá dei lati un po' piú grande del quadrato di stessi vertici, quindi di un quadrato di lato 1 e area 1: il valore trovato per l'area di E é in accordo con questa osservazione.

4. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy, \quad E := \left\{\{x+y \geq 1\} \cap \left\{x^2+y^2 \leq 1\right\}\right\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'insieme E é il quarto di cerchio di centro l'origine e raggio 1 contenuto nel primo quadrante privato del triangolo $\triangle_{(0,0),(1,0),(0,1)}$. Riesce quindi

$$Area(E) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \simeq 0.285398$$

quindi in base al teorema della media il valore dell'integrale

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy, \simeq 0.285398 \times (\xi+\eta) \simeq 0.35$$

Il conto esatto:

$$E: 0 \leq x \leq 1, \quad 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \to \iint_E (x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dy = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3} \simeq 0.333$$

5. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E |x\,y|\,dx\,dy, \quad E := \{|x| + 3|y| \leq 1\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

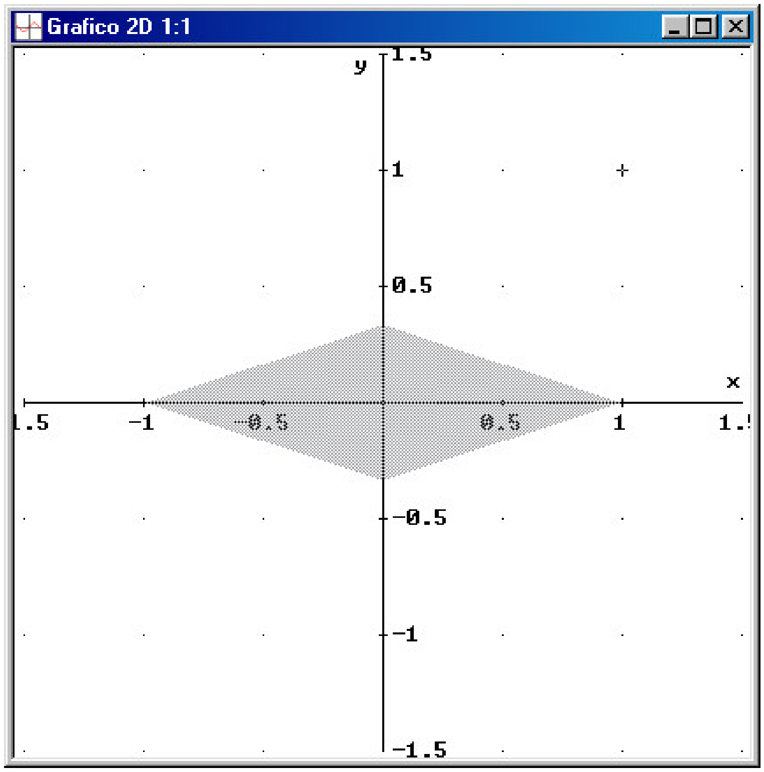


FIGURA 4. $E := \{|x| + 3|y| \leq 1\}$

$$E := -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{1}{3}(1-|x|) \leq y \leq \frac{1}{3}(1-|x|) \to \iint_E |x\,y|\,dx\,dy =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\frac{1}{3}(1-|x|)}^{\frac{1}{3}(1-|x|)} |x\,y|\,dy =$$

$$4\int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1}{3}(1-x)} y\,dy = \frac{1}{54}$$

Il fattore 4 comparso corrisponde all'aver riconosciuto la simmetria dei quattro triangoli $\triangle_1, \dots \triangle_4$ che compongono E e la simmetria in essi anche della funzione integranda $|xy|$: in altri termini

$$\iint_E |x\,y|\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{4} \iint_{\triangle_i} |x\,y|\,dx\,dy = 4\iint_{\triangle_1} |x\,y|\,dx\,dy$$

6. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{se} \quad x \le y \\ x^2-y^2 & \text{se} \quad x > y \end{cases}$$

calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy, \qquad E: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Decomponiamo l'insieme di integrazione E assegnato in

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \qquad \begin{cases} E_1 := \{0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}, \\ E_2 := \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}, \\ E_3 := \{1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}, \end{cases}$$

tre parti in ciascuna la funzione integranda f, vedi Figura 5, é assegnata con una sola delle due formule.

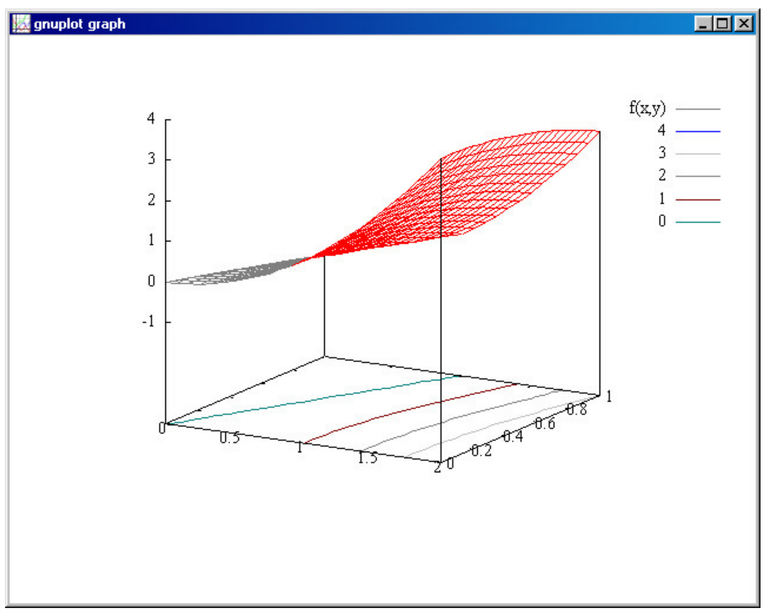


FIGURA 5. $f(x,y)$ su $E: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{E_1} (x-y)\,dx\,dy +$$

$$+\iint_{E_2}(x^2-y^2)\,dx\,dy+\iint_{E_3}(x^2-y^2)\,dx\,dy$$

I tre integrali si calcolano per riduzione al modo seguente

$$\iint_{E_1}(x-y)\,dx\,dy \;=\int_0^1 dx\int_x^1 (x-y)\,dy$$

$$\iint_{E_2}(x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2-y^2)\,dy$$

$$\iint_{E_3}(x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_0^1 (x^2-y^2)\,dy$$

Tenuto conto che i primi due integrali, quello su E_1 e quello su E_2 sono opposti, il conto si riduce al terzo integrale soltanto

$$\int_1^2 dx\int_0^1 (x^2-y^2)\,dy=2$$

L'integrale doppio richiesto vale, pertanto 2.

7. Esercizio

- Calcolare l'integrale doppio

$$I=\iint_E(1+2x+3y)\,dx\,dy,\quad E:=\{0\le x\le 3,\quad 0\le y\le 2\}$$

- disegnare sul piano (u,v) l'immagine $T(E)$ di E determinata dalla trasformazione affine

$$T:(x,y)\to(u,v)\;\left\{\begin{array}{ll} u= & 2x+3y\\ v= & -2x+3y\end{array}\right.$$

- calcolare l'area di $T(E)$ confrontandola con quella di E,
- indicare l'integrale doppio J in u,v nel quale si riduce I tramite la T e calcolare J

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\iint_E(1+2x+3y)\,dx\,dy=\int_0^3 dx\int_0^2(1+2x+3y)\,dy=\int_0^3((8+4x)dx=42$$

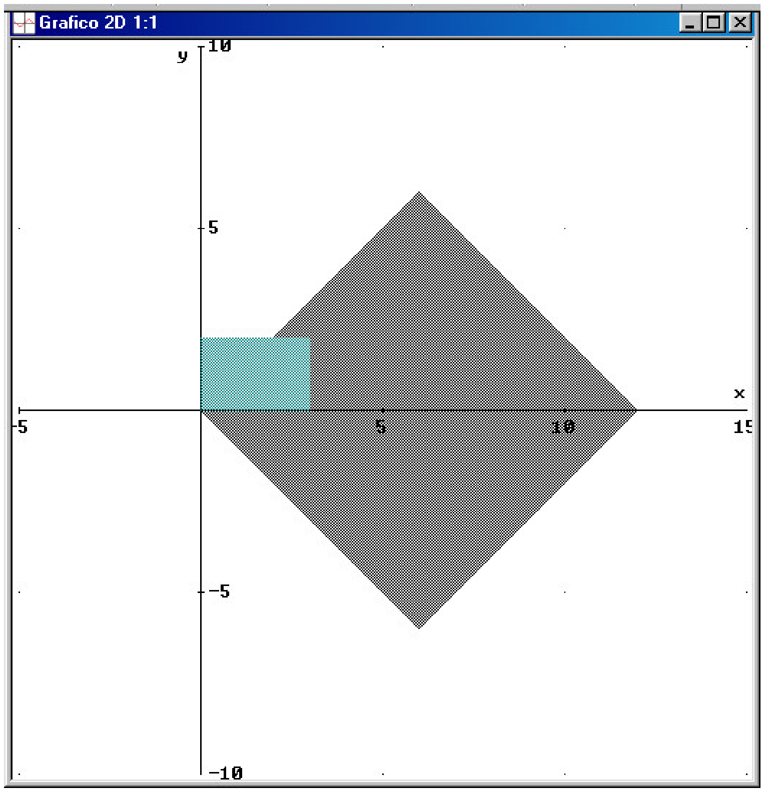


FIGURA 6. Il rettangolino E sul piano (x, y) e il quadrato $Q = T(E)$ sul piano (u, v)

Per determinare l'immagine $T(E)$, vedi Figura 6, basta determinare le immagini dei quattro vertici

$$\begin{cases} T(0,0) = & (0,0) \\ T(0,3) = & (6,-6) \\ T(3,2) = & (12,0) \\ T(0,2) = & (6,6) \end{cases}$$

Si riconosce facilmente che $T(E)$ é un quadrato che chiamiamo Q
Riesce

$$Area(T(E)) = 72, \quad Area(E) = 6$$

Tenuto presente che la trasformazione affine assegnata ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 12$$

si riconosce la validitá della formula

$$Area(T(E)) = Area(E)\,|\det(A)|$$

osservata nelle formule di Cambiamento di coordinate affini.
Per esprimere l'integrale doppio I con un integrale in u, v occorre prepararsi l'espressione di (x, y) in funzione di (u, v) ovvero determinare la trasformazione inversa della T

$$T : \begin{cases} u = & 2x + 3y \\ v = & -2x + 3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1} : \begin{cases} x = & \frac{1}{4}(u - v) \\ y = & \frac{1}{6}(u + v) \end{cases}$$

$$\iint_E (1 + 2x + 3y)\, dx\, dy = \iint_Q (1 + u)\, \frac{1}{12} du dv =$$

$$\frac{1}{12} \int_0^6 du \int_{-u}^{u} (1 + u) dv + \frac{1}{12} \int_6^{12} du \int_{-12+u}^{12-u} (1 + u) dv =$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^6 2u(1 + u) du + 2\frac{1}{12} \int_6^{12} (1 + u)(12 - u) du = 42$$

8. Esercizio

Calcolare servendosi delle coordinate polari

$$\iint_E \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad E = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'insieme E assegnato corrisponde, nelle coordinate polari

$$x = \rho \cos(\theta),\ y = \rho \sin(\theta)$$

al rettangolo

$$R := \{0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Pertanto riesce

$$\iint_E \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_R \sin(\rho^2) \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^1 \sin(\rho^2)\, \rho\, d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^1 \sin(\rho^2)\, \rho\, d\rho = \frac{1}{4}(1 - \cos(1))\pi \simeq 0.361046$$

9. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E e^{-(3x^2+5y^2)}\,dx\,dy, \quad E = \left\{3x^2+5y^2 \leq 1\right\}$$

servendosi del cambiamento di coordinate

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\rho\,\cos(\theta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\rho\,\sin(\theta)$$

Soluzione:

Il cambiamento di coordinate indicato rappresenta l'insieme E sul rettangolo R del piano (ρ, θ)

$$R := \{0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Lo jacobiano della trasformazione é il seguente

$$J(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta) & \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\rho\,\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{5}}\,\rho\,\cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ne segue

$$\iint_E e^{-(3x^2+5y^2)}\,dx\,dy, \quad = \quad \iint_R e^{-\rho^2}\rho\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,e^{-\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{15}}\int_0^1 e^{-\rho^2}2\rho d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{15}}(1-e^{-1}) \simeq 0.512748$$

OSSERVAZIONE 9.1. *Si noti che detto Ω il cerchio di centro l'origine e raggio 1 si ha, servendosi delle coordinate polari,*

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-\rho^2}\rho d\rho = \iint_\Omega e^{-u^2-v^2}du\,dv$$

quindi, tenuto conto dei calcoli precedenti

$$\iint_E e^{-(3x^2+5y^2)}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{15}}\iint_\Omega e^{-u^2-v^2}du\,dv$$

risultato che si sarebbe ottenuto anche pensando al cambio di coordinate affini

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}u, \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}v$$

che trasforma l'ellisse E nel cerchio Ω con determinante jacobiano

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

10. Esercizio

Posto

$$F(a) = \iint_{Q_a} \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy \quad Q_a : \{0 \le x \le a,\, 0 \le y \le a\}$$

- *calcolare il valore $F(1)$*
- *determinare l'equazione della tangente al grafico di $F(a)$ in corrispondenza ad $a_0 = 1$*
- *determinare il*

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{a^2}\,F(a)$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La determinazione esplicita di $F(a)$ é semplicissima:

$$F(a) = \iint_{Q_a} \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy \quad = \quad \int_0^a dx \int_0^a \frac{y}{1+x^2}\,dy =$$
$$= \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx \int_0^a y\,dy = \frac{1}{2}a^2\,\arctan(a)$$

da cui

$$F(1) = \frac{1}{8}\pi$$

L'equazione della tangente al grafico in $a_0 = 1$ richiede il valore $F'(1)$ che puó essere calcolato

- direttamente derivando l'espressione di $F(a)$

$$F'(a) = a\,\arctan(a) + \frac{1}{2}a^2\frac{1}{1+a^2}, \quad F'(1) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}$$

- derivando rispetto ad a secondo la regola di derivazione degli integrali dipendenti da parametri

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^a \left(\int_0^a \frac{y}{1+x^2}\,dy\right) dx =$$
$$= \int_0^a \frac{y}{1+a^2}\,dy + \int_0^a \frac{a}{1+x^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}a^2\frac{1}{1+a^2} + a\,\arctan(a)$$

da cui, naturalmente lo stesso valore per $F'(1)$

Equazione della tangente richiesta

$$y = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}(1+\pi)(x-1)$$

11. Esercizio

Sia

$$S : \left\{ (\frac{1}{p}, \frac{1}{q}), \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

- *disegnare i sottinsiemi* $S_n = S \cap \left\{ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{n^2} \right\}$
- *determinare l'area interna* $A^-(S)$
- *riconoscere che* S *é misurabile e calcolarne l'area.*

Soluzione:

Soluzione corretta grazie al contributo degli studenti del primo canale

Si osservi che i punti

$$P = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right)$$

sono, via via che gli interi p e q crescono, sempre piú vicini all'origine o agli assi, sia quello delle ascisse per q grande, sia quello delle ordinate per p grande:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \;=\; \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} = 0$$

In altri termini la parte di essi che cade fuori del cerchio $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{n^2}$ e fuori di due rettangoli $R_x : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \varepsilon$, e $R_y : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \varepsilon$, é formata da un numero finito di punti:

$$P_1,\, P_2,\, \dots P_{m_n}$$

Quindi

$$S \subseteq \left(x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2} \right) \cup R_x \cup R_y \cup \{P_1\} \cup \{P_2\}\ cup \dots \cup \{P_{m_n}\}$$

Il calcolo dell'area esterna di S deve tener conto pertanto delle aree dei quadratini necessari a coprire il cerchietto $\left(x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}\right)$, i due rettangolini R_x ed R_y e gli m_n punti P_i.

- per coprire il cerchietto, insieme misurabile di area $\frac{\pi}{n^2}$ si possono coinvolgere un numero di quadratini che producano un'area prossima a $\frac{\pi}{n^2}$ quanto si vuole, quindi bassa quanto si voglia,
- per coprire i due rettangolini R_x ed R_y basteranno un numero di quadratini di area complessiva non superiore a 2ε

- per coprire gli m_n punti si possono coinvolgere m_n quadratini di area complessiva bassa quanto si voglia.

Si riconosce pertanto che l'insieme S é ricopribile con una famiglia finita di quadratini di area complessiva bassa quanto si vuole... risultato che equivale a riconoscere che

$$A^{-}(S) = A^{+}(S) = 0$$

ovvero misurabilitá di S e sua area nulla.

Parte 5

Gli esoneri 2005

CAPITOLO 20

Primo esonero

1 Esonero
31 gennaio 2005

1. Esercizio

- Dire per quali $(x, y) \in R^2$ sono verificate le seguenti condizioni (disegnare l'insieme)

$$\begin{cases} |4x| \leq 5 \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

- Disegnare l'insieme piú grande dove si possano definire le seguenti funzioni

$$F(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^4}{x - y^2}, \quad G(x, y) = e^{\frac{1}{x^2 + y^2}}, \quad \tan(x^2 + y^2)$$

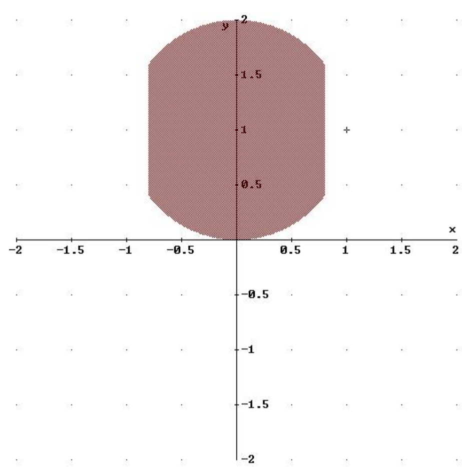


FIGURA 1. L'insieme del primo esercizio.

1.1. ***Soluzione:***

- L'insieme consiste nell'intersezione della striscia
$$-5/4 \leq x \leq 5/4$$
col cerchio di centro il punto $(0,1)$ e raggio 1, vedi Figura 1.
-
  - La funzione F quoziente di due polinomi é definita in tutti i punti di R^2 nei quali il polinomio a denominatore é diverso da zero, quindi l'insieme di definizione di F é tutto R^2 privato dei punti della parabola $x = y^2$
  - La funzione G é ottenuta componendo la funzione esponenziale e^t con la funzione razionale $1/(x^2y^2)$, definita quest'ultima in tutto R^2 privato dell'origine: quindi la funzione G é definita in tutto R^2 privato dell'origine.
  - La funzione $\tan(x^2+y^2)$ é definita in tutto R^2 privato dei punti (x,y) tali che
  $$x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
  ovvero la funzione $\tan(x^2 + y^2)$ é definita in R^2 privato della famiglia di circonferenze di centro l'origine e raggi
  $$r_k = \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2}}, \quad k \in N$$

2. Esercizio

Disegnare le linee di livello $z_0 = -1, 0, 1$ per le seguenti funzioni
$$x^2y^2, \quad e^{x^2+y^2} - 1, \quad sin(x+y)$$

2.1. ***Soluzione:***

- x^2y^2
  - linea $z_0 = -1$ é vuota, x^2y^2 é sempre non negativa,
  - linea $z_0 = 0$ viene il solo punto $(0,0)$,
  - linea $z_0 = 1$ $x^2y^2 = 1 \leftrightarrow xy = \pm 1$ si ottengono i punti delle due iperboli $xy = 1$ e $xy = -1$
- $e^{x^2+y^2} - 1$
  - linea $z_0 = -1$ é vuota, $e^{x^2+y^2} > 0, \forall (x,y)$
  - linea $z_0 = 0$ viene il solo punto $(0,0)$,
  - linea $z_0 = 1$ é la circonferenza $x^2 + y^2 = \ln(2)$
- $sin(x+y)$

– linea $z_0 = -1$ viene la famiglia di rette parallele $x + y = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
– linea $z_0 = 0$ viene la famiglia di rette parallele $x + y = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
– linea $z_0 = 1$ viene la famiglia di rette parallele $x + y = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Esercizio

- Siano $P = (1, 2)$, e $Q = (-1, 3)$. Si calcoli $P + 3Q$ e la lunghezza del segmento PQ,
- Si calcoli il limite della successione

$$P_n = \left(e^{-n+2}, \quad \frac{\sin(n+1)}{n^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

- Assegnate le due successioni

$$P_n = \left(0, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^k \right), \qquad Q_n = \left(\sin(1 + n^2), \quad e^{-n} \right)$$

si esamini quali di esse é convergente.

3.1. *Soluzione:*

- $P + 3Q = (-2, 11)$,

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$$

-

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n+2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (0, 0)$$

-

$$P_n = \left(0, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) = \left(0, \quad 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \to (0, 2)$$

La seconda successione , Q_n non converge perché la successione $\sin(1 + n^2)$ delle ascisse x_n non converge.

4. Esercizio

Calcolate F_x e F_{xy} per le seguenti funzioni:

$$F(x,y) = ax^2 + by^2 - xy, \quad F(x,y) = \sin(x^2 + y^2 + 1)$$

4.1. *Soluzione:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + by^2 - xy) = 2ax - y, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(ax^2 + by^2 - xy) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 + y^2 + 1) = 2x \cos(x^2 + y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sin(x^2 + y^2 + 1) = -4xy \sin(x^2 + y^2 + 1)$$

5. Esercizio

Sia F una funzione definita su $\mathbb{R}^2$ e supponiamo che $F(0,0) = 1, \quad F(2,2) = -5$

- mostrare, fornendo un esempio, che non é detto che F assuma il valore zero,
- dire perché, invece, se F é continua allora esiste un punto P tale che $F(P) = 0$

5.1. *Soluzione:*

- Sia, ad esempio,

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ \\ -5 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

che soddisfa le condizioni $F(0,0) = 1, \quad F(2,2) = -5$.
F é definita in tutto $\mathbb{R}^2$ e prende i soli valori 1 su un semipiano chiuso e -5 su quello opposto, e, quindi, non prende mai il valore zero.
Si tratta evidentemente di una funzione F discontinua.

- Se F é continua ed é definita in tutto $\mathbb{R}^2$ vale per essa il teorema d'esistenza degli zeri che garantisce l'esistenza di punti P in cui la funzione si annulla.
  Il teorema garantisce anzi di trovarne sul segmento da $(0, 0)$ a $(2, 2)$.

CAPITOLO 21

Secondo esonero

2 Esonero
16 febbraio 2005

1. Esercizio

Sia $f(x, y) = x(x^2 + y^2)$

- *si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di* f *nel punto* $(1, 2, 5)$,
- *si calcolino i punti stazionari di* f *e si mostri che non sono né di massimo né di minimo,*
- *si determini un vettore del piano* $x\,y$, *tangente alla linea di livello* $f(x, y) = 2$ *nel punto* $P = (1, 1)$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'equazione del piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ nel punto $(1, 2)$ e naturalmente $z = 5$ é la seguente

$$z = 5 + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + y^2, & \to \quad f_x(1, 2) = 7 \\ f_y(x, y) = 2xy, & \to \quad f_y(1, 2) = 4 \end{cases}$$

da cui

$$z = 5 + 7(x - 1) + 4(y - 2)$$

I punti stazionari sono i punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) & = 0 \\ f_y(x, y) & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x^2 + y^2 & = 0 \\ 2xy & = 0 \end{cases} \to x = 0,\ y = 0$$

Nell'unico punto stazionario o critico trovato, l'origine, riesce $f(0, 0) = 0$: tenuto conto che in qualunque punto $(x, y) \neq (0, 0)$ riesce

$$x > 0 \to f(x, y) > 0, \quad x < 0 \to f(x, y) < 0$$

si riconosce che nel punto $(0, 0)$ la f non assume né valore massimo né minimo, neanche relativi, vedi Figura 1.

Un'indagine alternativa per convincersi che nell'unico punto critico, l'origine, non cadano né massimo né minimo puó essere esaminare i valori $f(x,0) = x^3$ funzione, dal grafico ben noto, sempre crescente.

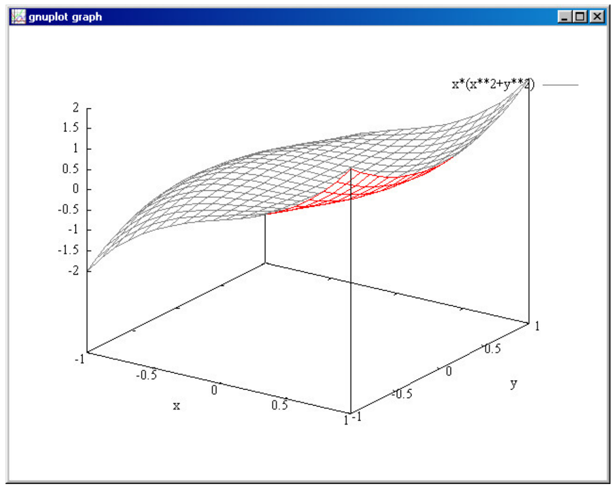


FIGURA 1. Il grafico di $x(x^2+y^2)$ vicino all'origine.

Un vettore tangente alle linee di livello:

- Il punto $(1,1)$ appartiene alla linea di livello $f(x,y) = 2$
- il gradiente
$$\nabla f = \left\{3x^2 + y^2,\, 2xy\right\} \to \nabla f_{(1,1)} = \{4,2\}$$
é ortogonale, nel punto $(1,1)$ alla linea di livello passante per tale punto
- quindi ogni vettore a sua volta ortogonale a $\{4,2\}$ sará tangente in $(1,1)$ alla linea di livello passante per tale punto

Tutti i vettori $\{2,-4\}$, $\{-2,\,4\}, \ldots$ e in generale
$$\overrightarrow{t} = \lambda\{2,\,-4\}, \quad \forall\lambda \neq 0$$
sono tangenti alla linea $f(x,y) = 2$ nel punto $(1,1)$, vedi Figura 2, in verde il gradiente, in rosso un vettore ortogonale al gradiente.

$\boxed{\text{Soluzione alternativa:}}$

La linea di livello $f(x,y) = 2$ corrisponde a
$$y^2 = \frac{2}{x} - x^2$$

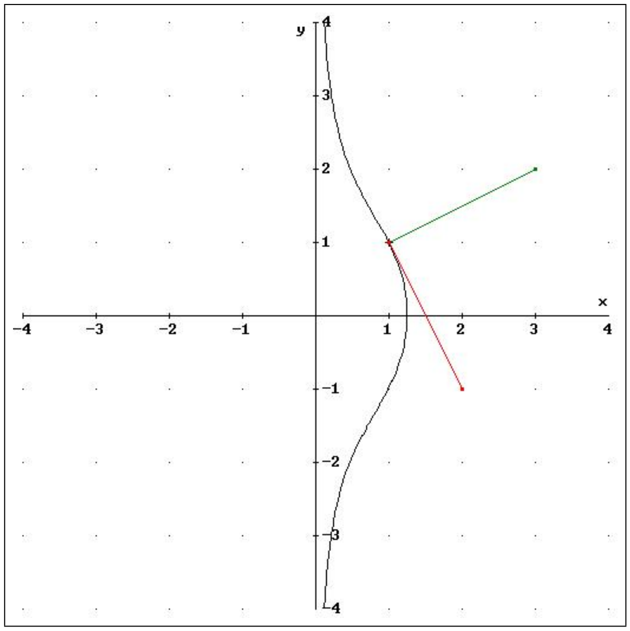


FIGURA 2. La linea di livello $x(x^2 + y^2) = 2$

la curva che passa per $(1, 1)$ é pertanto

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{x} - x^2}$$

$$y'(x) = \frac{-2\frac{1}{x^2} - 2x}{2\sqrt{\frac{2}{x} - x^2}} \quad y'(1) = -2$$

Pertanto un vettore tangente é

$$\overrightarrow{t} = \{1, -2\}$$

vettore che rientra nella famiglia precedentemente indicata $\{2, -4\}$, $\{-2, 4\}, \ldots$

2. Esercizio

Siano $P_0 = (2, 1)$ e $P_1 = (5, 5)$

- *scrivere le equazioni parametriche del segmento* $P_0\,P_1$,
- *detta*
$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left\{e^{5(y-x+1)} + e^{x-2y}\right\}$$
si dia una rappresentazione parametrica del profilo altimetrico $\mathcal{F}$ *relativo ad* f *e al segmento precedente,*
- *calcolare la lunghezza di* $\mathcal{F}$.

Soluzione:

Le equazioni parametriche del segmento sono, ad esempio,

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 1+4t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

La corrispondente rappresentazione del profilo altimetrico $\mathcal{F}$ é quindi la seguente

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 1+4t \\ z &= \frac{1}{2}\left\{e^{5((1+4t)-(2+3t)+1)} + e^{(2+3t)-2(1+4t)}\right\} \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

ovvero, svolti i conti,

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 1+4t \\ z &= \frac{1}{2}\left\{e^{5t} + e^{-5t}\right\} = \cosh(5t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

La lunghezza di $\mathcal{F}$ é data dal seguente integrale:

$$\ell(\mathcal{F}) = \int_0^1 \sqrt{3^2+4^2+5^2\sinh^2(5t)}\,dt = \int_0^1 5\sqrt{1+\sinh^2(5t)}\,dt =$$

$$= \int_0^1 5\cosh(5t)\,dt = \sinh(5) \simeq 74.2032$$

3. Esercizio

Sia $f(x,y) = |x\,y|$

- *esaminare quali delle derivate parziali* f_x *e* f_y *di* f *esistono nei punti* $O = (0,0)$, $\quad A = (1,0)$
- *determinare l'insieme* $\mathbf{E}$ *in cui* f *ammette la derivata parziale prima* f_x *e l'insieme* $\mathbf{G}$ *nel quale ammette la* f_y
- *verificare in quali dei punti* $U = (1,1)$, $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ f *é differenziabile.*

Soluzione:

Primo punto $O = (0,0)$: la funzione assegnata $f(x,y) = |x\,y|$ é nulla, quindi costante, sugli assi

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \to f_x(0,0) = 0$$

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \to f_y(0,0) = 0$$

per quanto concerne il secondo punto $(1,0)$ riesce invece

$$\frac{f(1+h,0)-f(10,0)}{h} = 0, \quad \to f_x(1,0) = 0$$

$$\frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h} = \frac{|h|}{h} \quad \to f_y(1,0) \quad \text{non} \quad \text{esiste}$$

Le derivate parziali f_x ed f_y esistono

- certamente in tutti i punti con $x\,y \neq 0$ cioé fuori degli assi,
- nell'origine, come é stato verificato precedentemente,
- la f_x esiste, inoltre, su tutti i punti $(a,0)$ dell'asse x, con il ragionamento usato precedentemente nel punto $(1,0)$,
- la f_y esiste, inoltre, su tutti i punti $(0,b)$ dell'asse y, come si riconosce con ragionamento analogo a quello precedente del punto $(1,0)$

Differenziabilitá:

- punto $U = (1,1)$: fuori degli assi la funzione f coincide con polinomi, quindi é differenziabile in ognuno di tali punti,
- punto $O = (0,0)$: le derivate parziali esistono e valgono zero, per decidere se f é in tale punto differenziabile occorre valutare la frazione

  $$\left|\frac{f(x,y)-[f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  riconosciuto che

  $$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

  si ricava che

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{f(x,y)-[f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$$

  ovvero che la f é differenziabile nell'origine.
- punto $A = (1,0)$: é stato giá riconosciuto che nel punto $(1,0)$ manca una delle derivate parziali prime, la f_y, quindi in tale punto la f non puó essere differenziabile.

4. Esercizio

Sia $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + x$,

- *disegnare l'insieme* E *di definizione di* f
- *siano* $P = (1,2)$ *e* $Q = (2,1)$, *determinare la derivata direzionale di* f *nel punto* P *secondo la direzione del vettore* $\overrightarrow{PQ}$,
- *determinare il punto* $L = (\alpha, \beta)$ *del segmento* PQ *per il quale vale la relazione del teorema del valor medio*
$$f(2,1) - f(1,2) = (2-1)f_x(\alpha,\beta) + (1-2)f_y(\alpha,\beta)$$
- *disegnare l'insieme dei punti* $(x,y) \in E$ *per i quali la differenza* $f(x,y) - f(1,2)$ *si puó rappresentare con il teorema del valor medio.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'insieme di definizione dipende dalla presenza nell'espressione di f di $\ln(x^2 + y^2 - 1)$ che richiede

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 1$$

l'insieme E dei punti esterni al cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.
In E la funzione f é differenziabile: pertanto le derivate direzionali si calcolano con l'algoritmo

$$\frac{df}{d\nu} = \overrightarrow{\nabla} f \times \overrightarrow{\nu}$$

Nel caso assegnato riesce

$$\overrightarrow{PQ} = \{1, \ -1\} \quad \to \overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, -1\}$$

$$\overrightarrow{\nabla} f = \left\{ \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} + 1, \ \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right\}, \quad \to \overrightarrow{\nabla} f(1,2) = \{\frac{3}{2}, 1\}$$

$$\frac{df}{d\nu} = \{\frac{3}{2}, 1\} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, -1\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Il teorema di Lagrange:

$$f(2,1) - f(1,2) = (2-1)f_x(\alpha,\beta) + (1-2)f_y(\alpha,\beta)$$

ovvero

$$\ln(4) + 1 - \ln(4) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 - 1} + 1 - \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$$

da cui

$$0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 - 1} - \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

C'é un solo punto (α, α) sul segmento PQ : il punto $(1.5, 1.5)$ che rappresenta pertanto il punto L cercato.

I punti $R = (x, y)$ richiesti sono quelli per i quali il segmento PR sta tutto nell'insieme di definizione di f, ovvero, vedi Figura 3, il segmento RP non interseca il cerchio proibito...

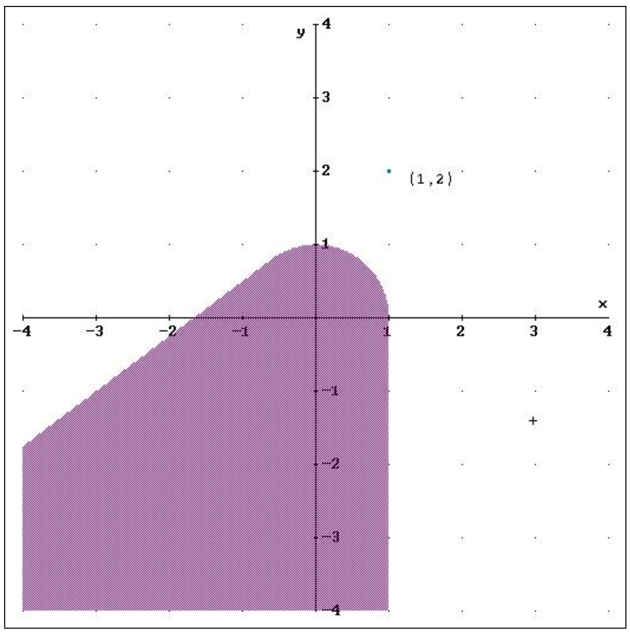


Figura 3. Colorato l'insieme dei punti... proibiti !

CAPITOLO 22

Terzo esonero

21 marzo 2005

1. Esercizio

Sia

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\{ x\sin(x^2+y^2) + \frac{y}{x^2+y^2}\ , \quad y\sin(x^2+y^2) \right\}$$

- *si dica in quale insieme $D \subseteq R^2$ il campo $\overrightarrow{F}$ é di classe C^1 e si dica se D é convesso oppure stellato, oppure né l'uno nell'altro,*
- *si verifichi se $\overrightarrow{F}$ é irrotazionale su D,*
- *calcolare il lavoro del campo $\overrightarrow{F}$ lungo l'arco di circonferenza Γ di centro l'origine, da $P = (0,-1)$ a $Q = (-1,0)$*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Il campo $\overrightarrow{F}$ é definito e di classe C^1 nell'aperto di R^2

$$D :\equiv \{(x,y) \neq (0,0)\},$$

per via del denominatore x^2+y^2 che compare in uno dei termini.
D é un insieme non convesso e neppure stellato.

$$\operatorname{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \\ x\sin(x^2+y^2) + \dfrac{y}{x^2+y^2} & y\sin(x^2+y^2) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ 0, 0, -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right\} = \left\{ 0, 0, \frac{2\,y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \right\}$$

Riesce cioé $\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) \neq 0$: il campo $\overrightarrow{F}$ pertanto non é certamente un campo gradiente.

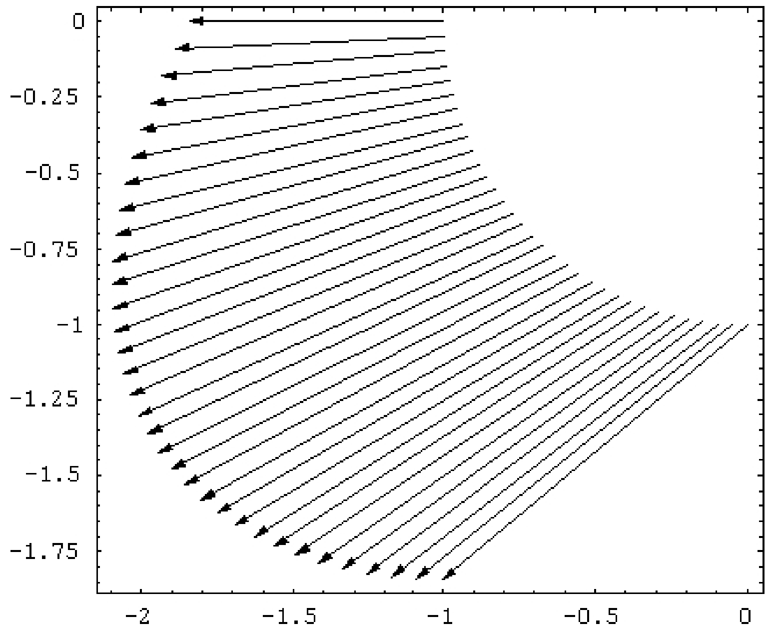


FIGURA 1. Il campo F lungo Γ

La curva Γ si parametrizza con $x = \cos(t)$, $y = \sin(t), t \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$, che induce il verso di percorrenza antiorario.
Il lavoro pertanto, vedi Figura 1, é, tenuto conto del verso **orario** indicato,

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T}\, ds =$$

$$= -\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \{[\cos(t)\sin(1) + \sin(t)][-\sin(t)] + \sin(t)\sin(1)\cos(t)\}\; dt =$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2(t)\, dt = \frac{1}{4}\pi$$

Si osservi che

$$\overrightarrow{F}(x,y) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}\cos(x^2+y^2) + \left\{\frac{y}{x^2+y^2}\ ,0\right\}$$

quindi il lavoro richiesto lungo Γ sará la somma

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \overrightarrow{\nabla}\cos(x^2+y^2) \times \overrightarrow{T}\, ds + \int_{\Gamma} \left\{\frac{y}{x^2+y^2}\ ,0\right\} \times \overrightarrow{T}\, ds =$$

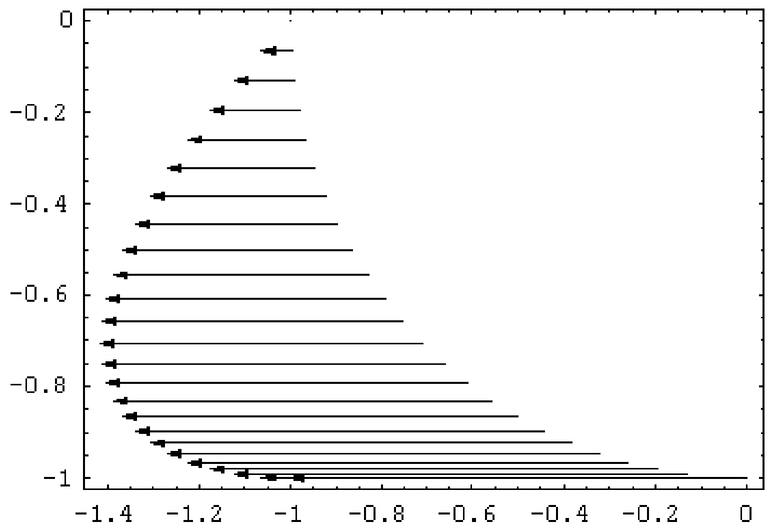


FIGURA 2. $\left\{\frac{y}{x^2+y^2}\ ,0\right\}$

$$= \int_\Gamma \left\{\frac{y}{x^2+y^2}\ ,0\right\} \times \overrightarrow{T}\, ds$$

avendo tenuto conto che il primo integrale rappresenta la variazione della funzione $-\cos(x^2+y^2)$ agli estremi di Γ, variazione nulla.
Il secondo integrale vale, servendosi delle rappresentazione di Γ

$$-\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \sin(t)[-\sin(t)]dt = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2(t)dt = \frac{1}{4}\pi$$

come era stato precedentemente trovato.
La Figura 2 mostra, con il metodo delle freccette, il campo $\left\{\frac{y}{x^2+y^2}\ ,0\right\}$ lungo Γ
Il senso delle freccette, coerente con la percorrenza di Γ giustifica il valore positivo trovato per il lavoro.

2. Esercizio

Sia

$$\overrightarrow{G}(x,y,z) = \left\{\frac{-4x}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3}, \quad 1\right\}$$

- *si dica in quale insieme $E \subseteq R^3$ il campo $\overrightarrow{G}$ é di classe C^1 e si dica se E é convesso oppure stellato, oppure né l'uno nell'altro,*
- *si verifichi se $\overrightarrow{G}$ é irrotazionale su E,*

- *si calcoli il lavoro del campo* $\overrightarrow{G}$ *lungo la circonferenza del piano* $z = 1$, *di centro* $(0,0,1)$ *e raggio* $r = 2$,
- *si determini un potenziale di* $\overrightarrow{G}$.

Soluzione:

Il campo $\overrightarrow{G}$ é definito e di classe C^1 nell'aperto

$$E \equiv \{(x,y,z) \in R^3, (x,y,z) \neq (0,0,z)\}$$

in altri termini tutto lo spazio R^3 privato dell'asse z.
Si tratta di un aperto non convesso e neppure stellato.

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{G}) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-4x}{(x^2+y^2)^3} & \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3} & 1 \end{pmatrix} = \{0,0,0\}$$

La circonferenza $\mathcal{C}$ assegnata ha equazioni parametriche

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = 1, \quad t \in [0, 2\pi]$$

il lavoro pertanto, supponendo di percorrerla nel tradizionale verso antiorario, é

$$\int_C \overrightarrow{G} \times \overrightarrow{T}\, ds = \int_0^{2\pi} \{-4\cos(t)[-\sin(t)] - 4\sin(t)\, \cos(t)\}\, dt = 0$$

La determinazione di un potenziale di $\overrightarrow{G}$ si ottiene:

- cercando le primitive rispetto ad x della prima componente
$$\int \frac{-4x}{(x^2+y^2)^3}\, dx = \frac{1}{x^2+y^2} + \varphi(y,z)$$
- determinando tra esse quelle che verificano la seconda condizione
$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{x^2+y^2} + \varphi(y,z)\right\} = \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3}$$
da cui
$$\frac{\partial}{\partial y}\{\varphi(y,z)\} = 0 \Rightarrow \varphi(y,z) = \psi(z)$$

- determinando $\psi(z)$ in modo da soddisfare la terza condizione
$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{x^2+y^2}+\psi(z)\right\}=1$$
da cui discende $\psi'(z)=1 \Rightarrow \psi(z)=z+c$

I potenziali di G sono pertanto le funzioni
$$U(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2}+z+c$$

3. Esercizio

Sia $S \equiv \{(x,y)\in R^2: \ 0<y<x\}$ *e sia* $\chi_S(x,y)$ *la sua funzione caratteristica: posto*
$$f(x,y)=x^2y, \quad h(x,y)=4+\chi_S(x,y)$$

- *si dica per quali motivi* f *ed* h *sono integrabili sul cerchio*
$$C\equiv\{(x,y)\in R^2: \quad x^2+y^2\leq 1\},$$
- *si calcolino*
$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iint_C h(x,y)\,dx\,dy.$$

Soluzione:

La funzione f, un polinomio, é integrabile nel cerchio in quanto funzione continua; la funzione h é anch'essa integrabile come somma di una costante, 4, e della funzione caratteristica χ_S di un insieme misurabile.

Per quanto concerne il primo integrale ci serviamo delle coordinate polari:
$$\iint_C x^2y\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\sin^2(\theta)\,\rho\cos(\theta)\,\rho\,d\rho=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\cos(\theta)\,d\theta\int_0^1\rho^4\,d\rho=0$$
Il risultato ottenuto era largamente prevedibile tenuto conto che la funzione $f(x,y)=x^2\,y$ é dispari rispetto ad y e l'integrale é relativo ad un dominio di integrazione, quel cerchio, simmetrico rispetto all'asse $y=0$.

Per quanto concerne il secondo si riconosce che

$$h(x,y) = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad 0 < y < x \\ 4 & \text{altrove} \end{cases}$$

Pertanto decomposto il cerchio C nella parte

$$C_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{0 < y < x\}$$

e nella parte residua $C_2 = C - C_1$ riesce

$$\int_C h(x,y)\,dx\,dy = 5\int_{C_1} dx\,dy + 4\int_{C_2} dx\,dy = 5\,\text{Area}(C_1) + 4\,\text{Area}(C_2) =$$

$$= 5\,\frac{\pi}{8} + 4\,\frac{7\pi}{8} = \frac{33}{8}\,\pi$$

4. Esercizio

Sia $f(x,y) = e^x \cos(y) + x$,

- *determinare dove* f *é di classe* C^1 *e determinare i suoi punti stazionari,*
- *dire se i punti trovati sono di massimo o minimo locale,*
- *dire perché* f *ammette massimo e minimo in* $Q \equiv [0,1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$ *e calcolare tali valori.*

Soluzione:

La funzione assegnata é definita e di classe C^1 in tutto il piano R^2 : i suoi punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^x \cos(y) + 1 & = 0 \\ -e^x \sin(y) & = 0 \end{cases} \rightarrow \sin(y) = 0,\ \cos(y) = \pm 1$$

Ne segue che si hanno soluzioni solo se

$$\cos(y) = -1, \quad \rightarrow \quad -e^x + 1 = 0,$$

soluzioni che quindi sono i seguenti punti dell'asse y

$$x = 0, \quad y = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Per classificare i punti stazionari trovati si deve studiare la forma quadratica

$$f_{xx}\,h^2 + 2 f_{xy}\,h\,k + f_{yy}\,k^2$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{cases} f_{xx} = & e^x \cos(y) & \rightarrow -1 \\ f_{xy} = & -e^x \sin(y) & \rightarrow 0 \\ f_{yy} = & -e^x \cos(y) & \rightarrow 1 \end{cases}$$

Nei punti stazionari trovati, vedi Figura 3, la forma quadratica é

$$-h^2 + k^2$$

non definita: si tratta pertanto sempre di *punti di sella*.

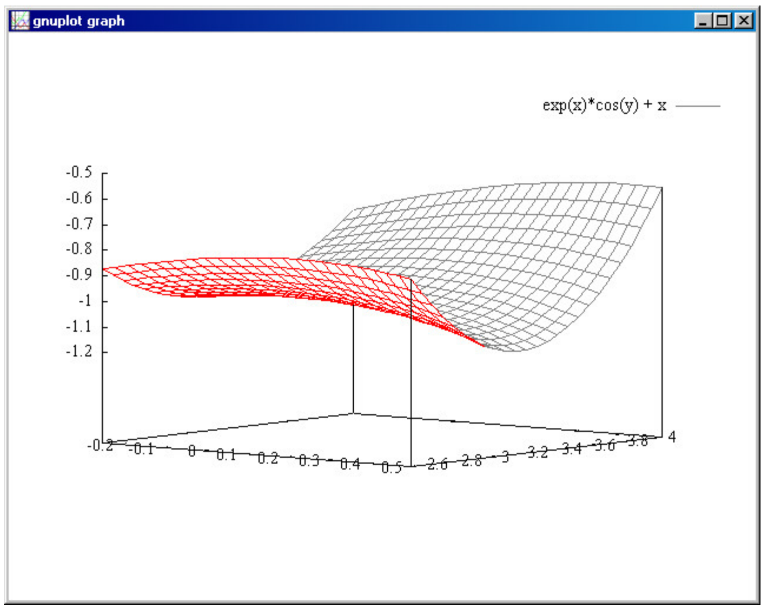


FIGURA 3. Il grafico di $e^x \cos(y) + x$ vicino al punto stazionario $(0, \pi)$, punto di sella.

Il rettangolo $Q \equiv [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$ assegnato é un insieme chiuso e limitato, la funzione f é continua e pertanto, per il teorema di Weierstrass esistono sia il massimo che il minimo.
Tali valori possono essere presi

- o in un punto interno a Q che sia stazionario per f
- o sulla frontiera ∂Q di Q

Dal momento che nessuno dei punti stazionari di f cade all'interno di Q il massimo e il minimo saranno valori assunti sulla frontiera ∂Q.
Studiamo la f sui quattro segmenti che formano ∂Q osservando, vedi Figura 4, che su ciascuno di tali segmenti la funzione f si comporta da funzione monotona,

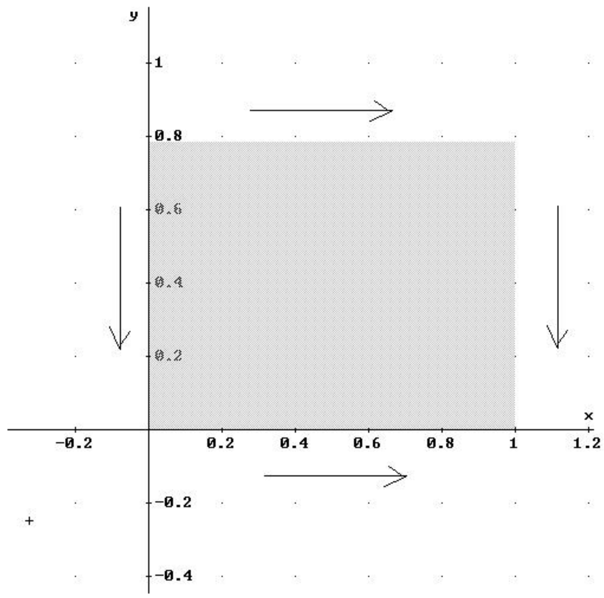


FIGURA 4. Le frecce indicano il verso secondo il quale f é crescente sui lati di Q

- $0 \leq x \leq 1, y = 0 : f = e^x + x$, minimo $= 1$, massimo $= e + 1$
- $x = 0, 0 \leq y \leq \pi/4 : f = \cos(y)$ minimo $= \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, massimo $= \cos(0) = 1$
- $x = 1, 0 \leq y \leq \pi/4 : f = e\cos(y) + 1$ minimo $= e\cos(\pi/4) + 1 = e\sqrt{2}/2 + 1$, massimo $= e\cos(0) + 1 = e + 1$
- $y = \pi/4, 0 \leq x \leq 1 : f = \sqrt{2}/2\, e^x + x$ minimo $= \sqrt{2}/2$, massimo $= e\sqrt{2}/2 + 1$

Si riconosce, vedi Figura 5, che il valore maggiore preso sulla frontiera é il valore

$$f(1, 0) = e + 1 \simeq 3.718$$

che pertanto rappresenta anche il massimo di f in Q.
Il valore minimo assunto sulla frontiera é il valore

$$f(0, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$$

che pertanto é il minimo di f in Q.

5. Esercizio

Posto

$$h(r, R) := \iint_C \frac{2|x| + 4|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

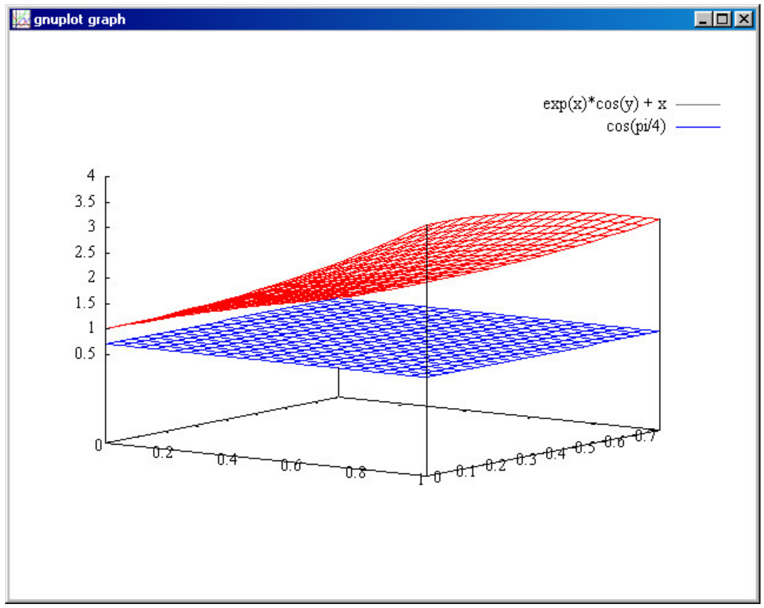


FIGURA 5. $e^x \cos(y) + x, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi/4$

essendo

$$C \equiv \left\{(x, y) \in R^2 : \ r < \sqrt{x^2 + y^2} < R\right\}, \quad 0 < r < R,$$

- *si calcoli* $h(r, R)$ *per ogni* $0 < r < R$ *fissati,*
- *si mostri che esiste finito il*

$$\lim_{r \to 0} h(r, R)$$

  per $R > 0$ *fissato,*
- *si mostri che*

$$\lim_{R \to +\infty} h(r, R) = +\infty$$

  per $r > 0$ *fissato.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'integrale doppio sulla corona circolare assegnata si calcola con le coordinate polari

$$h(r, R) := \iint_C \frac{2|x| + 4|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \frac{2\rho|\cos(\theta)| + 4\rho|\sin(\theta)|}{\rho} \rho d\rho =$$

$$\frac{1}{2}(R^2 - r^2)\int_0^{2\pi} [2|\cos(\theta)| + 4|\sin(\theta)|]d\theta = \frac{1}{2}A(R^2 - r^2)$$

avendo indicato con

$$A = \int_0^{2\pi} [2|\cos(\theta)| + 4|\sin(\theta)|]d\theta$$

Si noti come l'integrazione dei due moduli delle funzioni goniometriche su $[0.2\pi]$ corrisponde a quadruplicare il valore dell'integrazione sul primo quarto $[0.\pi/2]$, pertanto si ha

$$A = 4\int_0^{\pi/2} [2|\cos(\theta)| + 4|\sin(\theta)|]d\theta = \int_0^{\pi/2} [2\cos(\theta) + 4\sin(\theta)]d\theta = 24$$

da cui

$$h(r, R) = 12(R^2 - r^2)$$

Ne segue

$$\lim_{r\to 0} h(r, R) = 12\lim_{r\to 0}(R^2 - r^2) = 12\,R^2$$
$$\lim_{R\to +\infty} h(r, R) = 12\lim_{R\to +\infty}(R^2 - r^2) = +\infty$$

Parte 6

L'esame 2005

CAPITOLO 23

Esame di aprile

1 aprile 2005

1. Esercizio

- *Disegnare l'insieme* $E \equiv \{(x, y) \in R^2 : 2|x| + |y| \leq 8, \quad (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$,
- *disegnare gli insiemi di definizione delle funzioni*

$$F(x,y) = \frac{1+e^{x+y}}{x^2-y^2},\ G(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),\ H(x,y) = \frac{1}{\cos(x^2+y^2)}.$$

Soluzione:

L'insieme E, Figura 1, é determinato dall'intersezione della regione parallelogramma

$$2|x| + |y| \leq 8$$

e dal cerchio

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

I punti di intersezione, visibili in Figura 1, sono

$$(4,0), \quad \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad \left(\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

$\boxed{F(x,y)}$

Il dominio della funzione é tutto il piano R^2 privato dei punti $x^2 - y^2 = 0$ che annullano il denominatore: essi sono i punti delle due rette $y = x$ e $y = -x$

$\boxed{G(x,y)}$

Il dominio della funzione é tutto il piano R^2 privato dell'origine.

$\boxed{H(x,y)}$

Il dominio della funzione é tutto il pino R^2 privato delle infinite circonferenze

$$x^2 + y^2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

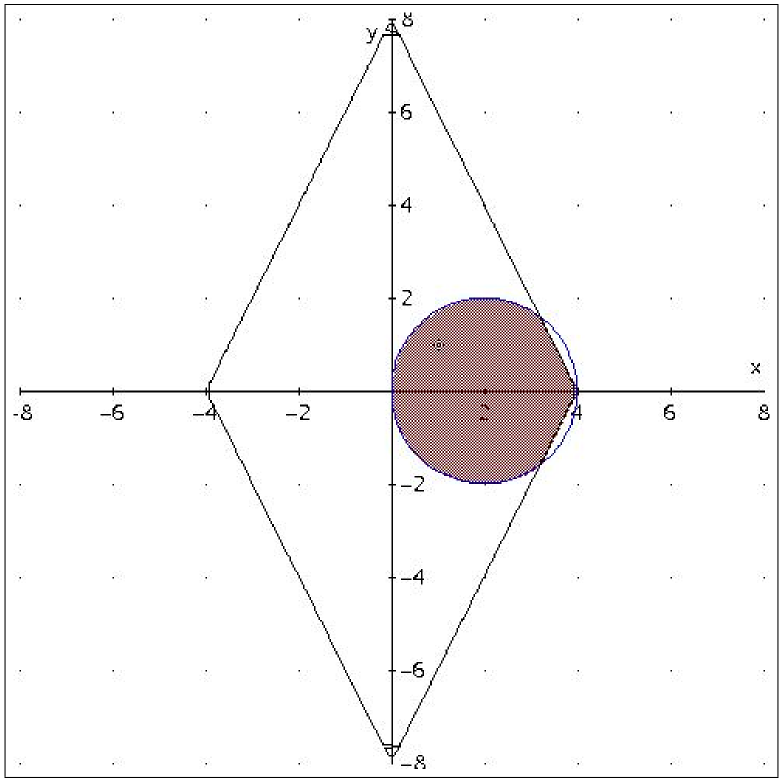


FIGURA 1. $E \equiv \{(x,y) \in R^2 : 2|x| + |y| \leq 8, \quad (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$,

2. Esercizio

- *Determinare le linee di livello* $z_0 = 0, \frac{1}{2}, 1$ per

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

- *sia* $g(x,y) = x^3 + y^5$, *determinare un vettore di norma 1 tangente alla linea di livello* $g(x,y) = 2$ *nel punto* $P = (1,1)$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} E &: \frac{1}{1+x^2+y^2} = 0 \quad \Rightarrow E := \varnothing \\ F &: \frac{1}{1+x^2+y^2} = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow F := \{x^2+y^2=1\} \\ G &: \frac{1}{1+x^2+y^2} = 1 \quad \Rightarrow G := \{(0,0)\} \end{aligned}$$

Il gradiente

$$\nabla g(x_0, y_0) = \{3x_0^2, 5y_0^4\}$$

fornisce un vettore ortogonale alla linea di livello passante per (x_0, y_0) :

$$\nabla g(1,1) := \{3,5\}$$

I vettori $\pm\{5,-3\}$ sono, in quanto ortogonali al gradiente nel punto $(1,1)$, tangenti alla linea di livello passante per tale punto.
I vettori

$$\pm\frac{1}{\sqrt{34}}\{5,-3\}$$

sono tangenti e di norma 1.

3. Esercizio

Assegnata $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2}$ *su* R^2

- *determinare i punti stazionari di* f*,*
- *classificare, come punti di massimo, minimo o sella, i punti trovati,*
- *determinare l'immagine di* f*.*

Soluzione:

I punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = & 0 \\ f_y(x,y) = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \{2x - 2x(x^2+y^2)\}\, e^{-x^2} = & 0 \\ 2ye^{-x^2} = & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0, \pm 1, \qquad y = 0$$

Per classificare i punti stazionari trovati ci si serve del determinante hessiano

$$H(x,y) = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$H(x,y) = \det\begin{pmatrix} (2 + 4\,x^4 - 2\,y^2 + 2\,x^2\,(-5 + 2\,y^2))\, e^{-x^2} & -4xye^{-x^2} \\ -4xye^{-x^2} & 2e^{-x^2} \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = 4, \quad H(\pm 1, 0) = \frac{-8}{e^2}$$

Nell'origine il determinante hessiano é positivo, negli altri due punti l'hessiano é negativo, quindi

- nell'origine, tenuto conto che $f_{xx}(0,0) > 0$, c'é un punto di minimo, con valore $f(0,0) = 0$
- negli altri due punti si hanno due selle, vedi Figura 2.

L'immagine di $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2}$ é formata da valori non negativi: tenuto conto che

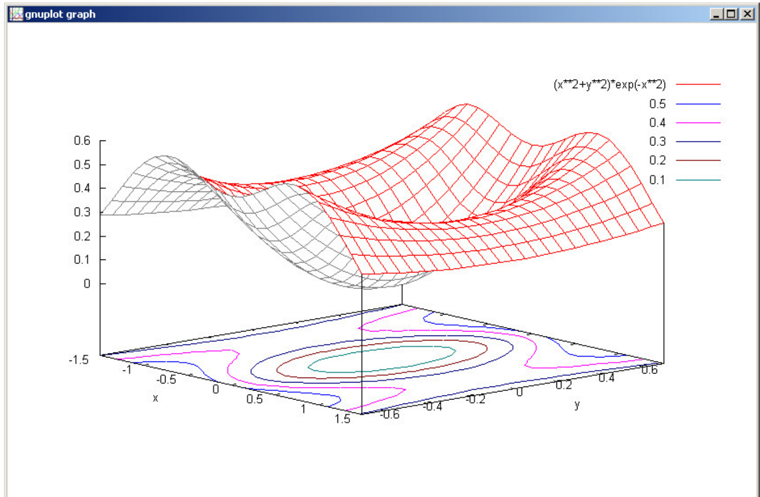


FIGURA 2. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2}$

- $f(0,0) = 0$
- $\lim\limits_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim\limits_{y\to+\infty} y^2 = +\infty$

si riconosce che l'immagine non puó che essere l'intero insieme R_+ dei reali non negativi.
Infatti per il teorema dei valori intermedi l'immagine della funzione f, continua in tutto il piano, é un intervallo che contenendo lo zero e contenendo numeri positivi comunque alti é l'insieme dei numeri reali non negativi.

4. Esercizio

Sia

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\{ x\, e^{-(x^2+y^2)} + \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad y\, e^{-(x^2+y^2)} \right\}$$

- *si dica in quale insieme $D \subseteq R^2$ il campo $\overrightarrow{F}$ é di classe C^1 e si dica se D é convesso oppure stellato, oppure né l'uno nell'altro,*
- *si verifichi se $\overrightarrow{F}$ é irrotazionale su D,*
- *calcolare il lavoro del campo $\overrightarrow{F}$ lungo l'arco di circonferenza Γ di centro l'origine, da $P = (0,-1)$ a $Q = (-1,0)$, percorso in verso orario.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il campo $\overrightarrow{F}$ é definito in D, tutto il piano R^2 privato dell'origine: si tratta di un aperto non convesso e neppure stellato.

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\,e^{-(x^2+y^2)} + \frac{x+y}{x^2+y^2} & y\,e^{-(x^2+y^2)} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{0, 0, -\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \neq 0$$

Il lavoro ℓ lungo l'arco di circonferenza assegnato, di equazioni parametriche

$$x = \cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad \theta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$$

percorso in senso orario si calcola al modo seguente

$$\ell = -\int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\left\{ \cos(\theta)\, e^{-1} + \frac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{1} \right\} \sin(\theta) + \sin(\theta)\, e^{-1} \cos(\theta) \right) d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) \right) d\theta = \frac{1}{4}\pi$$

5. Esercizio

Sia $E \equiv \{(x,y) \in R^2 : y \geq x^2,\ y < |x|\}$ verificare che E si puó rappresentare come insieme normale, e calcolare gli integrali

$$\iint_E dx\,dy, \quad \iint_E (x^3+y^2)dx\,dy, \quad \iint_E \frac{1}{1+x^2}\,dx\,dy.$$

Soluzione:

L'insieme E si rappresenta come dominio normale rispetto all'asse delle x al modo seguente

$$E :\equiv \left\{-1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq |x|\right\}$$

Il primo integrale, che rappresenta l'area di E si calcola al modo seguente

$$\iint_E dx\,dy, = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{|x|} dy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{3}$$

Il secondo integrale si riduce a

$$\iint_E (x^3+y^2)dx\,dy, = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} y^2 dy = \frac{1}{28}$$

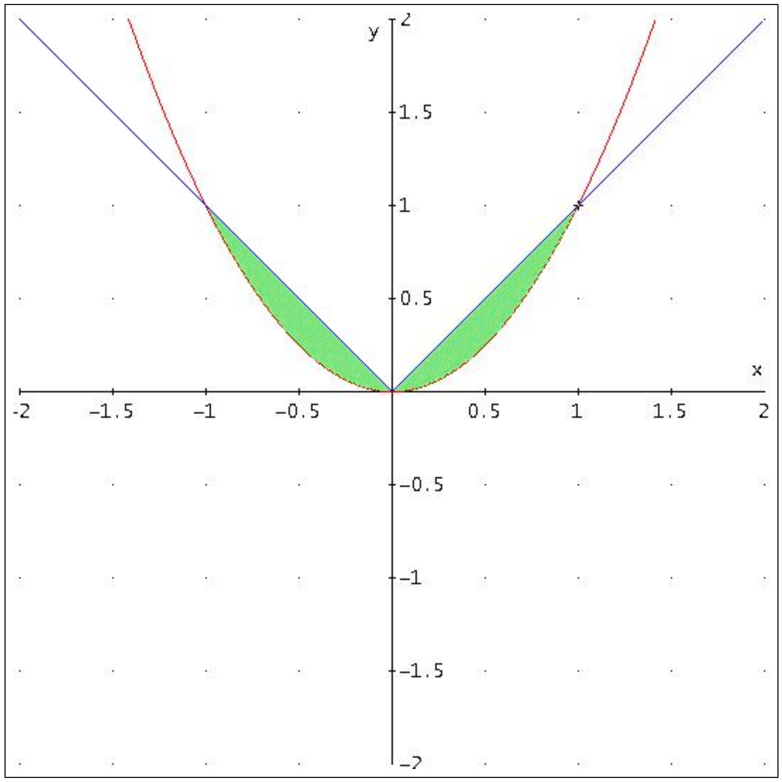


FIGURA 3. $E \equiv \{(x, y) \in R^2 : y \geq x^2,\ y < |x|\}$

avendo tenuto conto che l'addendo dispari x^3 ha certamente integrale nullo sull'insieme E simmetrico rispetto all'asse $x = 0$
Il terzo integrale

$$\iint_E \frac{1}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{|x|} \frac{1}{1+x^2} dy =$$
$$= 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{1}{1+x^2} dy = 2\int_0^1 \frac{x - x^2}{1+x^2} dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx + 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right) dx =$$
$$= \ln(2) + 2\arctan(1) - 2 = \ln(2) + \frac{1}{2}\pi - 2 \cong 0.2639$$

CAPITOLO 24

Esame di settembre

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI
Esame scritto
13 settembre 2005

1. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(1-x^2-y^2) & se \quad y \geq 0 \\ \\ \ln(1-x^2)+y & se \quad y < 0 \end{cases}$$

- *disegnare l'insieme di definizione,*
- *provare che f é continua nell'origine,*
- *esaminare se f é dotata delle due derivate parziali prime nell'origine.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le due espressioni che definiscono f sono entrambe continue fin sull'origine,

- la prima $\ln(1-x^2-y^2)$ é continua in tutto il cerchio $x^2+y^2 < 1$,
- la seconda $\ln(1-x^2)+y$ é continua nella striscia $-1 < x < 1$,

e prendono nell'origine lo stesso valore

$$\ln(1-0^2-0^2) = \ln(1-0^2)+0$$

pertanto la f é continua nell'origine.
Le derivate parziali nell'origine riguardano i limiti seguenti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1-h^2)}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1-h^2)}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(1-h^2)+h}{h} = 1$$

Il primo riconosce che esiste la derivata parziale rispetto ad x nell'origine e vale 0.

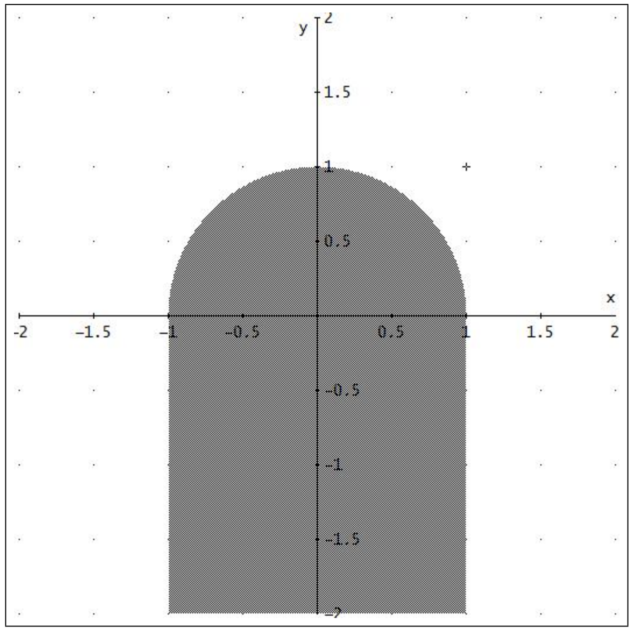


FIGURA 1. L'insieme di definizione di f, frontiera esclusa.

Il secondo e terzo limite invece riconoscono che non esiste la derivata parziale rispetto ad y nell'origine in quanto il limite da destra, 0, é diverso dal limite da sinistra, 1.

2. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E x^2y^2\,dx\,dy$$

essendo

$$E: \quad |x| + 2|y| \leq 4$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Tenuto conto della simmetria del dominio E, vedi Figura 2 a sinistra, e della funzione integranda x^2y^2 riesce

$$\iint_E x^2y^2\,dx\,dy = 4\iint_F x^2y^2\,dx\,dy$$

essendo F il triangolo di Figura 2 a destra.

$$4\iint_F x^2y^2\,dx\,dy = 4\int_0^2 y^2\,dy\,\int_0^{4-2y} x^2dx$$

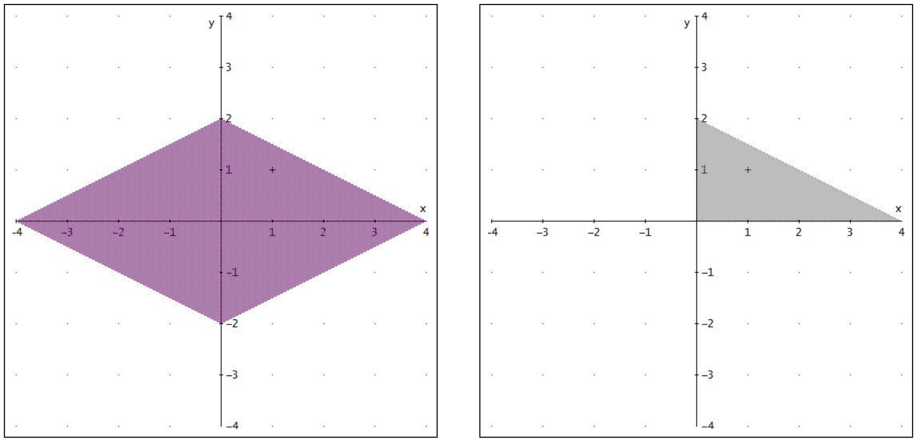


Figura 2. Il dominio di integrazione

Svolgendo i conti passo dopo passo si ha:

$$\int_0^{4-2y} x^2 dx = \frac{(4-2\,y)^3}{3}$$

$$y^2\left\{\frac{(4-2\,y)^3}{3}\right\} = \frac{64\,y^2}{3} - 32\,y^3 + 16\,y^4 - \frac{8\,y^5}{3}$$

$$\int_0^2 \frac{64\,y^2}{3} - 32\,y^3 + 16\,y^4 - \frac{8\,y^5}{3}\,dy = \frac{128}{45}$$

Da cui si ha riassumendo

$$\iint_E x^2y^2\,dx\,dy = 4\frac{128}{45} = \frac{512}{45} \simeq 11.3778$$

3. Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} (x+3y)\,ds$$

essendo $\mathcal{C}$ *la poligonale* $P_0P_1P_2$ *determinata dai punti*

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (1,1), \quad P_2 = (2,0)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La poligonale $\mathcal{C}$ assegnata é composta di due segmenti

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A}: & x = t, & y = t, & t \in [0,1] \\ \mathcal{B}: & x = 1+t, & y = 1-t, & t \in [0,1] \end{array}$$

L'integrale richiesto é pertanto

$$\int_{\mathcal{C}} (x+3y)\, ds = \int_{\mathcal{A}} (x+3y)\, ds + \int_{\mathcal{B}} (x+3y)\, ds$$

$$\int_{\mathcal{A}} (x+3y)\, ds = \int_0^1 (t+3t)\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}$$

$$\int_{\mathcal{B}} (x+3y)\, ds = \int_0^1 \left((1+t)+3(1-t)\right)\sqrt{2}dt = 3\sqrt{2}$$

Da cui, complessivamente

$$\int_{\mathcal{C}} (x+3y)\, ds = 5\sqrt{2}$$

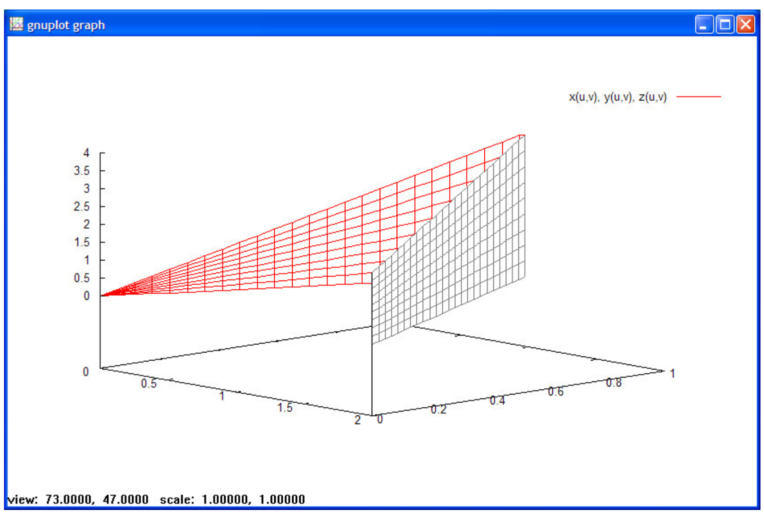


FIGURA 3.

L'integrale calcolato corrisponde all'area del muro elevato in corrispondenza della poligonale $\mathcal{C}$ e in ogni punto $(x, y) \in \mathcal{C}$ di altezza $h = x+3y$, vedi Figura 3.
La linearitá delle espressioni coinvolte fanno sí che il valore trovato sia esattamente la media delle altezze

$$\overline{h} = \overline{x} + 3\overline{y} = 1 + 3\frac{1}{2}$$

moltiplicata per la lunghezza $2\sqrt{2}$ della poligonale.

4. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$

- *determinare massimo e minimo di* f *nel rettangolo*
$$R: \quad -1 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq y \leq 1$$
- *detta* $g(x,y) = |\nabla f(x,y)|$ *il modulo del gradiente di* f *determinare il massimo e il minimo di* g *nello stesso* R.

Soluzione:

Prima domanda:

Punti critici interni a R:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x+1 & = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \\ f_y(x,y) = 2y & = 0 \quad y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$$

Lati della frontiera di R :

- orizzontali, superiore e inferiore: $x^2 + x + 1, \quad -1 \leq x \leq 4$
- verticale sinistro: $y^2, \quad -1 \leq y \leq 1$
- verticale destro: $y^2 + 17, \quad -1 \leq y \leq 1$

Sulla frontiera vengono presi solo valori non negativi quindi il valore

$$f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$$

é il minimo.
Per quanto concerne il massimo é facile riconoscere che i valori

$$f(4,1) = f(4,-1) = 21$$

rappresentano il massimo.

Seconda domanda:

$$g(x,y) = |\nabla f(x,y)| = \sqrt{(2x+1)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + y^2}$$

Si riconosce quindi che $g(x,y)$ rappresenta il doppio della distanza del punto (x,y) dal punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.
Il minimo e il massimo di g sono quindi

$$g(-\frac{1}{2}, 0) = 0, \quad g(4,1) = g(4,-1) = \sqrt{85}$$

Che il minimo di g in R fosse raggiunto nell'unico punto critico $(-\frac{1}{2}, 0)$ di f in R era ovvio....
In tale punto riesce $g = 0$ e g, in quanto modulo di un vettore, non puó assumere valori negativi !

5. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^2 + e^{y^2}$

- *determinare i punti stazionari di* f,
- *classificare tali punti,*
- *determinare il polinomio di Taylor di* f *del secondo ordine nell'origine.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x & = 0 \\ f_y(x,y) = 2y\, e^{y^2} & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = 0, \quad y = 0$$

Classificazione mediante il determinante hessiano:

$$H(x,y) = \det \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (2+4y^2)e^{y^2} \end{vmatrix}$$

da cui, nell'origine $H(0,0) = 4$, punto di minimo.
Polinomio di Taylor di secondo ordine nell'origine:

$$P(x,y) =$$
$$= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\} =$$
$$= 1 + x^2 + y^2$$

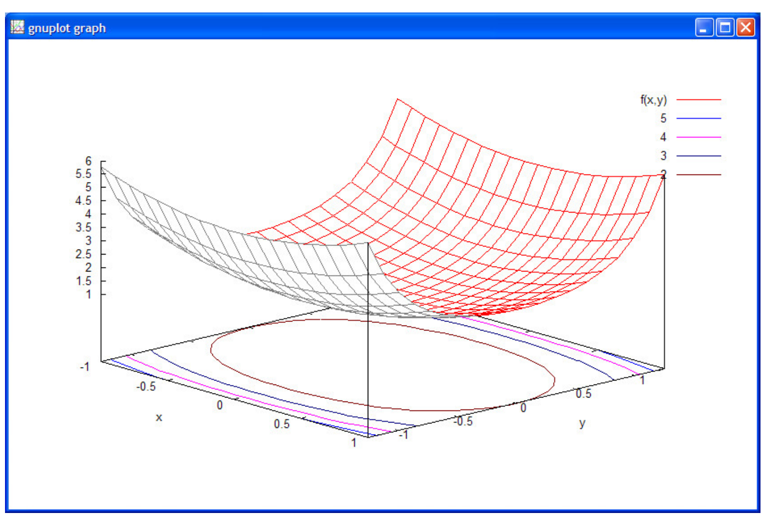


FIGURA 4. $f(x,y) = x^2 + e^{y^2}$

Il polinomio era riconoscibile a vista tenuto conto che

- il polinomio relativo all'addendo x^2 era... x^2 stesso,
- il polinomio relativo all'addendo e^{y^2} era ($e^x = 1 + x + ...$) $1 + y^2$.

Parte 7

Le esercitazioni 2006

CAPITOLO 25

Foglio 1

1. Esercizio

Data la successione

$$P_n = \left(n\,\sin(\frac{1}{n}), \cos(\frac{\pi}{2}n)\,e^{-n}\right) \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

- *calcolare (calcolatrice) esplicitamente i primi* 5 *punti,*
- *esaminare se é convergente.*

Soluzione:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(1\,\sin(\tfrac{1}{1}), \cos(\tfrac{\pi}{2}1)\,e^{-1}\right) = && (0.8414709848, 0)\\
P_2 &= \left(2\,\sin(\tfrac{1}{2}), \cos(\tfrac{\pi}{2}2)\,e^{-2}\right) = && (0.9588510772, -0.1353352832)\\
P_3 &= \left(3\,\sin(\tfrac{1}{3}), \cos(\tfrac{\pi}{2}3)\,e^{-3}\right) = && (0.9815840903, 0)\\
P_4 &= \left(4\,\sin(\tfrac{1}{4}), \cos(\tfrac{\pi}{2}4)\,e^{-4}\right) = && (0.9896158370, 0.01831563888)\\
P_5 &= \left(5\,\sin(\tfrac{1}{5}), \cos(\tfrac{\pi}{2}5)\,e^{-5}\right) = && (0.9933466539, 0)
\end{aligned}$$

La successione $\{P_n\} = (x_n, y_n)$ é convergente se e solo se sono convergenti entrambe le successioni

$$x_n = n\,\sin(\frac{1}{n}) \qquad y_n = \cos(\frac{\pi}{2}n)\,e^{-n} \quad n = 1, 2, 3...$$

La prima successione

$$x_n = n\,\sin(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

é convergente a 1 ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$$

La seconda successione é convergente a 0 in quanto

$$|y_n| = \left|\cos(\frac{\pi}{2}n)\,e^{-n}\right| \le e^{-n}$$

2. Esercizio

Data la la successione

$$P_n = \left(\cos(\frac{n}{2}\,\pi), \frac{n(n+1)}{n^2+1}\right) \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

- *dire se é limitata,*
- *dire se é convergente,*
- *trovare i punti di frontiera dell'insieme* $E = \{P_n |\ n = 1, 2, 3, ...\}$
- *dire se* E *é chiuso.*

Soluzione:

Prima domanda:

La successione $\{P_n\}$ é limitata se e solo se sono limitate entrambe le successioni

$$\left\{\cos(\frac{n}{2}\,\pi)\right\} \qquad \left\{\frac{n(n+1)}{n^2+1}\right\} \quad n = 1, 2, 3...$$

Per la prima é ovvio che

$$\left|\cos(\frac{n}{2}\,\pi)\right| \leq 1$$

Per la seconda basta notare che

$$n(n+1) = n^2 + n \leq n^2 + n^2 = 2n^2 < 2(n^2+1)$$

per riconoscere che

$$\left|\frac{n(n+1)}{n^2+1}\right| < \left|\frac{2n^2}{n^2+1}\right| = 2$$

Seconda domanda:

Tenuto conto che la successione

$$\left\{\cos(\frac{n}{2}\,\pi)\right\} = \{0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1, ...\}$$

non é convergente si deduce che neanche la $\{P_n\}$ puó esserlo.

Terza domanda:

L'insieme E formato dai punti $P_1,\ P_2,\ P_3, ...$ é formato da infiniti punti isolati del piano $\mathbb{R}^2$: essi sono tutti punti di frontiera di E.
Sono punti di frontiera di E anche i tre punti seguenti

$$A = (-1, 1), \quad B = (0, 1), \quad C = (1, 1)$$

limiti delle tre sottosuccessioni di $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ seguenti

$$\begin{array}{ll} \{P_2,\, P_6,\, P_{10}, ...\} = & \{(-1, y_{4n-2})\} \\ \{P_1,\, P_3,\, P_5, ...\} = & \{(0, y_{2n-1})\} \\ \{P_4,\, P_8\, P_{12}, ... = & \{(1, y_{4n})\} \end{array}$$

E non possiede punti interni.

Terza domanda:

E non é chiuso perché non include i tre punti di frontiera A, B, C indicati sopra.

Osservazione 2.1. *L'insieme E dei punti $\{P_n\}$ di una successione convergente a un limite L non costituisce un insieme chiuso se i punti limiti di qualunque sottosuccessione non appartiene alla successione stessa.*

3. Esercizio

Data la la successione $P_n = (x_n, y_n)$ con $P_1 = (1,\, 1)$ definita per ricorrenza al modo seguente

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{5}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n + 2y_n}{5} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- *dire se é limitata,*
- *dire se é convergente,*
- *trovare i punti di frontiera dell'insieme $E = \{P_n|\ n = 1, 2, 3, ...\}$*
- *dire se E é chiuso.*

Soluzione:

Prima domanda:

Si riconosce, ragionando per induzione che riesce

$$|x_n| \leq 1, \quad |y_n| \leq 1 \qquad \forall n$$

Infatti

- $|x_1| \leq 1, \quad |y_1| \leq 1$
- ammesso che $|x_n| \leq 1, \quad |y_n| \leq 1$ segue che

$$|x_{n+1}| \leq \frac{1 + 3\,.\,1}{5} = \frac{4}{5} \leq 1, \quad |y_{n+1}| = \frac{2\,.\, + 2\,.\,1}{5} = \frac{4}{5} \leq 1$$

Quindi la successione $\{P_n\}$ assegnata ricorsivamente é limitata

$$\|P_n\| \leq \sqrt{2}$$

Seconda domanda:

Lo stesso ragionamento precedente permette di riconoscere che

$$\{|x_n| \leq M, |y_n| \leq M\} \quad \to \quad \left\{|x_{n+1}| \leq \frac{4}{5}M, |y_{n+1}| \leq \frac{4}{5}M\right\}$$

Ne viene quindi che

$$|x_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n, \quad |y_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

quindi la successione $\{P_n\}$ é convergente a $O = (0,0)$

Terza domanda:

Tutti i punti P_1, P_2, $P_3, \ldots$ sono punti di frontiera di E.
Anche l'origine $O = (0,0)$ in quanto limite della successione é punto di frontiera di E.

E non possiede punti interni.

Quarta domanda:

E non é chiuso perché non contiene l'origine $O = (0,0)$, punto limite della successione P_1, P_2, $P_3, \ldots$

Osservazione 3.1. *La successione P_1, P_2, $P_3, \ldots$ é null'altro che*

$$\left\{(1,1), \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\left(\frac{4}{5}\right)^2, \left(\frac{4}{5}\right)^2\right), \left(\left(\frac{4}{5}\right)^3, \left(\frac{4}{5}\right)^3\right), \ldots.\right\}$$

4. Esercizio

Sia E il rettangolo determinato da

$$0 \leq x < 1, \quad -2 \leq y \leq 3$$

indicare quali siano i punti interni, esterni e di frontiera.

Soluzione:

Sono interni tutti (e soli) i punti (x,y) tali che

$$0 < x < 1, \quad -2 < y < 3$$

Sono esterni i punti che non appartengono al rettangolo

$$\{F : 0 \leq x \leq 1, \quad -2 \leq y \leq 3\}$$

in altri termini i punti esterni ad E sono il complementare $\mathcal{C}F$ di F.

La frontiera di E é formata dai quattro segmenti che lo delimitano, ovvero

$$\{x = 0, -2 \leq y \leq 3\}\,,\ \{x = 1, -2 \leq y \leq 3\}\,,$$
$$\{0 \leq x \leq 1, , -2 = y\}\,,\ \{0 \leq x \leq 1, y = 3\}$$

5. Esercizio

Sia $E = \{(t, 1-t) |\, t \in [0, 1]\}$

- *disegnare l'insieme* E,
- *esaminare se é chiuso e/o se é aperto,*
- *determinare la sua frontiera.*

Soluzione:

L'insieme E é il segmento di estremi $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$
Si tratta di un insieme chiuso (il suo complementare é infatti un aperto).
Tutti i suoi punti sono punti di frontiera.

6. Esercizio

Disegnare i sottinsiemi del piano

$$\begin{array}{l} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \leq 1 \\ |2x + 3y - 1| \leq 2 \end{array}$$

Soluzione:

Vedi Figura 1, Figura 2, Figura 3.

7. Esercizio

Disegnare l'insieme E *definito dal seguente sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ 1 < (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$$

indicare quali siano i punti interni, esterni e di frontiera.

Soluzione:

L'insieme E definito dal sistema é, per definizione l'intersezione dei due insiemi

$$\left\{x^2 + y^2 \leq 16\right\} \cap \left\{1 < (x-1)^2 + y^2\right\}$$

Il primo insieme é il cerchio di centro l'origine $O = (0.0)$ e raggio 4.

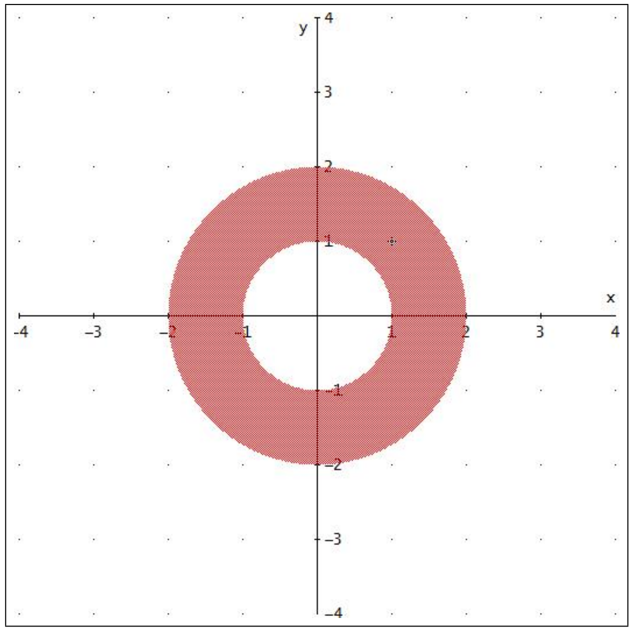


Figura 1. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

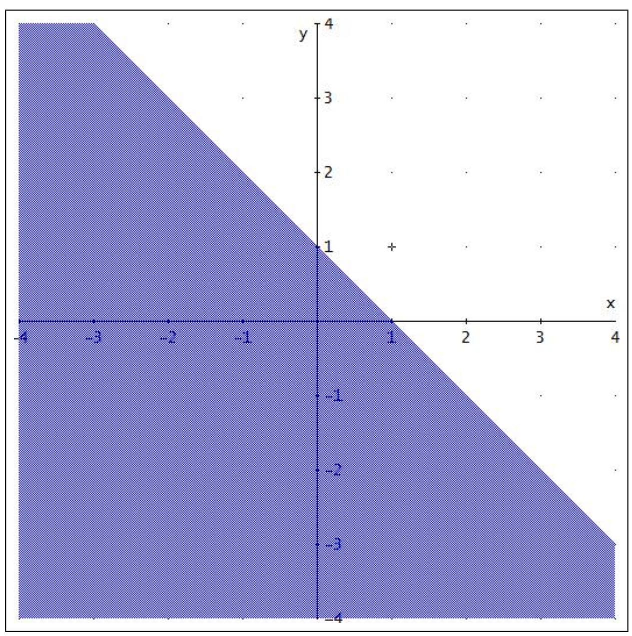


Figura 2. $x + y \leq 1$

Il secondo é il complementare del cerchio di centro $U = (1, 0)$ e raggio 1.

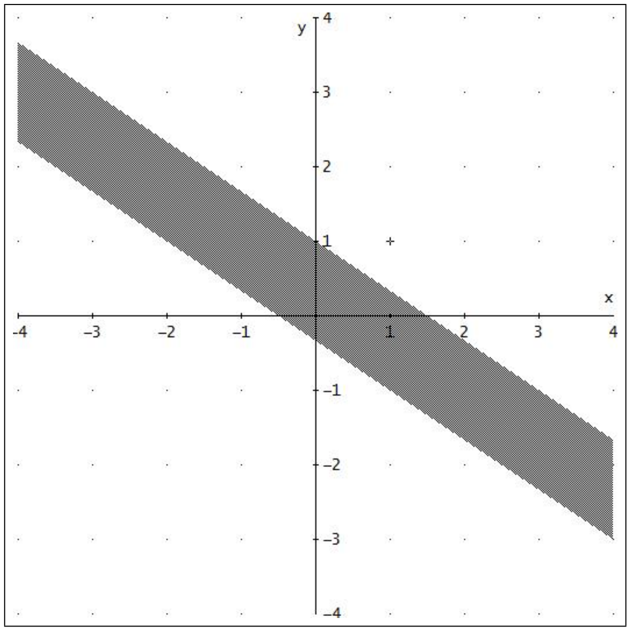


FIGURA 3. $|2x + 3y - 1| \leq 2$

L'intersezione richiesta consiste nel cerchio di centro l'origine e raggio 4 privato (bucato) del cerchio di centro $U = (1, 0)$ e raggio 1, vedi Figura 4.

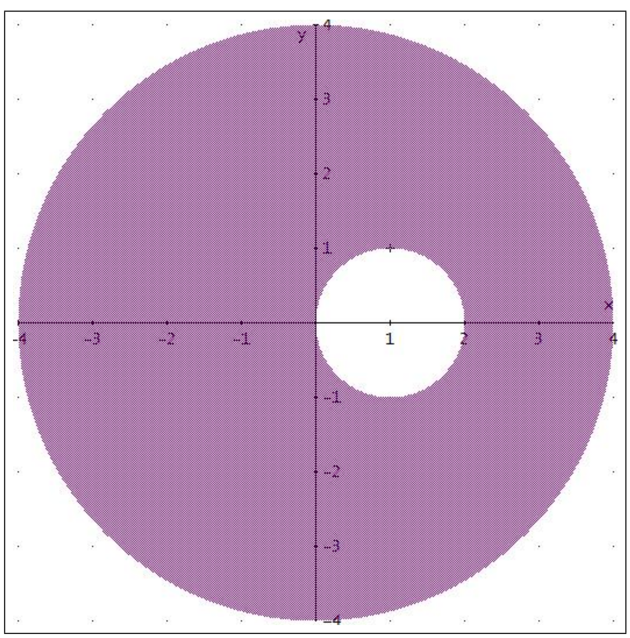


FIGURA 4. L'insieme E definito dal sistema dell'Es. 1.7.

I punti di E non appartenenti alla circonferenza

$$x^2 + y^2 = 16$$

sono i punti interni ad E
I punti esterni ad E sono i punti interni al *buco*

$$(x-1)^2 + y^2 < 1$$

e quelli esterni al cerchio maggiore, cioé i punti (x, y) tali che

$$x^2 + y^2 > 16$$

I punti di frontiera di E sono i punti delle due circonferenze

$$x^2 + y^2 = 16, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

8. Esercizio

Disegnare l'insieme

$$E_r : \quad \{|x+y| > 4\} \cup \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

e indicare per quali r l'insieme E_r é connesso per poligonali.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Gli insiemi E_r (il plurale si riferisca la fatto che cambiando r cambia l'insieme E_r) sono costruiti unendo

- il complementare di una striscia
- cerchi di centro l'origine e raggio r

Piú il raggio é piccolo piú il cerchietto non raggiunge il complementare della striscia, e quindi E_r non é connesso, piú il raggio cresce piú il cerchio raggiunge il complementare della striscia, ed E diventa connesso: vedere le Figure 5, 6, 7.
La soglia per r affinché E_r sia connesso é $2\sqrt{2}$.

9. Esercizio

Indicare almeno due esempi per ciascuna delle seguenti classi di insiemi

- *aperti e non limitati,*
- *chiusi e non limitati,*
- *chiusi privi di punti interni,*
- *non connessi per poligonali,*
- *aperti e chiusi.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

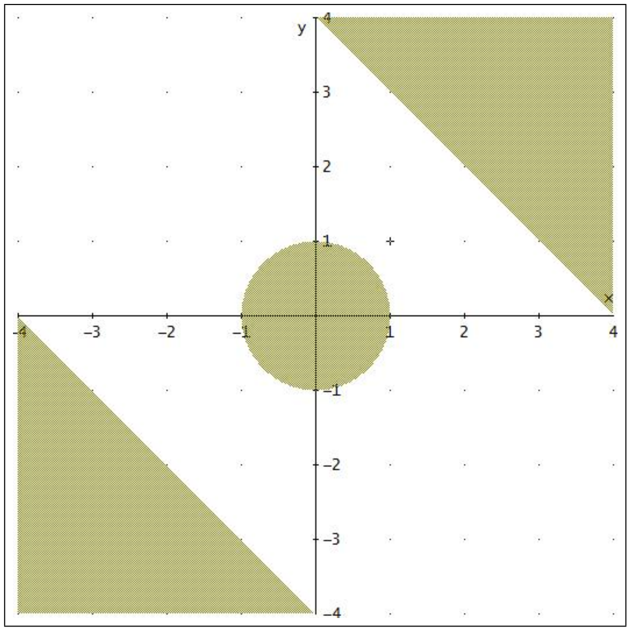


FIGURA 5. E_1 : il complementare della striscia e il cerchio con $r = 1$

- un semipiano aperto (cioé privato della retta che lo delimita), ad esempio $E : y > o$
- un semipiano chiuso, ad esempio $F : y \geq 0$
- un segmento estremi inclusi (vedi Esercizio 1.5)
- uno degli E_r del precedente esercizio con $r < 2\sqrt{2}$
- tutto $\mathbb{R}^2$ e l'insieme vuoto $\varnothing$ (questi sono i soli insiemi aperti e chiusi contemporaneamente)

10. Esercizio

Disegnare gli insiemi di definizione delle funzioni

$$\log(x^2 + y^2 + 2x - 1), \quad \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + x + y}}$$

e riconoscere, per ciascuno se si tratta di

- *insiemi aperto o meno,*
- *limitato o illimitato.*

Soluzione:

- $x^2 + y^2 + 2x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2 > 0 \quad \rightarrow$ $(x + 1)^2 + y^2 > 2$, vedi Figura 8

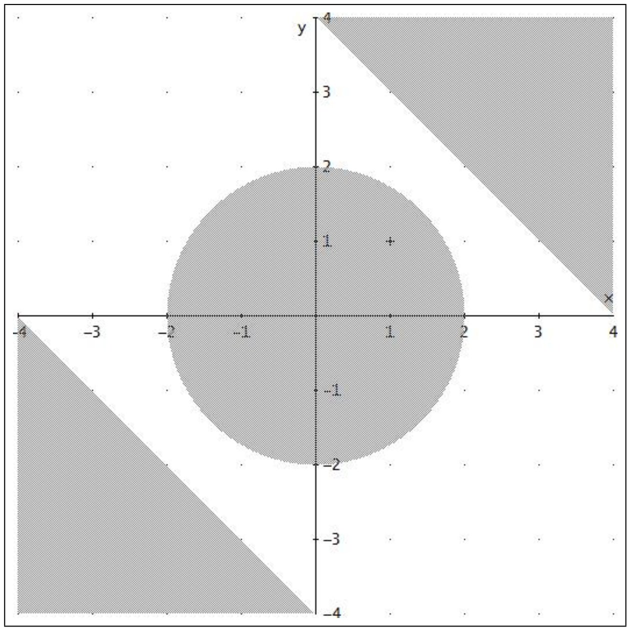


FIGURA 6. E_2 : il complementare della striscia e il cerchio con $r = 2$

- $x^2 - y^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x - y)(x + y) \geq 0$, unione di semipiani, vedi Figura 9
- $1 + x + y > 0$, un semipiano aperto, vedi Figura 10

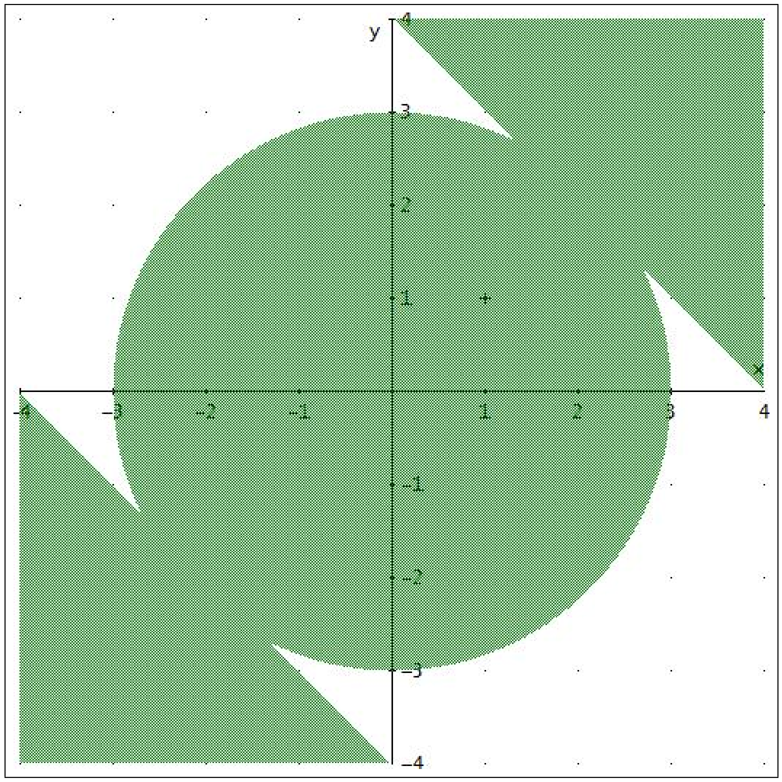


FIGURA 7. E_3 : il complementare della striscia e il cerchio con $r = 3$

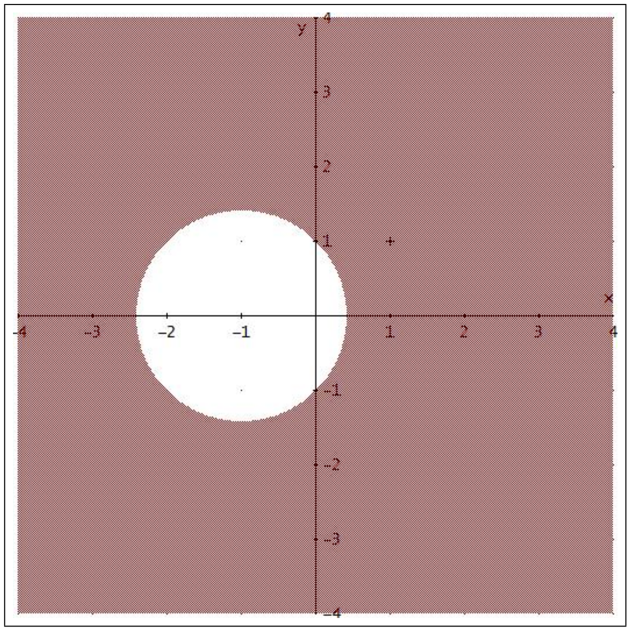


FIGURA 8. Insieme di definizione di $\log(x^2 + y^2 + 2x - 1)$

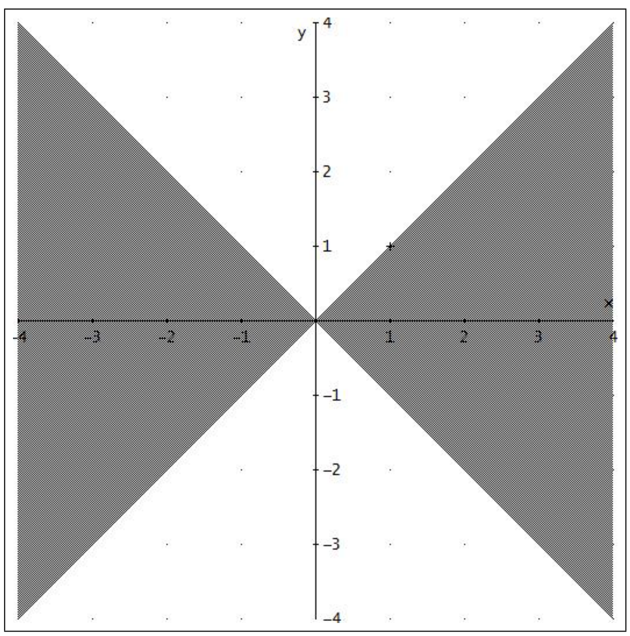


FIGURA 9. Insieme di definizione di $\sqrt{x^2 - y^2}$

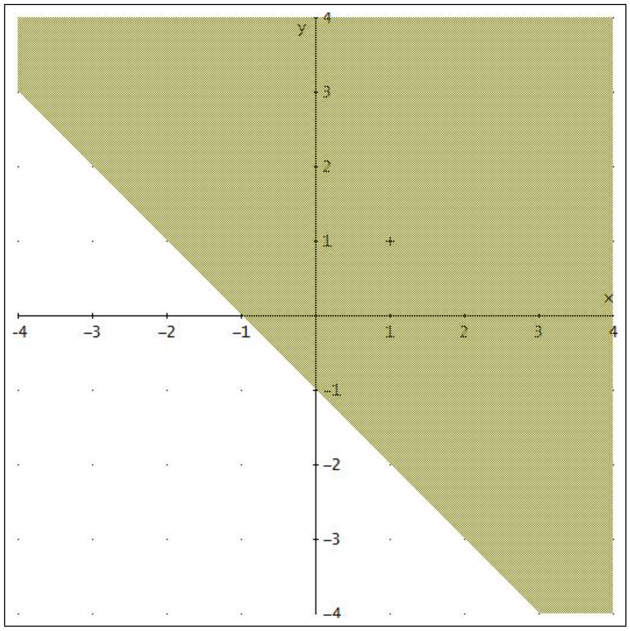


FIGURA 10. Insieme di definizione di $\frac{1}{\sqrt{1+x+y}}$

CAPITOLO 26

Foglio 2

1. Esercizio

Siano A i seguenti insiemi

$$2x + 3y + 4 \geq 0, \qquad x^2 + y^2 - 2y < 8, \qquad x\,y \leq 0$$

- *determinare* $\mathcal{F}(A)$
- *determinare* $\overline{A}$ e $\mathring{A}$,
- *riconoscere che riesce* $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\overline{A}) = \mathcal{F}(\mathring{A})$

avendo indicato, come di consueto, rispettivamente con $\mathcal{F}(A)$, $\mathring{A}$ e $\overline{A}$ la frontiera, l'interno (insieme dei punti interni) e la chiusura di A.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- $A: \quad 2x + 3y + 4 \geq 0$
  Si tratta di un semipiano chiuso:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(A) & = \{2x + 3y + 4 = 0\} \\ \overline{A} & = A \\ \mathring{A} & = \{2x + 3y + 4 > 0\} \\ \mathcal{F}(\overline{A}) & = \{2x + 3y + 4 = 0\} \\ \mathcal{F}(\mathring{A}) & = \{2x + 3y + 4 = 0\} \end{cases}$$

- $A: \quad x^2 + y^2 - 2y < 8$
  Si tratta del cerchio aperto: $x^2 + (y-1)^2 < 3^2$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(A) & = \{x^2 + y^2 - 2y = 8\} \\ \overline{A} & = \{x^2 + y^2 - 2y \leq 8\} \\ \mathring{A} & = A \\ \mathcal{F}(\overline{A}) & = \{x^2 + y^2 - 2y = 8\} \\ \mathcal{F}(\mathring{A}) & = \{x^2 + y^2 - 2y = 8\} \end{cases}$$

- $A: \quad x\,y \leq 0$
  Si tratta di due quadranti chiusi:
$$\begin{cases} \mathcal{F}(A) & = \{x=0\} \cup \{y=0\} \\ \overline{A} & = A \\ \overset{\circ}{A} & = \varnothing \\ \mathcal{F}(\overline{A}) & = \{x=0\} \cup \{y=0\} \\ \mathcal{F}(\overset{\circ}{A}) & = \varnothing \end{cases}$$

Osservazione 1.1. *La coincidenza osservata nei primi due dei tre esempi precedenti*
$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\overline{A}) = \mathcal{F}(\overset{\circ}{A})$$
non é generale, come del resto si riconosce nel terzo
$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\overline{A}) \neq \mathcal{F}(\overset{\circ}{A})$$
Nell'esercizio seguente, ad esempio, si incontra un insieme nel quale
$$\mathcal{F}(A) \neq \mathcal{F}(\overline{A}) \neq \mathcal{F}(\overset{\circ}{A})$$

2. Esercizio

Sia Q l'insieme dei numeri razionali e sia
$$E = Q \times Q \subseteq \mathbb{R}^2$$
l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ a coordinate razionali.
Dimostrare che
$$\overset{\circ}{E} = \varnothing, \quad \overline{E} = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}(E) = \mathbb{R}^2$$
avendo indicato, come di consueto, rispettivamente con $\overset{\circ}{E}$ e con $\overline{E}$ l'interno di E e la sua chiusura.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- $\overset{\circ}{E} = \varnothing$: non esiste alcun punto interno ad E.
  In ogni cerchio $\mathcal{C}$ infatti cadono sia punti a coordinate razionali che punti a coordinate irrazionali, quindi non puó riuscire mai $\mathcal{C} \subseteq E$
- $\overline{E} = \mathbb{R}^2$: ogni punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ di coordinate anche non razionali é limite di successioni $\{(x_n, y_n)\}$ a coordinate razionali, $\{(x_n, y_n)\} \in E \subseteq \overline{E}$.
  Tenuto conto che la chiusura di $\overline{E}$ implica
$$\{(x_n, y_n)\} \in \overline{E} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) \in \overline{E}$$

ne segue quindi che $(\overline{x}, \overline{y}) \in \overline{E}$.

- $\mathcal{F}(E) = \mathbb{R}^2$: consideriamo un qualsiasi punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, sia a coordinate razionali che non, e sia D un cerchio di centro $(\overline{x}, \overline{y})$.
  In D cadono inevitabilmente sia punti (x, y) di coordinate razionali che non razionali.
  Quindi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{F}(E)$

3. Esercizio

Assegnato $E \subseteq \mathbb{R}^2$ siano

$$A \in E, \qquad B \notin E$$

Dimostrare che sul segmento AB si trova (sempre) almeno un punto $Q \in \mathcal{F}(E)$.
Determinare per quali sottinsiemi $F \subseteq \mathbb{R}^2$ riesce $\mathcal{F}(F) = \varnothing$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Dette (a_1, a_2) le coordinate di A e (b_1, b_2) quelle di B i punti (x, y) del segmento AB sono espressi parametricamente da

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + t(a_2 - a_1) \\ y(t) = b_1 + t(b_2 - b_1) \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

Sia $K \subseteq [0, 1]$ l'insieme dei numeri t tali che

$$t \in K \quad \to \quad (x(t), y(t)) \in E.$$

K é limitato e non vuoto infatti $0 \in K$: indichiamo con $\lambda \in [0, 1]$ l'estremo superiore[1] di K.

Il punto $(x(\lambda), y(\lambda))$ é punto di frontiera per E (e per $\mathcal{C}E$).
Infatti

- se $\lambda = 0$ vuol dire che tutti i punti del segmento AB con $t > 0$ non appartengono a E e quindi

  $$A = (x(0), y(0)) \in E \quad \to \quad A \in \mathcal{F}E$$

- se $0 < \lambda < 1$ analogamente
  - ci sono punti $(x(t), y(t))$ con $t < \lambda$ e vicino a λ quanto si vuole appartenenti ad E
  - i punti $(x(t), y(t))$ con $t > \lambda$ appartengono a $\mathcal{C}E$,

  quindi $(x(\lambda), y(\lambda)) \in \mathcal{F}E$

[1] Usiamo il teorema fondamentale della teoria dei numeri reali che assicura che ogni insieme non vuoto e limitato di numeri reali é dotato di estremo superiore.

- se $\lambda = 1$ esistono $(x(t), y(t))$ con $t < 1$ e vicino a 1 quanto si vuole appartenenti ad E e $(x(1), y(1)) = B \notin E$ quindi $(x(1), y(1)) \in \mathcal{F}E$

É evidente che il procedimento precedente conduce all'esistenza di punti di frontiera per tutti gli insiemi F per i quali si possano trovare due punti $A \in F, \quad B \notin F$.
L'esistenza di tali due punti viene a mancare solo se

$$F = \varnothing \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{C}F = \varnothing$$

Quindi gli unici insiemi F privi di punti di frontiera sono l'insieme vuoto $\varnothing$ e tutto il piano $\mathbb{R}^2$.

4. Esercizio

Determinare le immagini del quadrato

$$Q : -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

tramite le funzioni $f(x, y)$ *seguenti*

$$\log(1 + |x| + |y|), \qquad \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \qquad e^{-(x^2+y^2)}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

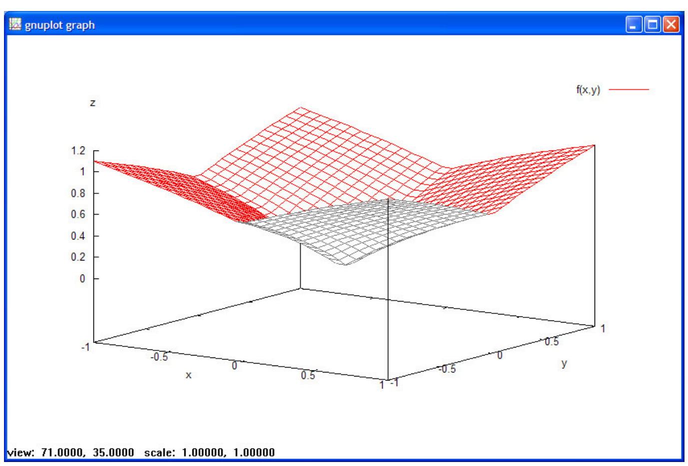


FIGURA 1. $f(x, y) = \log(1 + |x| + |y|)$

Il quadrato Q assegnato é un insieme

- convesso, quindi connesso per poligonali,
- chiuso e limitato,

le funzioni assegnate sono continue

QUINDI

le immagini di Q tramite tali funzioni sono intervalli $[m,\, M]$ chiusi e limitati determinati dal minimo m e dal massimo M che ciascuna di tali funzioni prende in Q.

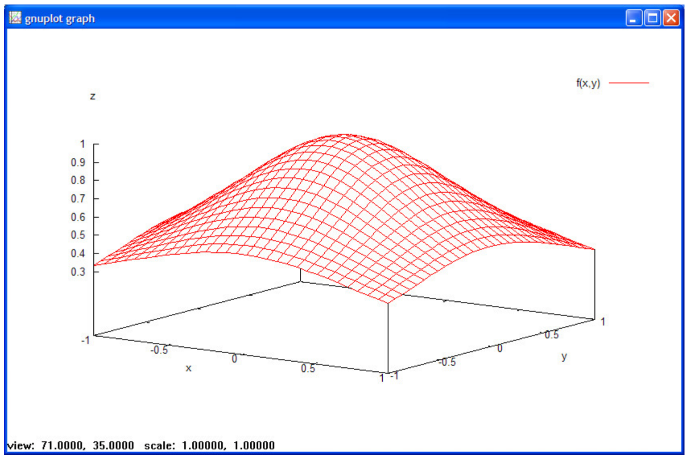


FIGURA 2. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

- $\log(1+|x|+|y|) \quad \to \quad [\log(1),\, \log(1+1+1)] = [0, \log(3)]$
- $\dfrac{1}{1+x^2+y^2} \quad \to \quad [\frac{1}{1+1+1},\, \frac{1}{1+0+0}] = [\frac{1}{3}, 1]$
- $e^{-(x^2+y^2)} \quad \to \quad [e^{-(1+1)}\, e^0] = [e^{-2}, 1]$

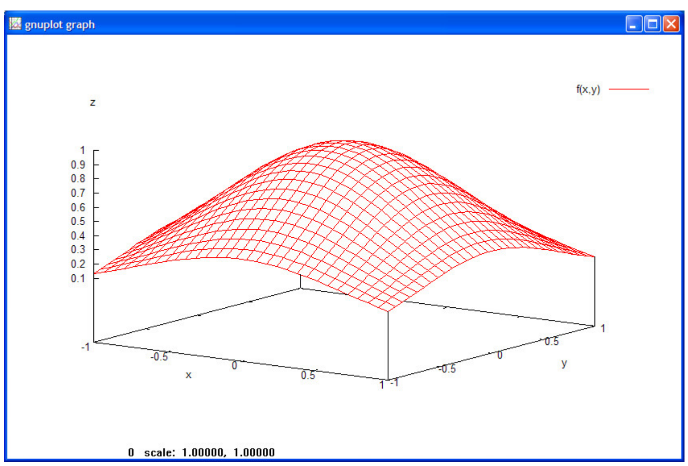


FIGURA 3. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Osservazione 4.1. *Le istruzioni GnuPlot per realizzare il grafico di Figura 1*

```
gnuplot> f(x,y) = log(1 + abs(x)+abs(y))
gnuplot> set xrange [-1:1]
gnuplot> set yrange [-1:1]
gnuplot> set isosamples 30,30
gnuplot> set xlabel "x"
gnuplot> set ylabel "y"
gnuplot> set zlabel "z"
gnuplot> splot f(x,y)
```

5. Esercizio

Disegnare le linee di livello $f(x,y) = k$, $k = 0, 1, 2$ *relative alle tre seguenti funzioni* f

$$\sqrt{x^2 - y^2}, \quad 2\cos(3x + 5y), \quad \log(5 - x^2 - y^2).$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\sqrt{x^2 - y^2} = k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = k^2$$

Una coppia di rette per $k = 0$ e due iperboli, vedi Figura 4.

$$\begin{cases} 2\cos(3x + 5y) = 0 \to \cos(3x + 5y) = 0 \to 3x + 5y = (2n + 1)\frac{1}{2}\pi \\ 2\cos(3x + 5y) = 1 \to \cos(3x + 5y) = \frac{1}{2} \to 3x + 5y = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi \\ 2\cos(3x + 5y) = 2 \to \cos(3x + 5y) = 1 \to 3x + 5y = 2n\pi \end{cases}$$

Si tratta di famiglie di rette parallele tra loro.

$$\begin{cases} \log(5 - x^2 - y^2) = 0 \to & 5 - x^2 - y^2 = 1 & \to x^2 + y^2 = 4 \\ \log(5 - x^2 - y^2) = 1 \to & 5 - x^2 - y^2 = e & \to x^2 + y^2 = 5 - 2 \\ \log(5 - x^2 - y^2) = 2 \to & 5 - x^2 - y^2 = e^2 & \to x^2 + y^2 = 5 - e^2 \end{cases}$$

Si tratta di famiglie di circonferenze.
Il terzo insieme di livello é... $\varnothing$: la funzione $\log(5 - x^2 - y^2)$ prende solo valori minori o uguali a $\log(5) \simeq 1,609$.

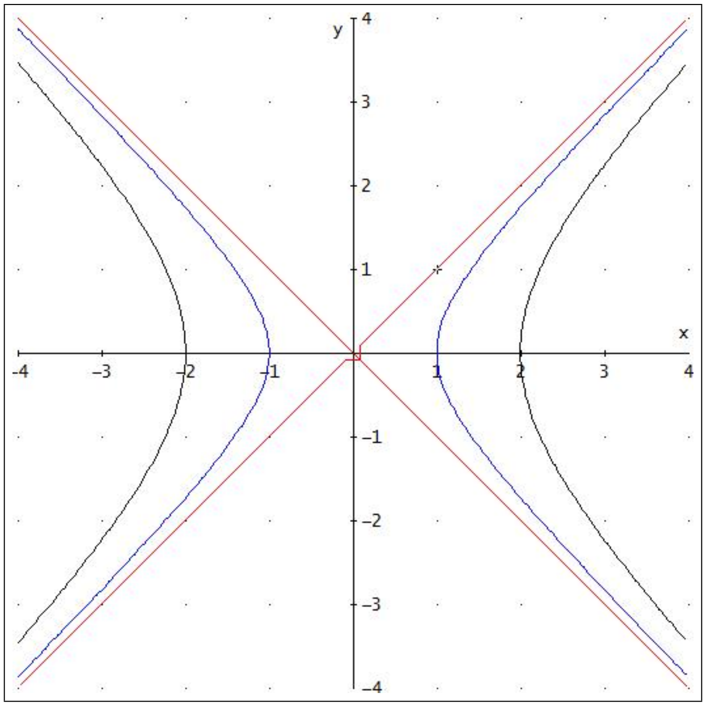


FIGURA 4. $x^2 - y^2 = k^2, \quad k = 0, 1, 2$

6. Esercizio

Esaminare quali delle seguenti funzioni sono prolungabili con continuitá fin sull'origine

$$\frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \qquad \frac{|y|-x^2}{|y|+x^2}, \qquad \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Soluzione:

Le quattro funzioni indicate sono tutte non definite, per via del denominatore, nell'origine.
L'esercizio chiede se si possa, per ciascuna di tali f, scegliere un valore da assegnare come $f(0,0)$ in modo da realizzare una funzione f definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

- $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ non é prolungabili, vedi Dispense.
- $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ non é prolungabile: sugli assi vale 0, lungo i punti della parabola $y = x^2$ vale invece sempre $1/2$

- $\dfrac{|y|-x^2}{|y|+x^2}$ non é prolungabile, sull'asse y, $x=0$ vale 1 mentre sull'asse x, $y=0$ vale -1
- $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ tenuto conto che
$$|x\,y| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$
si ha
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x|$$
espressione sempre piú vicina a 0 quanto piú $(x,y) \simeq (0,0)$
Quindi la funzione é prolungabile per continuitá nell'origine attribuendole in tale punto il valore $f(0.0)=0$.

7. Esercizio

Determinare due polinomi P in x e y che prendano nei tre punti $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$ *rispettivamente i valori*
$$P(A)=1, \quad P(B)=2, \quad P(C)=3$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Cerchiamo un primo polinomio nella forma piú semplice, quella di un polinomio di primo grado
$$P(x,y)=\alpha\,x+\beta\,y+\gamma$$
scegliendo i coefficienti in modo da soddisfare nei tre punti A, B, C le condizioni imposte.
Ne deriva, sostituendo, il sistema per i coefficienti α, β, γ
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & + & \gamma & = & 1\\ \alpha & & & + & \gamma & = & 2\\ & & \beta & + & \gamma & = & 3\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=2\\ \gamma=1\end{array}\right.$$
Il polinomio
$$P(x,y)=x+2\,y+1$$
é un polinomio che risolve l'esercizio.
Ce ne sono altri, non due ma addirittura infiniti altri: basta aggiungere a $P(x,y)$ polinomi del tipo
$$\mathcal{R}(x,y)=x\,y\;Q(x,y)$$

essendo $Q(x,y)$ un qualsiasi polinomio: l'espressione $\mathcal{R}(x,y)$ proposta infatti vale zero nei tre punti A, B, C assegnati e quindi anche le somme

$$P(x,y)+\mathcal{R}(x,y)$$

continuano a valere nei tre punti A, B, C rispettivamente 1, 2, 3

8. Esercizio

Sia $\{P_n\}$ la successione

$$\Big((-1)^n,\ \cos(n\frac{\pi}{4})\Big), \quad n=1,2,3...$$

- *verificare che $\{P_n\}$ é limitata,*
- *verificare che $\{P_n\}$ non é convergente,*
- *trovare almeno due sottosuccessioni di $\{P_n\}$ convergenti a limiti diversi.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Per riconoscere che $\{P_n\}$ é limitata occorre e basta riconoscere che sono limitate le due successioni

$$x_n=(-1)^n, \qquad y_n=\cos(n\frac{\pi}{4})$$

cosa evidente.
La limitatezza della $\{P_n\}$ garantisce[2] che essa possiede sottosuccessioni convergenti.

$\{P_n\}$ é convergente se e solo se sono convergenti entrambe le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$: cosa che non avviene perché la prima

$$\{x_n\}=\{-1,\ 1,\ -1,\ 1,....\}$$

evidentemente non converge.

Due sottosuccessioni della $\{P_n\}$ convergenti sono certamente

$$\{P_2,\ P_6,\ P_{10},\ P_{14},...\}=\{(1,0),(1,0),(1,0),(1,0)...\}$$

$$\{P_1,\ P_9,\ P_{17},\ P_{25},...\}=\left\{(-1,\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-1,\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-1,\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-1,\frac{1}{\sqrt{2}}),\ ....\right\}$$

Si tratta di due successioni costanti che, ovviamente hanno come limite il loro valore costante:

- la prima quindi converge a $(1,0)$,
- la seconda converge a $(-1,\frac{1}{\sqrt{2}})$.

[2]Teorema di Bolzano.

9. Esercizio

Rappresentare parametricamente la frontiera del triangolo di vertici

$$A = (0,0), \quad B = (1,1), \quad C = (5,0)$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Rappresentiamo separatamente i tre segmenti lati

$$AB: \begin{cases} x_1(t) = t \\ y_1(t) = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$$BC: \begin{cases} x_2(t) = t \\ y_2(t) = 2 - t \end{cases} \quad t \in [1,2]$$

$$CA: \begin{cases} x_3(t) = 4 - t \\ y_3(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [2,4]$$

Una rappresentazione della frontiera del triangolo é pertanto

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & se & t \in [0,1] \\ x_2(t) & se & t \in [1,2] \\ x_3(t) & se & t \in [2,4] \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} y_1(t) & se & t \in [0,1] \\ y_2(t) & se & t \in [1,2] \\ y_3(t) & se & t \in [2,4] \end{cases}$$

con $t \in [0,4]$.

10. Esercizio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle funzioni

$$\cos(x\,y), \quad \sin^2(x^2 + y^2)$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Le derivate prime di $\cos(x\,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos(x\,y) = -y\sin(x\,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\cos(x\,y) = -x\sin(x\,y)$$

Le derivate seconde di $\cos(x\,y)$ sono le derivate prime delle derivate prime:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\cos(x\,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\sin(x\,y)\right) = -y^2\,\cos(x\,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cos(x\,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\sin(x\,y)\right) = -y\sin(x\,y) - y\,x\,\cos(x\,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\cos(x\,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\sin(x\,y)\right) = -x^2\,\cos(x\,y)$$

Riesce (come accade quasi sempre)

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cos(x\,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\cos(x\,y)$$

Per la seconda funzione $\sin^2(x^2+y^2)$ i calcoli sono analoghi e portano a

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin^2(x^2+y^2) = 4\,x\,\cos(x^2+y^2)\,\sin(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin^2(x^2+y^2) = 4\,y\,\cos(x^2+y^2)\,\sin(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\sin^2(x^2+y^2) = 8\,x^2\cos(x^2+y^2)^2 + 4\,\cos(x^2+y^2)\,\sin(x^2+y^2) - 8\,x^2\sin(x^2+y^2)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\sin^2(x^2+y^2) = 8\,x\,y\cos(x^2+y^2)^2 - 8\,x\,y\sin(x^2+y^2)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\sin^2(x^2+y^2) = 8\,y^2\cos(x^2+y^2)^2 + 4\,\cos(x^2+y^2)\,\sin(x^2+y^2) - 8\,y^2\sin(x^2+y^2)^2$$

OSSERVAZIONE 10.1. *Il calcolo delle derivate, anche di espressioni molto semplici quali* $\sin^2(x^2+y^2)$, *diviene rapidamente complesso in conseguenza di prodotti e di funzioni composte.*
Esistono ottimi software che eseguono tali calcoli formali con lo stesso vantaggio che le ordinarie calcolatrici offrono per i calcoli numerici.
Le derivate prime e seconde di $\sin^2(x^2+y^2)$ *sono state eseguite servendosi di* Mathematica, *software disponibile fra l'altro su tutti i computer della rete 151.100 della Facoltá di Scienze della Sapienza.*
É bene abituarsi a servirsi di tali strumenti come pure a ricorrere a siti Web importanti: tra questi certamente

http://mathworld.wolfram.com

vera enciclopedia interattiva della matematica.

11. Esercizio

Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$$

definire un'espressione per $f(x, y)$ *nella corona* $1 < x^2+y^2 < 4$ *in modo da prolungare* f *per continuitá in tutto* $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

La funzione f é assegnata nel complementare della corona $1 < x^2 + y^2 < 4$ ed é assegnata come funzione radiale associata a

$$g(r) = \begin{cases} r^2 & se \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \\ \frac{1}{r^2} & se \quad r > 2 \end{cases}$$

Basta definire $g(r)$ per $r \in [1, 2]$ come

$$g(r) = 1 - \frac{3}{4}(r - 1)$$

per definire la g in modo continuo su tutto $r \geq 0$

Il prolungamento F per continuitá di f che ne segue é quindi

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ \\ 1 - \frac{3}{4}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right) & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \\ \dfrac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

Naturalmente la scelta fatta non é l'unica: si potevano raccordare i valori di f definendola nella corona $1 < x^2+y^2 < 4$ in tanti altri modi. L'unica condizione irrinunciabile é che

- nella circonferenza interna, la $x^2 + y^2 = 1$ l'espressione assegnata deve valere 1,
- sulla circonferenza esterna $x^2 + y^2 = 4$ l'espressione assegnata deve valere $1/4$.

CAPITOLO 27

Foglio 3

1. Esercizio

Posto $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$, *determinare*

- *l'insieme di definizione,*
- *l'insieme in cui* f *é continua,*
- $f_x(x,y), \quad f_y(x,y)$
- $\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$, *vedi Dispense pag. 102.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La funzione $f(x,y)$ assegnata é radiale, indicato con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ riesce

$$f(x,y) = \log(r^2) = 2\,\log(r)$$

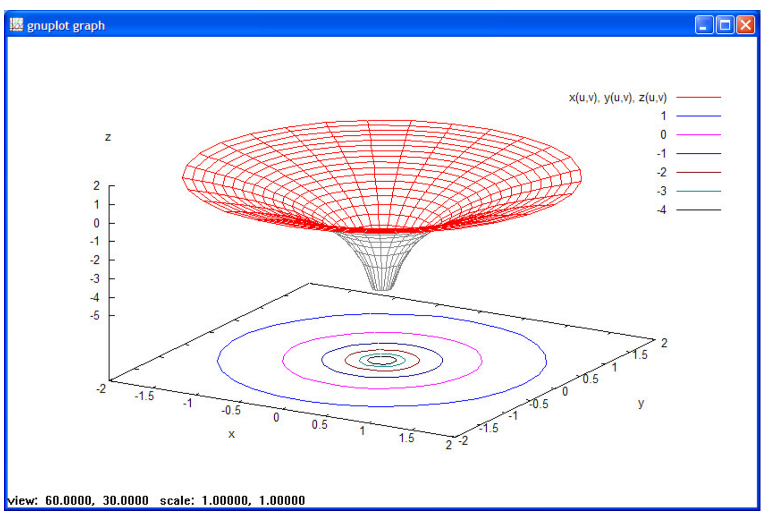


FIGURA 1. La superficie di rotazione $z = \log(x^2+y^2)$

- L'insieme di definizione richiede
$$x^2+y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \neq (0,0)$$
ed é quindi $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

- f é continua in tutto l'insieme di definizione in quanto funzione composta di

$$\begin{array}{ll} (x,y) \to x^2+y^2 & \textit{continua in tutto } \mathbb{R}^2 \\ t \to \log(t) & \textit{continua in tutto } \mathbb{R}_+ := \{(t>0)\} \end{array}$$

  Non é prolungabile sull'origine tenuto conto che $\log(t)$ diverge negativamente per $t \to 0$

- $$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\log(x^2+y^2) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{2x}{x^2+y^2} = \dfrac{-2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ f_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{2y}{x^2+y^2} = \dfrac{2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

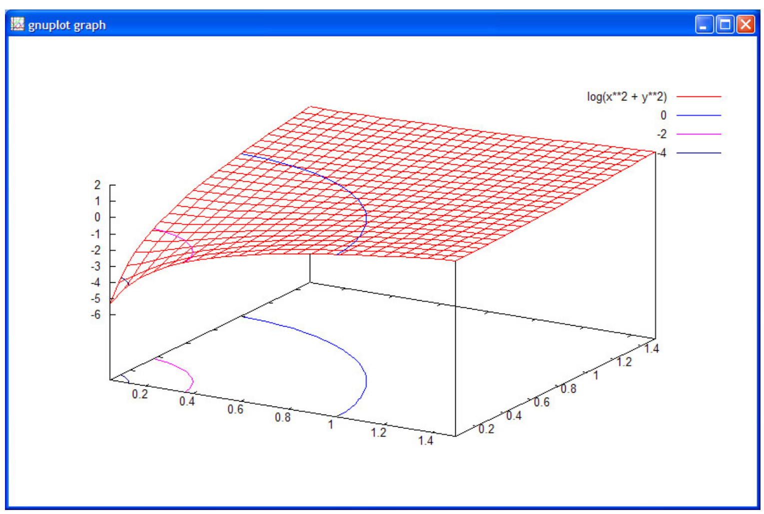


FIGURA 2. Una parte del grafico della funzione armonica $\log(x^2+y^2)$

$$\triangle f(x,y) = \frac{-2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Immaginate, vedi Figura 2, il profilo altimetrico corrispondente a qualche circonferenza interna al primo quadrante del piano $x\,y$: la media m delle quote raggiunte in corrispondenza ai punti della circonferenza é strettamente legata al valore di f nel centro, proprietá tipica delle funzioni armoniche.

2. Esercizio

Posto

$$f(x,y) = e^{\dfrac{1}{xy}}$$

- *determinare l'insieme di definizione,*
- *esaminare se f é prolungabile con continuitá a tutto* $\mathbb{R}^2$
- *calcolare* $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$
- *disegnare il gradiente* $\nabla f(x,y)$ *in corrispondenza ai* 4 *punti* $(\pm 1,\ \pm 1)$,
- *determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f in corrispondenza al punto* $(1, 1, f(1,1))$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

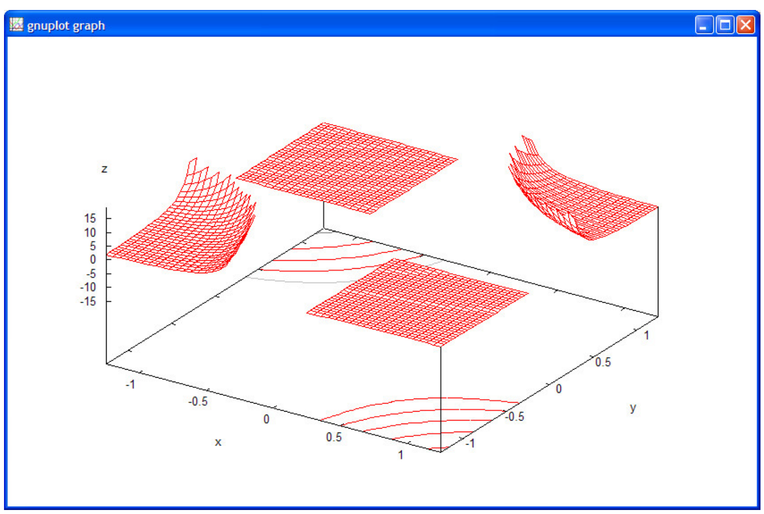


FIGURA 3. Parte del grafico di $z = e^{\frac{1}{xy}}$

La funzione assegnata é composta dalle tre seguenti:

$$\begin{array}{lcl} (x,y) & \rightarrow & x\,y \\ t & \rightarrow & \dfrac{1}{t} \\ \tau & \rightarrow & e^{\tau} \end{array}$$

- tenuto conto che la seconda delle tre funzioni che costituiscono la f é definita solo per $t \neq 0$ allora la f sará definita in

$$E := \{ (x, y) | \quad x\,y \neq 0\}$$

tutto il piano $\mathbb{R}^2$ privato degli assi.

Il grafico, vedi Figura 3, tiene conto di quanto accade nei quattro quadranti:

  - nel secondo ($x < 0$, $y > 0$) e nel quarto ($x > 0$, $y < 0$) il prodotto $x\,y$ é negativo, tale sará il suo reciproco $1/(xy)$ e la f, esponenziale di tale reciproco, $0 < f \leq 1$ sará tanto piú vicina a zero quanto piú tale reciproco sará grande e negativo;
  - situazione del tutto diversa nel primo e terzo quadrante dove il prodotto xy e quindi il suo reciproco sono positivi e tanto piú grandi quanto piú ci si avvicina agli assi, altrettanto grande sará f.

Il fenomeno, riconoscibile in Figura 3, é quindi quello di due quadranti, primo e terzo, in cui si vede una divergenza verso l'alto, e quello di due altri, secondo e quarto, in cui sembra di vedere due piani orizzontali, in realtá situati a quote tra 0 e 1.

- Le considerazioni precedenti escludono la possibilitá di prolungare per continuitá la f fin sugli assi: da uno dei due semipiani determinati da ciascun asse si incontra divergenza di f.
-

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\dfrac{1}{xy}}\right) = e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy}\right) = -e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{1}{x^2y}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\dfrac{1}{xy}}\right) = e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{xy}\right) = -e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{1}{xy^2}$$

-

$$\nabla\, e^{\dfrac{1}{xy}} = \left\{ -e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{1}{x^2y},\; -e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{1}{xy^2} \right\} = -e^{\dfrac{1}{xy}}\frac{1}{x\,y}\left\{\frac{1}{x},\; \frac{1}{y}\right\}$$

$$\begin{array}{llll}
A=(1,1) & \rightarrow \nabla f(A)= & -e^{\frac{1}{1}}\frac{1}{1}\left\{\frac{1}{1},\ \frac{1}{1}\right\} & = \quad -e\{1,1\} \\
B=(-1,1) & \rightarrow \nabla f(B)= & e^{\frac{1}{-1}}\frac{1}{1}\left\{\frac{1}{-1},\ \frac{1}{1}\right\} & = \quad e^{-1}\{-1,1\} \\
C=(-1,-1) & \rightarrow \nabla f(C)= & -e^{\frac{1}{1}}\frac{1}{1}\left\{\frac{1}{-1},\ \frac{1}{-1}\right\} & = \quad e\{1,1\} \\
D=(1,-1) & \rightarrow \nabla f(D)= & e^{\frac{1}{-1}}\frac{1}{1}\left\{\frac{1}{1},\ \frac{1}{-1}\right\} & = \quad e^{-1}\{1,-1\}
\end{array}$$

I gradienti in A e in C *puntano* verso l'origine, direzione di massima salita passeggiando sul grafico di f, quelli in B e D *puntano*, per lo stesso motivo, nella direzione opposta.

Quanto sono grandi, in modulo, i 4 gradienti ?
$e\sqrt{2}$ quelli in A e in C, molto meno, $\sqrt{2}/e$, quelli in B e in C : il grafico, vedi Figura 3 faceva prevedere tale fenomeno....

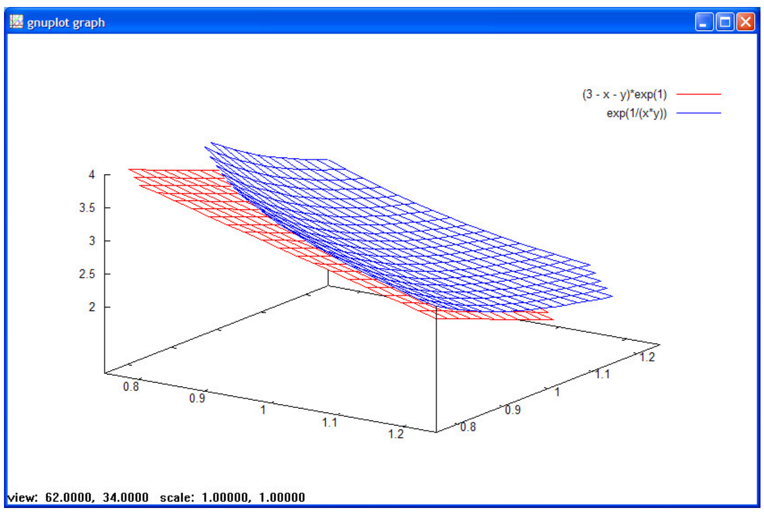


FIGURA 4. Parte del grafico di f e del piano tangente

- Piano tangente in $A = (1,1)$, vedi Figura 4:

$$z = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + f(1,1)$$

$$z = -e(x-1) - e(y-1) + e = (3-x-y)e$$

3. Esercizio

Posto

$$f(x,y) = \frac{x^2y + y^3}{x^2 + y^2}$$

- *determinare l'insieme di definizione,*

- *prolungare f nell'origine attribuendole il valore $f(0,0)$ per continuitá,*
- *scrivere i rapporti incrementali nell'origine e determinare con essi $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- La funzione assegnata é definita in tutto R^2 privato dei punti (x,y) nei quali il denominatore x^2+y^2 vale zero.
  Pertanto l'insieme E di definizione é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
- Tenuto conto che fuori dall'origine riesce

$$f(x,y) = \frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2} = y\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = y \tag{1}$$

  funzione quest'ultima continua in tutto $\mathbb{R}^2$ si riconosce che f é
  - prolungabile per continuitá a tutto $\mathbb{R}^2$,
  - il valore $f(0,0)$ deve essere il valore 0.
-
$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \to \quad f_x(0,0) = 0$$
$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad \to \quad f_y(0,0) = 1$$
  I risultati ottenuti sono in linea, vedi la (1), con la coincidenza in tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ della funzione razionale assegnata con il polinomio $P = y$ che ha, infatti, in ogni punto
$$P_x = 0, \quad P_y = 1$$

4. Esercizio

Sia $E : x\,y \geq 1$ calcolare l'immagine $f(E)$ di E tramite le funzioni

- $f(x,y) = x$
- $f(x,y) = x+1$
- $f(x,y) = x+y$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'insieme E é

- chiuso,
- non limitato,
- non connesso per poligonali.

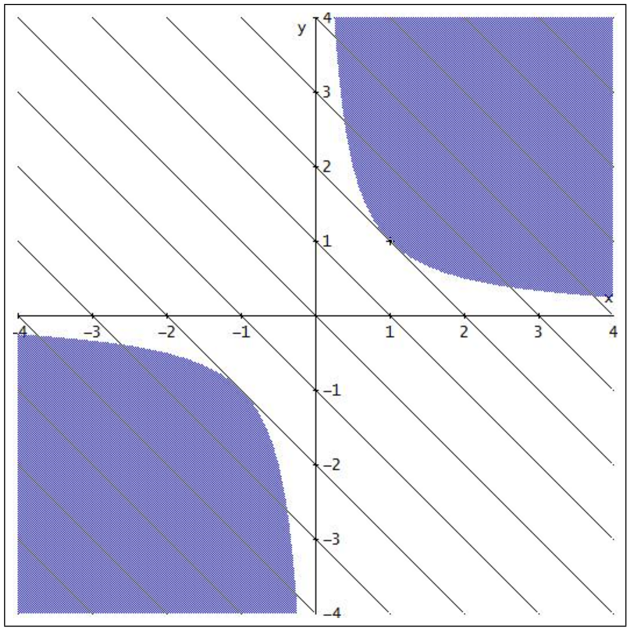


FIGURA 5. L'insieme $x\,y \geq 1$

Alle immagini di E tramite le funzioni continue assegnate non possono quindi applicarsi

- né il Teorema di Weierstrass, (*tali immagini potrebbero non avere massimo e/o minimo*)
- né il Teorema dei valori intermedi, (*tali immagini potrebbero essere non connesse*).

L'immagine $f(E)$ é, per definizione, l'insieme dei valori prodotti da f quando la si calcola su tutti i punti di E :

- $f(x, y) = x$:
  $f(x, y)$ produce, in questo caso, l'ascissa x del punto (x, y) : $f(E)$ é, quindi, l'insieme delle ascisse dei punti $(x, y) \in E$.
  $$f(E) = \mathbb{R}^1 - \{0\}$$
  immagine non limitata, non chiusa, non connessa.
- $f(x, y) = x + 1$:
  $f(x, y)$ produce, in questo caso, l'ascissa del punto (x, y) aumentata di 1 é, quindi,
  $$f(E) = \mathbb{R}^1 - \{1\}$$
  immagine non limitata, non chiusa, non connessa.

- $f(x,y) = x+y$:
  per riconoscere i valori prodotti da f quando $(x,y) \in E$ é utile ricordare la rappresentazione di f tramite linee di livello, vedi Figura 5:
  $$\begin{array}{l} x+y=-2, \\ x+y=-1, \\ x+y=0, \\ x+y=1, \\ x+y=2, \\ ,\ldots. \end{array}$$
  tutte rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
  La $x+y=0$ non incrocia E, la $x+y=1$ lo raggiunge in un punto, la $x+y=-1$ ancora in un punto, ecc.
  Ne segue
  $$f(E) = \mathbb{R}^1 - (-2,2) = \{(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)\}$$
  immagine non limitata, non chiusa, non connessa.

5. Esercizio

Determinare le immagini tramite
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$
degli insiemi E

- $3x^2+5y^2 \leq 4$
- $y \geq x^2$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ é radiale:
prende valori piú piccoli sulle circonferenze $x^2+y^2 = r^2$ con r piú piccolo, valori piú grandi su quelle di raggio r piú grande.

- $E:\ 3x^2+5y^2 \leq 4$
  si tratta dell'insieme del piano $x\,y$ delimitato dall'ellisse
  $$3x^2+5y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \leq 1$$
  si tratta di un insieme chiuso, limitato e connesso, quindi l'immagine tramite la funzione continua $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ sará un insieme
  - limitato,

– chiuso,
– connesso,

$f(E) = [m, M]$ l'intervallo determinato dal minimo m e dal massimo M di f in E

Tenuto presente che

– $x^2 + y^2$ rappresenta il quadrato della distanza di (x, y) dall'origine
– e che $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ é tanto piú grande quanto piú grande é $x^2 + y^2$

ne segue che $f(x, y)$ prende il valore minimo tra quelli assunti in E nell'origine, e il valore massimo nei due punti

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0,\right) \quad B = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0,\right)$$

i due punti di E piú lontani dall'origine.

$$f(E) := \left[1, e^{\frac{4}{3}}\right]$$

- $E : y \geq x^2$
  Si tratta di un insieme chiuso, non limitato, connesso.
  I valori prodotti da f per $(x, y) \in E$ sono
  – valori maggiori o uguali al valore 1 ottenuto in corrispondenza dell'origine $0, 0) \in E$
  – comunque grandi considerando che E contiene punti con $x^2 + y^2$ comunque grande.

  Ne segue
  $$f(E) = \{[1, +\infty)\}$$

6. Esercizio

Posto

$$f(x, y) = \log\left\{\left[1 - x^2 - y^2\right]\left[(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1\right]\right\}$$

- *determinare l'insieme di definizione di f e disegnarlo,*
- *esaminare se é connesso per poligonali,*
- *esaminare se alla funzione f puó applicarsi il teorema di Weierstrass,*
- *provare che l'immagine di f é illimitata inferiormente.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La f é composta tramite

$$\begin{array}{ll} (x, y) & \to [1 - x^2 - y^2]\,[(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1] \\ t & \to \log(t) \end{array}$$

Tenuto presente che $\log(t)$ é definita solo per $t > 0$ la f sará definita in

$$E: \quad \left[1-x^2-y^2\right]\left[(x-2)^2+(y-2)^2-1\right] > 0$$

Tenuto presente che il prodotto di due fattori é positivo quando i due fattori sono concordi (entrambi positivi o entrambi negativi) riesce

$$E := \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2-y^2 > 0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2-1 > 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2-y^2 < 0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2-1 < 0 \end{array} \right.$$

Ovvero E é l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 < 1 \\ (x-2)^2+(y-2)^2 > 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 > 1 \\ (x-2)^2+(y-2)^2 < 1 \end{array} \right.$$

sistemi che hanno come soluzioni

- il primo i punti del cerchio aperto $x^2+y^2 < 1$
- il secondo i punti del cerchio aperto $(x-2)^2+(y-2)^2 < 1$

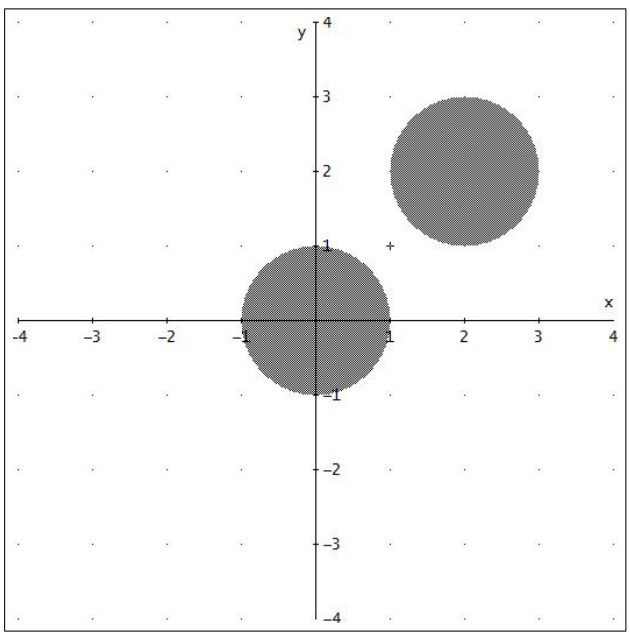


FIGURA 6. L'insieme $E := \{x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x-2)^2 + (y-2)^2 < 1\}$

Pertanto

$$E := \{x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x-2)^2+(y-2)^2 < 1\}$$

Si tratta di un insieme

- limitato,

- aperto,
- non connesso.

Alla funzione, definita in E limitato ma non chiuso non puó applicarsi il Teorema di Weierstrass.

Tenuto presente che nei punti dei due cerchi aperti che compongono E piú vicini alle rispettive circonferenze che li delimitano il prodotto

$$\left[1 - x^2 - y^2\right]\left[(x-2)^2 + (y-2)^2 - 1\right]$$

é prossimo quanto si vuole allo zero, ne risulta che in tali punti la funzione

$$f(x,y) = \log\left\{\left[1 - x^2 - y^2\right]\left[(x-2)^2 + (y-2)^2 - 1\right]\right\}$$

prende valori negativi comunque grandi.
Ne segue che l'immagine $f(E)$ é illimitata inferiormente.

7. Esercizio

Provare che una funzione

$$F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$$

radiale é lipschitziana in $\mathbb{R}^2$ *se e solo se lo é la funzione* $f(t)$ *in* $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Si tratta di due dimostrazioni:

(1) f lip implica che F sia lip,
(2) F lip implica che f sia lip.

- **1:** sia f lip:

$$|f(r_1) - f(r_2)| \leq L\,|r_1 - r_2|$$

allora

$$|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)| = \left|f(\sqrt{x_1^2+y_1^2}) - f(\sqrt{x_2^2+y_2^2})\right| \leq$$

$$\leq L\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right| \leq\ L\,\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

diseguaglianza che segue da quella triangolare.
Ne segue che F é lip con la stessa costante L posseduta da f.

- **2:** sia F lip:

  $|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| \leq \; L\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

  scelti r_1 ed r_2 siano

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} & = r_1, \\ \sqrt{(x_1 + h/\sqrt{2})^2 + (y_1 + h/\sqrt{2})^2} & = r_2 \end{cases} \qquad |h| = |r_2 - r_1|$$

  con riesce

$$|f(r_1) - f(r_2)| = \left| F(x_1, y_1) - F(x_1 + h/\sqrt{2}, y_1 + h/\sqrt{2}) \right| \leq$$
$$\leq \; L\sqrt{h^2} = 2\,L\,|h| = \; L\,|r_2 - r_1|$$

  Ne segue che anche f é lip con la stessa costante di F

CAPITOLO 28

Foglio 4

1. Esercizio

Sia $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

- *detta* $G(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ *determinare* G_ρ, G_θ,
- *detta* $F(t) = G(e^t, t^2)$ *determinare* $F'(t)$.

Soluzione:

$$G(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \frac{1}{1+\rho^2}$$

Quindi si ha direttamente:

$$G_\rho(\rho,\theta) = \frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2}, \quad G_\theta(\rho,\theta) = 0$$

Le derivate G_ρ e G_θ erano del resto ottenibili con la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$G_\rho(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}\cos(\theta) + \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\sin(\theta)$$

da cui sostituendo a x e y le espressioni $\rho\cos(\theta)$, $\quad \rho\sin(\theta)$ si ha

$$G_\rho(\rho,\theta) = \frac{-2\rho(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}{(1+\rho^2)^2} = \frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2}$$

Analogamente per l'altra derivata

$$G_\theta(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{2x\,\rho\sin(\theta) - 2y\,\rho\cos(\theta)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

Per quanto concerne la $F(t)$ si ha

$$F(t) = G(e^t, t^2) = \frac{1}{1+e^{2t}}$$

da cui, direttamente,

$$F'(t) = \frac{-2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}$$

La regola di derivazione delle funzioni composte avrebbe dato, del resto,

$$F'(t) = \frac{\partial G}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

da cui sostituendo a ρ l'espressione e^t si ha

$$F'(t) = \frac{-2e^t}{(1+e^{2t})^2}\, e^t = \frac{-2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}$$

2. Esercizio

Indicate con

$$\begin{array}{l} f_1(\varphi,\psi) = \varphi^2\,\psi, \quad f_2(\varphi,\psi) = \varphi\, e^{\psi}, \\ \varphi(x,y) = x^2+y^2, \quad \psi(x,y) = x\,y \end{array}$$

calcolare i gradienti delle funzioni $F_1(x,y)$, $\quad F_2(x,y)$, *ottenute componendo le precedenti* f_1, f_2, con le $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$.

Soluzione:

Profittiamo, nell'esercizio, della espressione vettoriale fornita nelle Dispense,

$$\nabla F = J\,\nabla f$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_x(x,y) & \psi_x(x,y) \\ \varphi_y(x,y) & \psi_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\varphi[\varphi(x,y),\psi(x,y)] \\ f_\psi[\varphi(x,y),\psi(x,y)] \end{pmatrix}$$

Nel caso dell'esercizio si ha

$$\begin{pmatrix} \varphi_x(x,y) & \psi_x(x,y) \\ \varphi_y(x,y) & \psi_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} F_{1x}(x,y) \\ F_{1y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\varphi\psi \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{2x}(x,y) \\ F_{2y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\psi} \\ \varphi e^{\psi} \end{pmatrix}$$

Da cui, eseguito il prodotto

matrice $\times$ *vettore*

e sostituite a φ e ψ le relative espressioni si ha

$$\begin{pmatrix} F_{1x}(x,y) \\ F_{1y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^2y(x^2+y^2) + y(x^2+y^2)^2 \\ 4xy^2(x^2+y^2) + x(x^2+y^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{2x}(x,y) \\ F_{2y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^{xy} + y(x^2+y^2)e^{xy} \\ 2ye^{xy} + x(x^2+y^2)e^{xy} \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE 2.1. *La semplicitá delle composizioni proposte suggerisce un calcolo diretto*

$$F_1(x,y) = xy(x^2+y^2)^2, \quad F_2(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$$

dal quale le derivate parziali si ricavano assai piú semplicemente.

3. Esercizio

Siano

$$f(x,y) = \int_x^y \log(1+t^2)dt, \quad x(u,v) = \sqrt{e^{u+v}-1}, \quad y(u,v) = \sqrt{e^{u-v}-1}$$

detta $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, *calcolare* $F_u(u,v)$, $F_v(u,v)$.

Soluzione:

$$F_u(u,v) = \frac{\partial f(x(u,v), y(u,v))}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Tenuto presente il Teorema di Torricelli, valido per ogni funzione continua g

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x)$$

e osservato che

$$f(x,y) = \int_x^y \log(1+t^2)dt = \int_0^y \log(1+t^2)dt - \int_0^x \log(1+t^2)dt$$

si ha

$$f_x(x,y) = -\log(1+x^2), \quad f_y(x,y) = \log(1+y^2)$$

da cui

$$F_u(u,v) = -\log(1+x^2)\frac{\partial x}{\partial u} + \log(1+y^2)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$F_u(u,v) = -\log(1+x^2)\frac{e^{u+v}}{2\sqrt{e^{u+v}-1}} + \log(1+y^2)\frac{e^{u-v}}{2\sqrt{e^{u-v}-1}}$$

da cui sostituendo a x e y le relative espressioni si ha

$$F_u(u,v) = -\log(e^{u+v})\frac{e^{u+v}}{2\sqrt{e^{u+v}-1}} + \log(e^{u-v})\frac{e^{u-v}}{2\sqrt{e^{u-v}-1}}$$

ovvero

$$F_u(u,v) = -(u+v)\frac{e^{u+v}}{2\sqrt{e^{u+v}-1}} + (u-v)\frac{e^{u-v}}{2\sqrt{e^{u-v}-1}}$$

I conti per l'altra derivata, $F_v(u,v)$ sono analoghi: solo un cambio di segno sul secondo addendo,

$$F_v(u,v) = -(u+v)\frac{e^{u+v}}{2\sqrt{e^{u+v}-1}} - (u-v)\frac{e^{u-v}}{2\sqrt{e^{u-v}-1}}$$

4. Esercizio

Posto $f(x,y) = \cos(xy)\,e^y$ *calcolare le derivate direzionali*

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}}(0,0), \qquad \frac{df}{d\overrightarrow{n}}(0,1)$$

essendo $n = \{\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)\}$, *la direzione della bisettrice del primo e terzo quadrante.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione assegnata $f(x,y) = \cos(xy)\,e^y$ é di classe C^2 in tutto R^2 quindi le sue derivate direzionali si calcolano dal gradiente con la formula

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\nabla f} \times \overrightarrow{n}$$

ovvero, nell'esercizio proposto

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}} = \{-y\sin(xy)e^y, -x\sin(xy)e^y + \cos(xy)e^y\} \times \{\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)\}$$

Nei punti assegnati si ha pertanto

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}}(0,0) = \{0,1\} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\{1,1\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}}(0,1) = \{0,e\} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\{1,1\} = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

5. Esercizio

Sia $f(x,y) = 3x^2+5xy+y^2+2x+y+1$ *e siano* $A = (0,0)$ *e* $B = (3,2)$ *: determinare un punto* P *del segmento* AB *rispetto al quale valga la relazione del valor medio*

$$f(B) - f(A) = \overrightarrow{\nabla f}(P) \times \overrightarrow{AB}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Nel caso proposto

$$\begin{array}{l} f(B) = 70, \\ f(A) = 1, \\ x_B - x_A = 3, \\ y_B - y_A = 2, \\ f_x = 6x + 5y + 2, \\ f_y = 5x + 2y + 1 \\ x = 3t \\ y = 2t \end{array}, \qquad t \in [0,1]$$

avendo indicato anche la rappresentazione parametrica del segmento AB

La relazione del valor medio é pertanto

$$70 - 1 = 3(18t + 10t + 2) + 2(15t + 4t + 1)$$

ovvero

$$69 = 122t + 8 \quad \to \quad t = \frac{61}{122} = \frac{1}{2}$$

Il punto $P \in AB$ in cui vale la relazione del teorema del *valor medio* é pertanto

$$P = \left(\frac{3}{2},\ 1\right)$$

$$f(3,2) - f(0,0) = (3-0)f_x(3/2,1) + (2-0)(f_y(3/2,1)$$

Casualmente (?) P é risultato il *punto medio* tra A e B.

6. Esercizio

Determinare i punti critici di $f(x,y) = e^{x+y^2}\cos(x)$ *ed esaminare se sono punti di massimo o di minimo locale.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{x+y^2}\cos(x) - e^{x+y^2}\sin(x) & = 0 \\ f_y(x,y) = 2ye^{x+y^2}\cos(x) & = 0 \end{cases}$$

sistema che equivale, tenuto conto che l'esponenziale non si annulla mai, a

$$\begin{cases} \cos(x) - \sin(x) & = 0 \\ y\,\cos(x) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \cos(x) = \sin(x), \quad y = 0$$

I punti critici sono pertanto

$$P_k = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Per classificare tali punti calcoliamo le tre derivate seconde

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) = &\ -2\,e^{x+y^2}\,\sin(x) \\ f_{xy}(x,y) = &\ 2\,e^{x+y^2}\,y\,\cos(x) - 2\,e^{x+y^2}\,y\,\sin(x) \\ f_{yy}(x,y) = &\ \left(2\,e^{x+y^2} + 4\,e^{x+y^2}\,y^2\right)\,\cos(x) \end{aligned}$$

per controllare in tali punti critici P_k le condizioni

$$\begin{array}{lll} f_{xx}(P_k) > 0, f_{xx}(P_k)f_{yy}(P_k) - f^2_{xy}(P_k) > 0 & \to & \text{minimo,} \\ f_{xx}(P_k) < 0, f_{xx}(P_k)f_{yy}(P_k) - f^2_{xy}(P_k) > 0 & \to & \text{massimo,} \\ f_{xx}(P_k) \neq 0, f_{xx}(P_k)f_{yy}(P_k) - f^2_{xy}(P_k) < 0 & \to & \text{sella,} \end{array}$$

condizioni che equivalgono a riconoscere che la forma quadratica determinata dalla matrice Hessiana sia rispettivamente definita *positiva,* definita *negativa,* non definita.
Tenuto conto al solito che l'esponenziale produce valori sempre positivi e che $\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \cos(\frac{\pi}{4} + k\pi)$ si ha

$$f_{xx}(P_k) \cong -\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi), \quad f_{xx}(P_k)f_{yy}(P_k) - f^2_{xy}(P_k) \cong -\sin^2(\frac{\pi}{4} + k\pi) < 0$$

Tutti i punti critici trovati sono pertanto punti di sella.

OSSERVAZIONE 6.1. *L'espressione*

$$f(x,y) = e^x \cos(x)\, e^{y^2}$$

consente di intuire meglio i valori prodotti da tale funzione

- *per* $y = 0$ *essa produce i valori di* $e^x \cos(x)$
- *su ogni retta* $y = y_0$ *con* $y_0 \neq 0$ *produce valori analoghi, dilatati del fattore* $e^{y_0^2}$

Il grafico di Figura 3, riferito alla funzione piú semplice

$$f(x,y) = (1 + y^2)\,\cos(x)$$

permette di capire meglio il fenomeno di punti critici tutti di tipo sella.

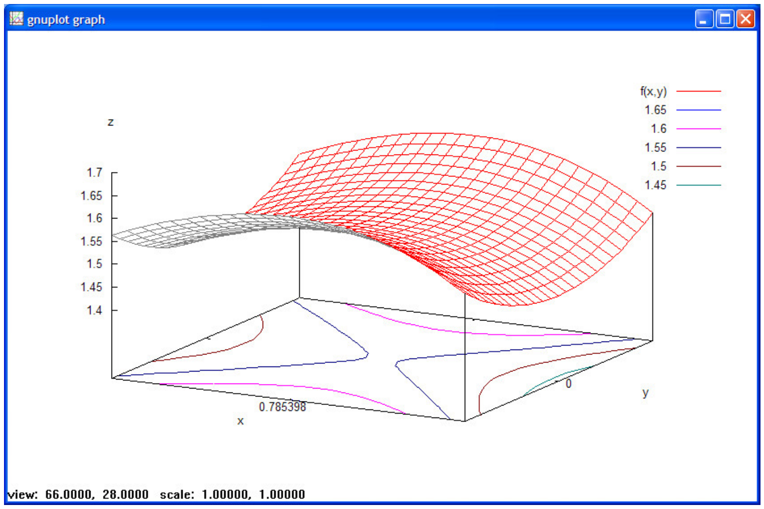


FIGURA 1. Il grafico di $f(x,y)$ vicino al punto P_0

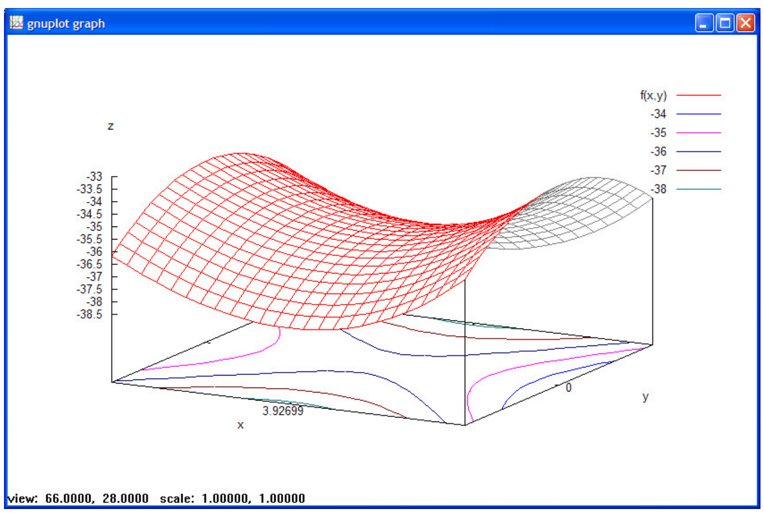


FIGURA 2. Il grafico di $f(x,y)$ vicino al punto P_1

7. Esercizio

Posto

$$f(x,y) = 2x^2 + 3\,x\,y + 3y, \quad D := \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq y \leq 4, \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array} \right.$$

- *determinare i punti critici di f interni a D,*
- *esaminare se rappresentano punti di massimo o di minimo,*
- *determinare massimo e minimo di f nell'insieme chiuso D.*

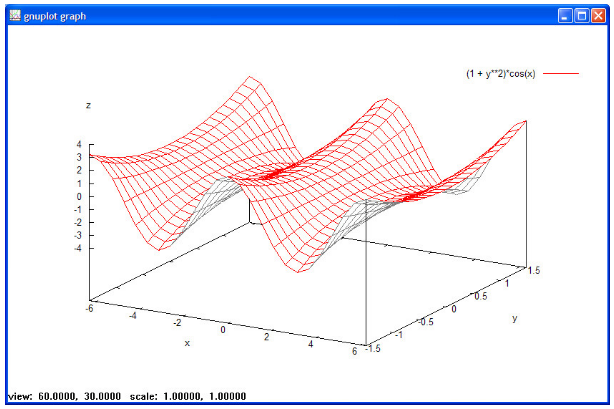


FIGURA 3. Un grafico piú semplice: $f(x, y) = (1 + y^2)\cos(x)$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

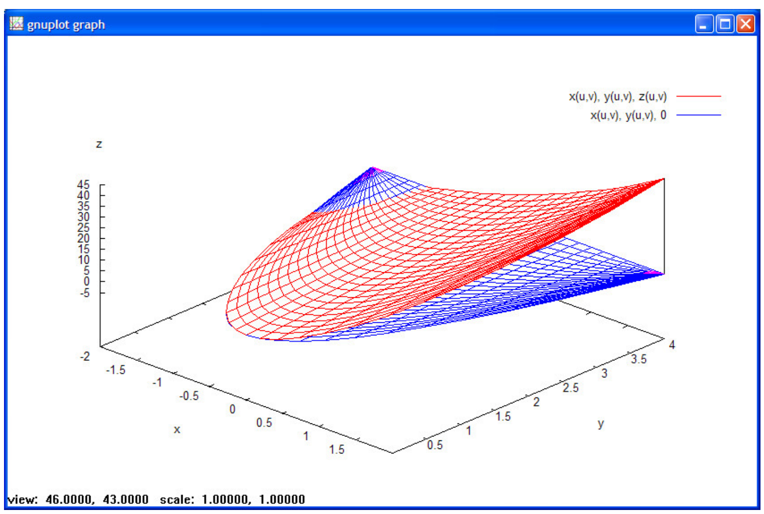


FIGURA 4. il grafico di $f(x,)$ in rosso, il dominio D del piano $z = 0$, sul quale f é definita, in blu.

Punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 4x + 3y = 0 \\ f_y = 3x + 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = -1, \quad y = \frac{4}{3}$$

Il punto $P = (-1, 4/3) \in \overset{o}{D}$: per classificarlo (max, min o sella) consideriamo la matrice Hessiana

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

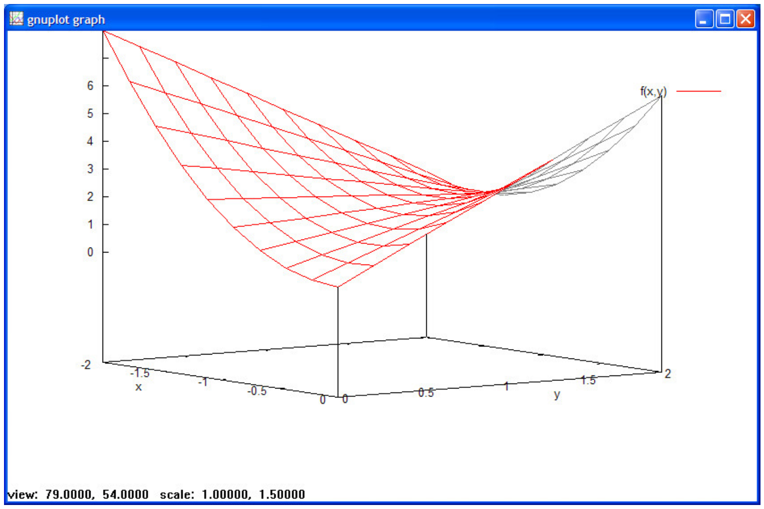


FIGURA 5. Il grafico di f vicino al punto $P = (-1, 4/3)$

che definisce la forma quadratica

$$Q(h, k) = 3h^2 + 6hk = 3h(h + 2k)$$

chiaramente non definita.
Si riconosce pertanto che il punto $P = (-1, 4/3) \in \overset{o}{D}$, critico per f é punto di sella, vedi Figura 5.
Il massimo e il minimo della funzione continua $f(x, y) = 2x^2+3\,x\,y+3y$, nell'insieme chiuso e limitato

$$D := \begin{cases} x^2 \leq y \leq 4, \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

non possono che essere raggiunti sulla frontiera.

- o sul segmento $-2 \leq x \leq 2, \quad y = 4$
- o sull'arco di parabola $-2 \leq x \leq 2, \quad y = x^2$

Sul segmento $x \in [-2, 2]$ riesce

$$f(x, 4) = 2x^2 + 12x + 12, \quad \to \quad -4 \leq f(x, 4) \leq 44$$

sull'arco di parabola $x \in [-2, 2]$

$$f(x, x^2) = 5x^2+3x^3 \quad \to \quad \begin{cases} 0 \leq 5x^2 \leq 20 \\ -24 \leq 3x^3 \leq 24 \end{cases} \quad \to \quad -24 \leq f(x, x^2) \leq 44$$

Se ne deduce che

$$\min_{(x,y)\in D} f(x, y) = -24, \quad \max_{(x,y)\in D} f(x, y) = 44$$

OSSERVAZIONE 7.1. *La Figura 4 é stata ottenuta con il seguente programma*

```
gnuplot> set parametric
        dummy variable is t for curves, u/v for surfaces
gnuplot> set urange [-2:2]
gnuplot> set vrange [0:1]
gnuplot> x(u,v) = u
gnuplot> y(u,v) = u**2+v*(4-u**2)
gnuplot> z(u,v) = 2*x(u,v)**2+3*x(u,v)*y(u,v)+3*y(u,v)
gnuplot> set isosamples 25,25
gnuplot> set xlabel "x"
gnuplot> set ylabel "y"
gnuplot> set zlabel "z"
gnuplot> splot x(u,v), y(u,v), z(u,v), x(u,v), y(u,v), 0
gnuplot>
```

8. Esercizio

Assegnata la funzione

$$f(x,y) = 1 + 2x + 3y + \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

- *determinare la formula di Taylor di primo ordine e punto iniziale* $(x_0, y_0) = (0,0)$ *per* f,
- *determinare il resto* R,
- *riconoscere che* $|R|$ *si puó maggiorare con* $M(x^2 + y^2)$.

Soluzione:

Per determinare la formula di Taylor per f, relativa a $(x_0, y_0) = (0,0)$ occorre aver calcolato

$$f(0,0) = 2, \quad f_x(0,0) = 2, \quad f_y(0,0) = 3$$

da cui si ha il polinomio di Taylor

$$P(x,y) = 2 + 2x + 3y$$

Il resto R é, per definizione,

$$1 + 2x + 3y + \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = 2 + 2x + 3y + R$$

ovvero

$$R = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} - 1 = -\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Da tale espressione esplicita si riconosce

$$|R| \leq \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

la nota maggiorazione del resto di Taylor

$$|R| \leq M\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$$

con un multiplo del quadrato della distanza: in questo caso $M=1$.

Osservazione 8.1. *É noto che*

$$\frac{1}{1-\rho} = 1+\rho+\rho^2+\rho^3+...$$

quindi (cfr. Formule di Taylor quasi gratuite)

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = 1-(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2-....$$

Ne segue

$$1+2x+3y+\frac{1}{1+x^2+y^2} = 1+2x+3y+1-(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2....$$

da cui, la parte lineare dell'approssimazione

$$1+2x+3y+\frac{1}{1+x^2+y^2} \approx 2+2x+3y$$

9. Esercizio

Assegnata la funzione $f(x,y)=\sqrt{1+\sin(x+e^y-1)}$ *determinare la formula di Taylor di primo ordine e punto iniziale* $(0,0)$.

Soluzione:

La risposta puó essere ottenuta con la strategia delle *Formule di Taylor quasi gratuite*.

Consideriamo infatti le seguenti approssimazioni lineari in prossimitá dell'origine:

- $\sqrt{1+t} \approx 1+\frac{1}{2}t$
- $\sin(t) \approx t$
- $e^t \approx 1+t$
- $\sin(x+e^y-1) \approx \sin(x+y) \approx x+y$
- $\sqrt{1+\sin(x+e^y-1)} \approx 1+\frac{1}{2}(x+y)$

L'ultima é esattamente l'espressione $P(x,y)$ di Taylor per la f

$$P(x,y) = 1+\frac{1}{2}(x+y)$$

Naturalmente la determinazione del polinomio di Taylor puó essere eseguita nel modo piú standard calcolando

$$f(0,0) = 1, \quad f_x(0,0) = \frac{1}{2}, \quad f_y(0,0) = \frac{1}{2}$$

ottenendo (naturalmente) lo stesso $P(x,y)$

10. Esercizio

Assegnata la forma quadratica

$$Q_\lambda(h,k) = -\lambda h^2 + h\,k + \lambda^2\,k^2$$

- *determinare per quali λ é definita positiva,*
- *per quali é semidefinita positiva,*
- *per quali é definita negativa.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$Q_\lambda(h,k) = -\lambda h^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) hk + \lambda^2 k^2$:

- definita positiva $-\lambda > 0. \quad -\lambda^3 - 1/4 > 0 \quad \to \quad \lambda < -1/\sqrt[3]{4}$, vedi Figura 6,
- semidefinita positiva $-\lambda > 0. \quad -\lambda^3 - 1/4 = 0 \quad \to \quad \lambda = -1/\sqrt[3]{4}$ vedi Figura 7,
- definita negativa $-\lambda < 0. \quad -\lambda^3 - 1/4 > 0 \quad \to$ mai, vedi Figura 8,
- semidefinita negativa $-\lambda < 0. \quad -\lambda^3 - 1/4 = 0 \quad \to$ mai
- non definita $-\lambda^3 - 1/4 < 0 \quad \to \quad \lambda > -1/\sqrt[3]{4}$ vedi Figura 9

Nelle figure 6, 7, 8, 9 seguenti si riconoscono i valori che la forma quadratica $Q_\lambda(h,k)$ assume sui punti della circonferenza unitaria in corrispondenza a valori λ diversi: i valori negli altri punti del piano sono proporzionali ad essi...

11. Esercizio

Detta

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

- *esaminare se i punti $O = (0,0)$, $B = (2,1)$ siano critici per f,*
- *determinare le matrici hessiane nei punti $O = (0,0)$, $B = (2,1)$*
- *determinare i relativi autovalori,*
- *scrivere le forme quadratiche da esse determinate ed esaminare quali di esse risultano definite.*

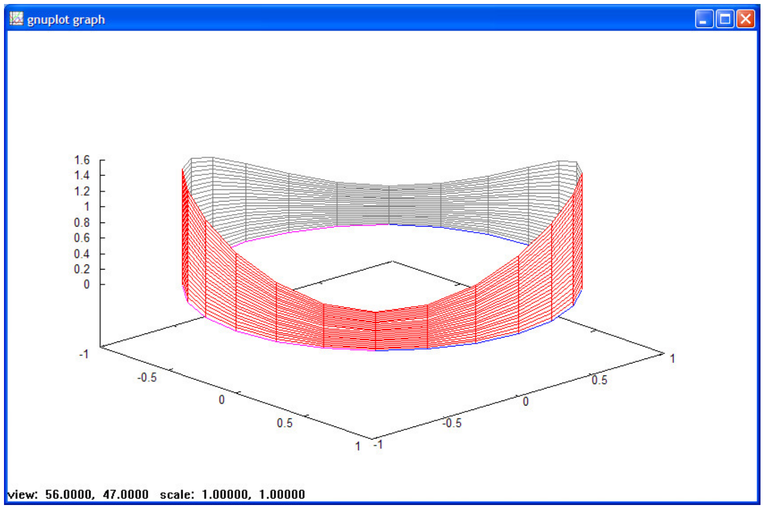


FIGURA 6. Il caso $\lambda = -1$.

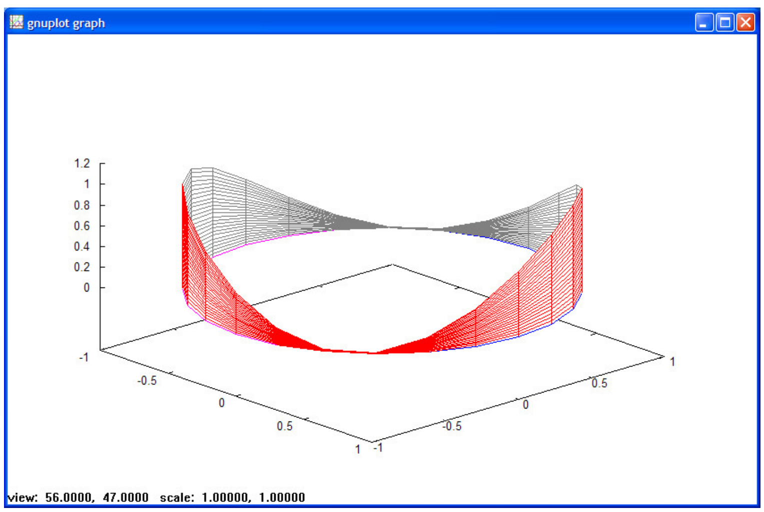


FIGURA 7. Il caso $\lambda = -1/\sqrt[3]{4}$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{-2\,x}{(1+x^2)^2} \\ \\ f_y(x,y) = \dfrac{-2\,y}{(1+y^2)^2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = 0, \quad y = 0$$

Quindi $O = (0,0)$ é un punto critico, mentre $B = (2,1)$ non lo é.

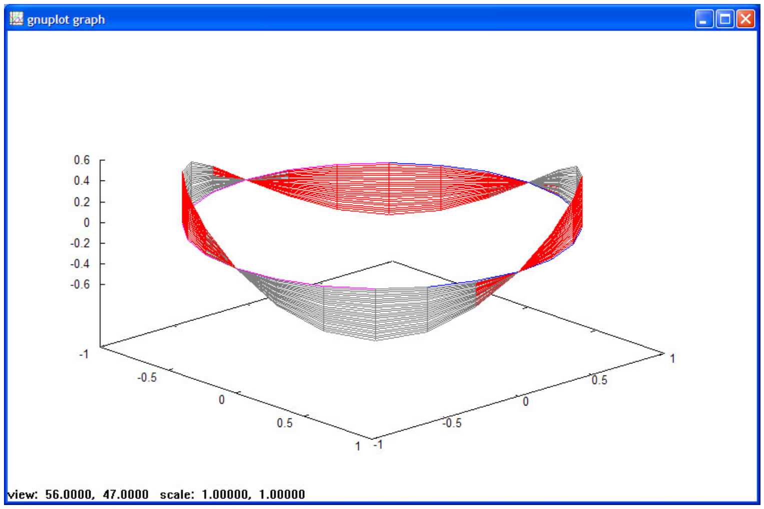


FIGURA 8. Il caso $\lambda = 0$.

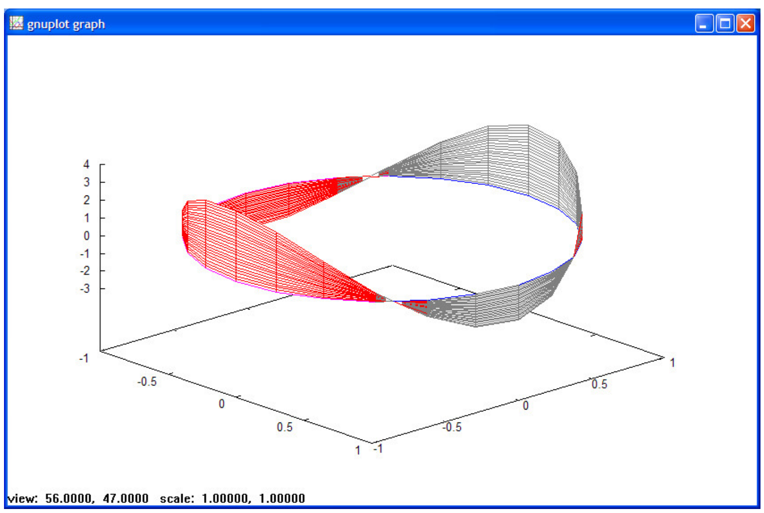


FIGURA 9. Il caso $\lambda = 2$.

La matrice hessiana, in un punto generico (x, y) é

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{8\,x^2}{(1+x^2)^3} - \dfrac{2}{(1+x^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{8\,y^2}{(1+y^2)^3} - \dfrac{2}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Da cui

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale di autovalori entrambi negativi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

che determina la forma quadratica

$$Q(h,k) = -2h^2 - 2k^2$$

evidentemente definita negativa. Il punto critico $O = (0,0)$ é pertanto un punto di massimo, vedi Figura 10.

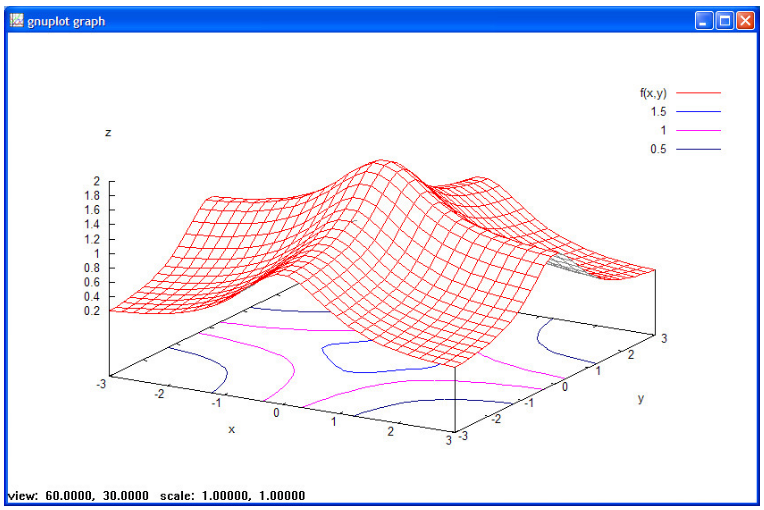


Figura 10. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$

$$H(2,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{22}{125} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ancora matrice diagonale di autovalori entrambi positivi

$$\lambda_1 = \frac{22}{125}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

essa determina la forma quadratica

$$Q(h,k) = \frac{22}{125}\, h^2 + \frac{1}{2}\, k^2$$

evidentemente definita positiva.
Tenuta presente la formula di Taylor

$$f(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1) + R$$

l'aver riconosciuto che $Q(h,k)$ é definita positiva corrisponde, geometricamente al fatto che il grafico di $z = f(x,y)$ si trova, in un intorno del punto $(2,1,f(2,1))$ al di sopra del piano tangente in quel punto.

12. Esercizio

Assegnati i due polinomi[1]

$$P(x,y) = 3x^2 + \lambda\, xy + 6\, y^2, \qquad Q(x,y) = 5x^2 + (\lambda+2)\, xy + 18y^2$$

- *determinare per quali λ essi sono le derivate prime di uno stesso polinomio,*
- *in corrispondenza a tali λ indicare almeno due polinomi di cui P e Q siano le derivate parziali.*

Soluzione:

Se esiste il polinomio $F(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

allora per il Teorema di Schwarz deve riuscire

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \to \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ovvero

$$\lambda x + 12y = 10x + (\lambda+2)y \quad \to \quad \lambda = 10$$

Se $\lambda = 10$ i due polinomi

$$P(x,y) = 3x^2 + 10\, xy + 6\, y^2, \qquad Q(x,y) = 5x^2 + 12\, xy + 18y^2$$

sono le derivate parziali di un polinomio $F(x,y)$.
Per trovarlo cominciamo a ricordare che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad \to \quad F(x,y) = x^3 + 5x^2 y + 6y^2 x + G(y)$$

avendo aggiunto il termine $G(y)$ ....una costante rispetto ad x!
Imponiamo adesso che

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 5x^2 y + 6y^2 x + (G(y)\right) = Q(x,y)$$

ovvero

$$5x^2 + 12yx + G'(y) = 5x^2 + 12xy + 18y^2$$

[1]Nel foglio distribuito era stato dato, per un refuso sul terzo addendo, $P(x,y) = 3x^2 + \lambda\, xy + 4\, y^3$ dato purtroppo incompatibile con $Q(x,y) = 5x^2 + (\lambda+2)\, xy + 18y^2$ qualunque sia λ. L'esercizio risolto si riferisce invece ad un $P(x,y)$ compatible.

da cui

$$G'(y) = 18y^2 \quad \to \quad G(y) = 6y^3 + c$$

I polinomi richiesti sono pertanto

$$F(x, y) = x^3 + 5x^2y + 6y^2x + 6y^3 + c$$

addirittura infiniti pensando di variare la costante c.

CAPITOLO 29

Foglio 5

1. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

- *trovare i punti critici,*
- *classificare tali punti (massimi, minimi, selle,..) mediante la matrice hessiana,*
- *determinare l'immagine* $f(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione:

Punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -15 + 3\,x^2 + 3\,y^2 & = 0 \\ f_y(x,y) = -12 + 6\,x\,y & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = 5 \\ x\,y & = 2 \end{cases}$$

Il sistema conduce all'equazione biquadratica

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 & \rightarrow & x = \pm 1 \\ x^2 = 4 & \rightarrow & x = \pm 2 \end{cases}$$

I punti critici sono pertanto, vedi Figura 1,

$$A = (1,2), \quad B = (2,1), \quad C = (-1,-2), \quad D = (-2,-1)$$

La matrice hessiana é

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,x & 6\,y \\ 6\,y & 6\,x \end{pmatrix}$$

Tenute presenti le condizioni che rendono la forma quadratica definita

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \det(H) = 36(x^2 - y^2) > 0$$

si riconosce che

- nei punti B e D, vedi Figura 2, la forma é definita
  - in B, $f_{xx} > 0$, si ha un minimo,
  - in D, $f_{xx} < 0$, si ha un massimo,
- nei punti A e C la forma non é definita e si hanno punti sella.

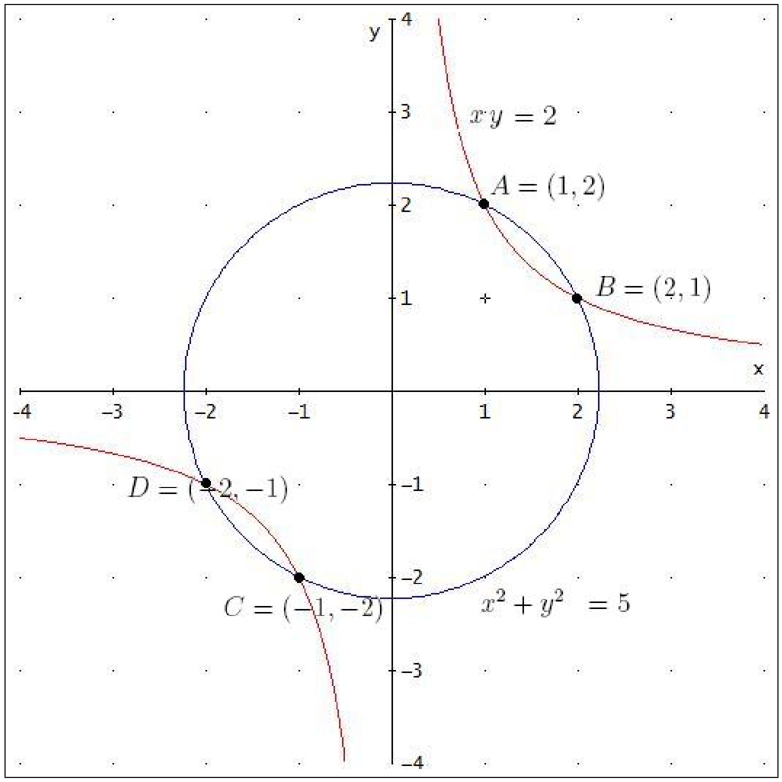


FIGURA 1. La determinazione dei punti critici di $f(x, y)$.

L'immagine $f(\mathbb{R}^2)$ é, necessariamente (Teorema dei Valori Intermedi) un intervallo di $\mathbb{R}^1$.
Tenuto presente il grado dispari del polinomio $x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ si riconosce che esso produce, ad esempio per $y = 1$ valori

$$x^3 + 3x - 15x - 12$$

- positivi grandi a piacere per x positivo grande,
- negativi ancora grandi a piacere per x negativo grande.

Quindi $f(\mathbb{R}^2)$ é illimitato sia superiormente che inferiormente: quindi riesce

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^1$$

2. Esercizio

Sia $f(x, y) = |1 - x^2 - y^2|$, *determinare*

- *il minimo di* f *in* $\mathbb{R}^2$,
- *in quali punti di* $\mathbb{R}^2$ f *é dotata di derivate parziali,*
- *l'immagine* $f(Q)$ *essendo* $Q : |x| + |y| \leq 1$

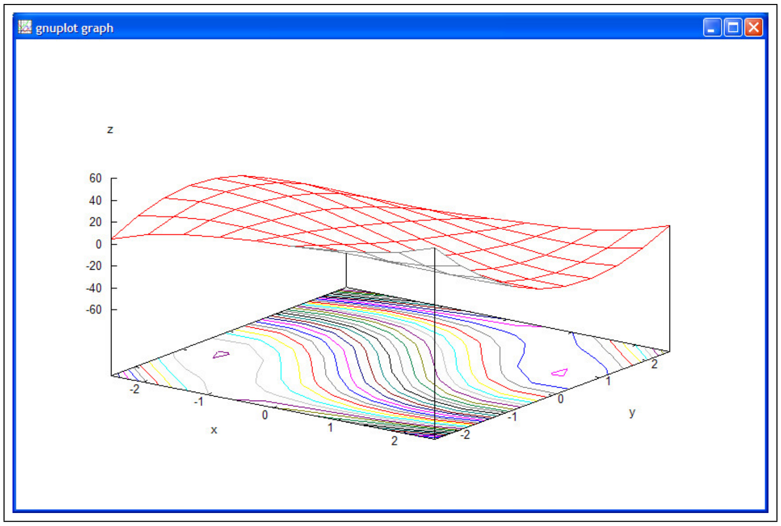


FIGURA 2. Il grafico di $f(x, y)$: le linee di livello illustrano la natura dei punti B e D

Soluzione:

La funzione f per via del modulo con il quale é definita produce valori necessariamente maggiori o uguali a zero: tento conto che sui punti (x, y)

$$x^2 + y^2 = 1$$

vale zero si deduce che

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = 0$$

L'esistenza delle derivate parziali f_x ed f_y deriva dalla applicabilitá del teorema di derivazione delle funzioni composte:

- $1 - x^2 - y^2$ é derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$
- $|t|$ é derivabile per $t \neq 0$.

Quindi $f(x, y)$ é certamente derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$ privato della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.
Su tale circonferenza si deve ragionare punto per punto, tenendo conto che

- all'interno riesce $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
- all'esterno riesce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,

e quindi i rapporti incrementali sui punti della frontiera coinvolgono (quasi sempre) le due definizioni di f.
Consideriamo la f_x nei punti (x_0, y_0) con $x_0^2 + y_0^2 = 1, \quad x_0 \geq 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{2x_0h+h^2}{h}=2x_0\\ \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-2x_0h-h^2}{h}=-2x_0\end{cases}$$

valori coincidenti solo se $x_0=0$.
Il conto per $x_0\leq 0$ é analogo: in conclusione f non ha la derivata parziale f_x sulla circonferenza $x^2+y^2=1$ tranne che negli unici due punti $x_0=0$, in corrispondenza cioé del polo Nord e del polo Sud della circonferenza.
Osservazione analoga per la derivata f_y in (x_0,y_0) con $y_0\geq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{2y_0h+h^2}{h}=2y_0\\ \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-2y_0h-h^2}{h}=-2y_0\end{cases}$$

Si riconosce che f ha, sui punti della circonferenza, la derivata f_y solo nei due punti che hanno $y_0=0$, l'estremo oriente e l'estremo occidente...

f é continua, Q é chiuso, limitato e connesso: quindi $f(Q)$ é l'ntervallo $[m,M]$ essendo m e M il minimo e il massimo di f in Q.
Si noti, vedi Figura 3, che

$$Q\subseteq\{x^2+y^2\leq 1\}$$

quindi sui punti di Q riesce

$$f(x,y)=1-x^2-y^2$$

É evidente che

$$\min_{(x,y)\in Q}f(x,y)=f(1,0)=0,\qquad \max_{(x,y)\in Q}f(x,y)=f(0,0)=1$$

Ne deriva che

$$f(Q)=[0,1]$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Profittando della Figura 3 riflettiamo sui rapporti incrementali relativi a f_x e a f_y nei punti della circonferenza: nei due poli, Nord e Sud, i rapporti incrementali relativi alla f_x, quindi in orizzontale considerano sempre lo stesso tipo di valori della f, x^2+y^2-1. Lo stesso accade nei due punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ per quanto concerne la derivata f_y : i rapporti incrementali, verticali, continuano a coinvolgere lo stesso tipo di valori, quelli relativi alla regione esterna al cerchio.*

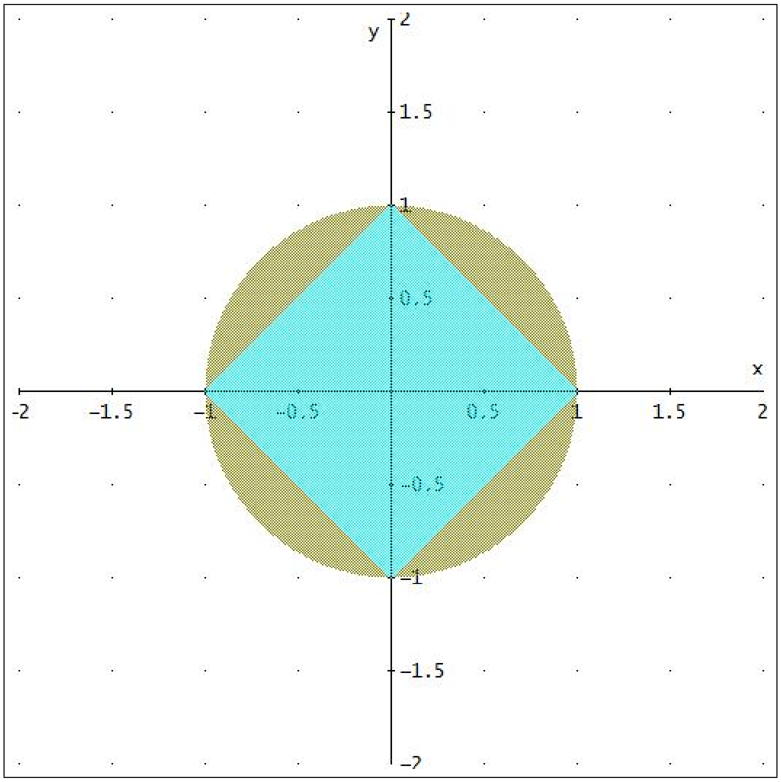


FIGURA 3. $Q \subseteq \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

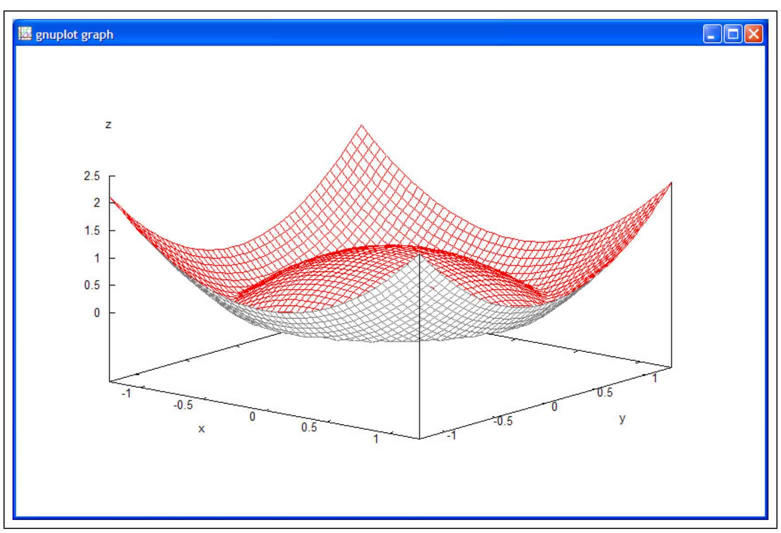


FIGURA 4. $f(x, y) = |1 - x^2 - y^2|$,

In tutti gli altri punti della circonferenza i rapporti incrementali pescano un po' dentro e un po' fuori: qui é la fonte del possibile incidente... la piega secca con cui si presenta il grafico in corrispondenza dei punti $x^2 + y^2 = 1$, *vedi Figura 4.*

3. Esercizio

Posto $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$:

- *determinare massimo e minimo (assoluti) di* f *nel triangolo* $T : \{x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geq -3\}$,
- *determinare le derivate direzionali di* f *nei tre vertici di* T *secondo le direzioni dei lati uscenti da ciascun vertice.*

Soluzione:

La funzione $f \in C^2$ in tutto $\mathbb{R}^2$ e T chiuso e limitato garantiscono, teorema di Weierstrass, che esistono minimo e massimo di f in T.
Per determinarli occorre

- determinare i punti critici di f interni a T,
- calcolare il minore e il maggiore valore di f in tali punti critici,
- determinare il massimo e il minimo di f sui tre segmenti che compongono la frontiera di T

Il minore tra tali valori sará il minimo di f in T, e il maggiore il massimo di f in T.

- punti critici:

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1,\, y = -1, \quad f(-1, -1) = -1$$

tenuto conto che

$$f_{xx} = 2 > 0,\ f_{yy} = 2,\ f_{xy} = 1$$

si riconosce che il punto $(-1, -1)$ é punto di minimo,

- sui tre segmenti di frontiera di T :

$-3 \leq x \leq 0$	$y = 0$	$f = x^2 + x$	$-\frac{1}{4} \leq f \leq 6$
$x = 0$	$-3 \leq y \leq 0$	$f = y^2 + y$	$-\frac{1}{4} \leq f \leq 6$
$-3 \leq x \leq 0$	$y = -3 - x$	$f = 3x^2 + 9x + 6$	$-\frac{3}{4} \leq f \leq 6$

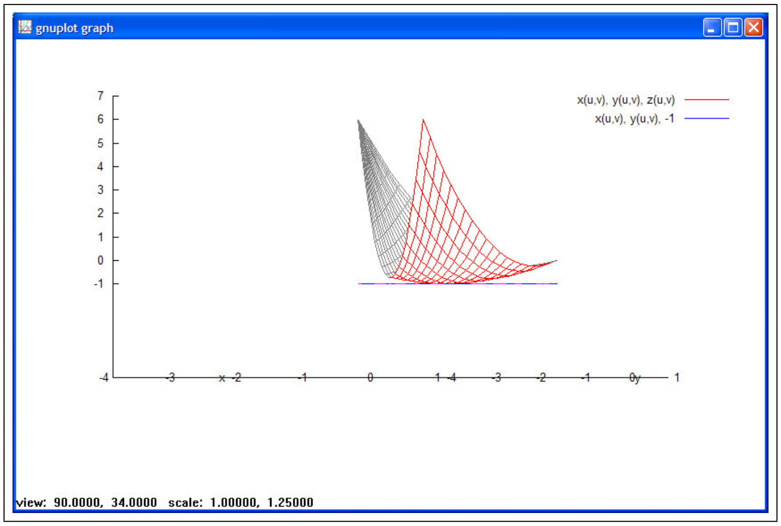


FIGURA 5. Il grafico di $f(x, y)$ e del piano $z = -1$, tangente nel punto critico, visti di profilo.

Dal confronto sui valori osservati nell'unico punto critico interno e sulla frontiera si riconosce, vedi Figura 5, che

$$\min_{(x,y)\in T} f(x, y) = -1, \qquad \max_{(x,y)\in T} f(x, y) = 6.$$

Il grafico di Figura 5 é stato realizzato con il seguente programma:

```
gnuplot> f(x,y) = x**2+y**2 -x*y + x+y
gnuplot> set parametric
        dummy variable is t for curves, u/v for surfaces
gnuplot> x(u,v)=u
gnuplot> y(u,v)=v*(-3-u)
gnuplot> z(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))
gnuplot> set urange [-3:0]
gnuplot> set vrange [0:1]
gnuplot> set xrange [-4:1]
gnuplot> set yrange [-4:1]
gnuplot> set zrange [-1:7]
gnuplot> set isosamples 20,20
gnuplot> set view 90,27,1,1.25
gnuplot> splot x(u,v),y(u,v),z(u,v),x(u,v),y(u,v),-1
```

4. Esercizio

Posto $f(x, y) = e^{x+y} - \cos(x - y)$

- *determinare il polinomio di Taylor* $P(x, y)$ *di* f *di punto iniziale* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *e di ordine* $n = 1$,
- *determinare la forma quadratica che rappresenta il resto* $R(x, y)$ *e classificarla (definita positiva, negativa,...),*
- *maggiorare la differenza* $|f(x, y) - P(x, y)|$ *per* $(x, y) \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C} : \quad x^2 + y^2 \leq \frac{1}{100}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Si tratta di una delle formule.... quasi gratuite, tenendo conto delle relazioni note in un intorno dell'origine:

$$\begin{cases} e^{x+y} & \simeq 1 + x + y \\ \cos(x-y) & \simeq 1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases} \quad \to \quad e^{x+y} - \cos(x-y) \simeq x + y$$

Naturalmente il polinomio $P(x, y)$ richiesto era calcolabile anche in modo standard tenuto conto che

$$\begin{array}{lll} f(0,0) = 0 & & \\ f_x(x,y) = e^{x+y} + \sin(x-y) & \to & f_x(0,0) = 1 \\ f_y(x,y) = e^{x+y} - \sin(x-y) & \to & f_y(0,0) = 1 \end{array}$$

da cui

$$P(x, y) = x + y$$

La forma quadratica che rappresenta il resto é

$$\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right\} \tag{2}$$

essendo

$$\xi^2 + \eta^2 \leq x^2 + y^2$$

Scrivendo esplicitamente le derivate seconde la (2) diventa

$$\frac{1}{2}\{(e^{\xi+\eta} + \cos(\xi-\eta))(x^2+y^2) + 2(e^{\xi+\eta} - \cos(\xi-\eta))xy\}$$

ovvero anche, raccogliendo a fattor comune,

$$\frac{1}{2}e^{\xi+\eta}(x+y)^2 + \frac{1}{2}\cos(\xi-\eta)(x-y)^2 \tag{3}$$

Si tratta per (x,y) prossimo all'origine di una forma quadratica definita positiva: infatti

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2, \quad f_{x,y}(0,0) = 0$$

la forma (2) diventa, se i coeffcienti sono calcolati nell'origine,

$$x^2 + y^2$$

evidentemente definita positiva.
La differenza $f(x,y) - (x+y)$ si rappresenta, vedi Figura 6, per

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{100}$$

tramite la (3) come[1]

$$|f(x,y) - (x+y)| \leq \frac{1}{2}\,e^{\xi+\eta}(x+y)^2 + \frac{1}{2}\left|\cos(\xi-\eta)\right|(x-y)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\,e^{0.1+0.1}(x+y)^2 + (x-y)^2\right] \leq \frac{1}{4}\left[\,e^{0.2}(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\right]$$

$$= \frac{1+e^{0.2}}{4}(x^2+y^2)$$

Ne segue

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{100} \quad \to \quad |f(x,y) - (x+y)| \leq \frac{1+e^{0.2}}{4}\,\frac{1}{100} \simeq 0{,}005$$

Il grafico di Figura 6 mostra anche bene come riesca

$$f(x,y) > x + y$$

[1] Nelle maggiorazioni seguenti si fa uso della maggiorazione fondamentale

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

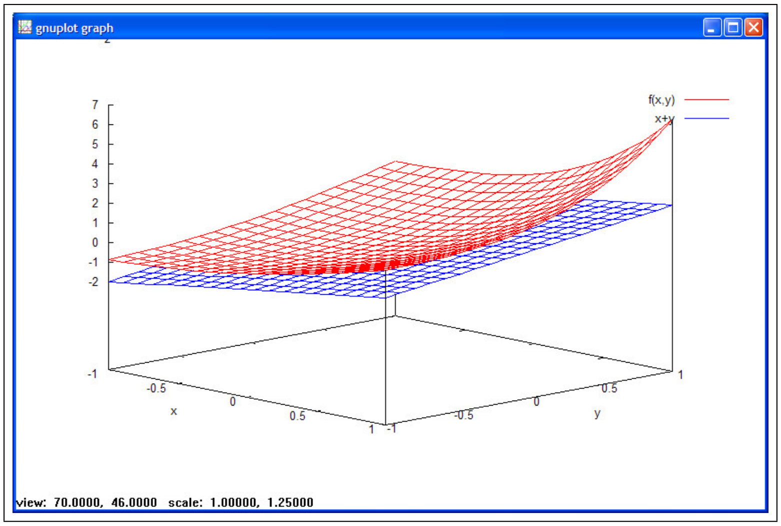


FIGURA 6. Il grafico di $f(x,y)$ e del piano $z = x + y$ tangente nell'origine.

fenomeno prevedibile non appena era stato riconosciuto che la forma quadratica (3) che esprime la differenza é definita positiva.

5. Esercizio

Siano

$$A : x^2 + y^2 \leq 1, \quad B : y \leq x + 1, \quad C : y + x^2 \geq 0$$

- *disegnare l'intersezione* $\Omega = A \cap B \cap C$,
- *provare che* Ω *é misurabile secondo Peano Jordan,*
- *calcolare l'area di* Ω.

Soluzione:

Per riconoscere che Ω, vedi Figura 7, é misurabile secondo Peano Jordan basta riconoscere che la sua frontiera $\mathcal{F}\Omega$ abbia area esterna nulla:

- la $\mathcal{F}\Omega$ é costituita da
  - due archi di circonferenza,
  - un segmento,
  - un arco di parabola,

  tutti insiemi che concidono con il grafico di funzioni reali di una variabile reale continue, quindi (Teorema di integrabilitá delle funzioni continue) insiemi di area esterna nulla.
- quindi $\mathcal{F}\Omega$ ha area esterna nulla,
- quindi Ω é misurabile secondo Peano Jordan.

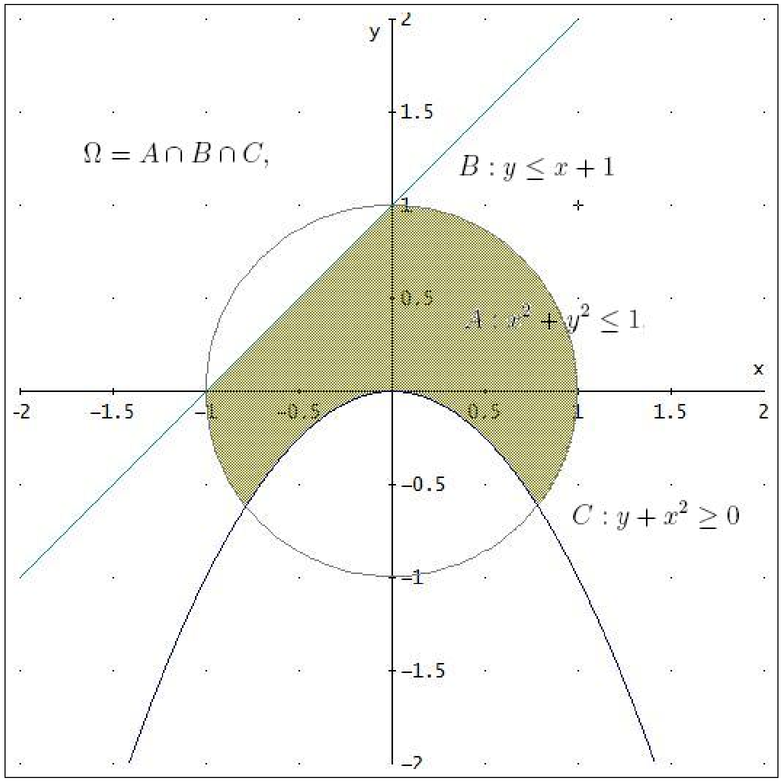


FIGURA 7. $\Omega = A \cap B \cap C$

Per calcolare l'area di Ω serviamoci dell'additivitá: indicate con Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 le parti di Ω contenute nei quattro quadranti si ha, evidentemente:

- $A(\Omega_1) = \dfrac{1}{4}\pi$
- $A(\Omega_2) = \dfrac{1}{2}$
- $A(\Omega_3) = A(\Omega_4)$

Il calcolo di $A(\Omega_4)$ si ottiene

- calcolando l'ascissa
$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$
intersezione circonferenza parabola,
- calcolando i due integrali

$$\int_0^\alpha x^2\,dx, = \frac{1}{3}\alpha^3, \qquad \int_\alpha^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{-\left(\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\right) - \arcsin(\alpha)}{2}$$

Ne segue

$$A(\Omega) = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+2\left(\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+\frac{-\sqrt{-2+\sqrt{5}}-\arcsin(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})}{2}\right)$$

$$A(\Omega) \simeq 1.78968 \simeq 0.57\,\pi$$

L'insieme Ω ha area poco piú grande di quella del semicerchio...!

6. Esercizio

Sia

$$S: \quad x \geq y^2, \quad x+y \leq 2$$

- *disegnare* S
- *riconoscere che* S *é misurabile secondo* PJ,
- *calcolarne l'area di* S.

Soluzione:

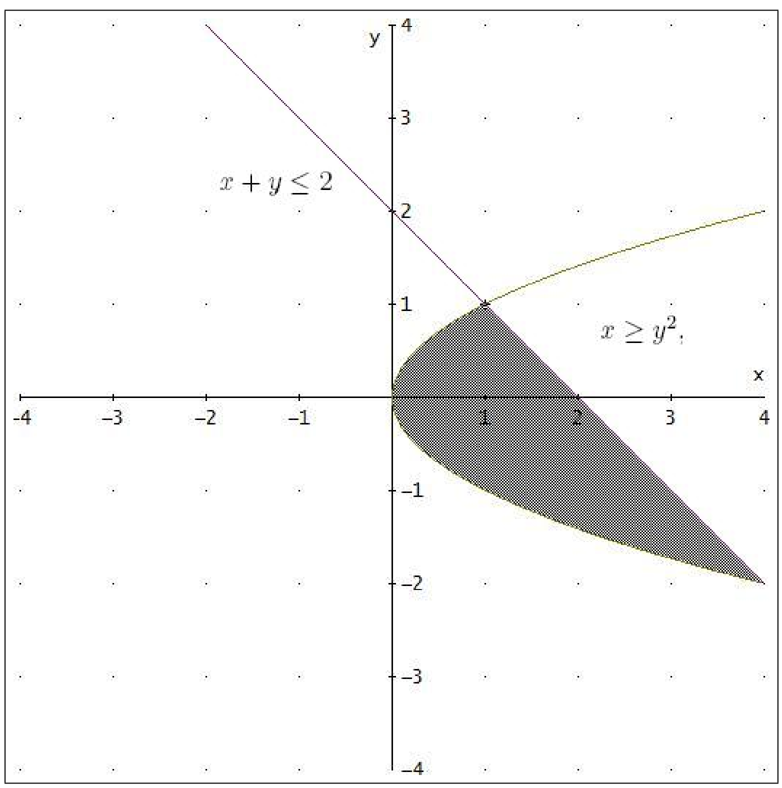


Figura 8. $S: \quad x \geq y^2, \quad x+y \leq 2$

L'insieme S, vedi Figura 8, é misurabile secondo Peano Jordan perché la sua frontiera é composta

- da un segmento,
- da un arco di parabola,

entrambi grafici di funzioni continue e quindi insiemi di area esterna nulla.
L'area di S é, per definizione,

$$A(S) = \iint_S dx\,dy$$

integrale doppio che si calcola per riduzione osservato che S é un dominio normale rispetto all'asse y

$$S := \{-2 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq 2 - y\}$$

e quindi

$$\iint_S dx\,dy = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y} dx = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy = \frac{9}{2}$$

7. Esercizio

Calcolare il volume del cilindro $C \subseteq \mathbb{R}^3$ *determinato da*

$$C := \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + x \right\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Un calcolo.... quasi gratuito: il cilindro C é costruito sull'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

e ha tetto il piano $z = 1 + x$, piú alto se $x > 0$ meno alto se $x < 0$.
Nell'ellisse la parte $x < 0$ e la parte $x > 0$ sono simmetriche.
Il volume non cambia se pensiamo al tetto orizzontale, $z = 1$.
Il volume di quest'ultimo,

$$\textit{base} \times \textit{altezza}$$

vale, essendo l'altezza 1, l'area dell'ellisse, $\pi\, a\, b$, in questo caso 2π.

Naturalmente il volume é, per definizione,

$$V(C) = \iint_E (1 + x)\,dx\,dy, \qquad E : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

Il dominio di integrazione E é normale, sia rispetto all'asse x che a quello y:

$$E : -2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$E : -1 \leq y \leq 1, \quad -2\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2\sqrt{1-y^2}$$

L'integrale doppio puó quindi essere calcolato per riduzione:

$$\iint_E (1+x)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} (1+x)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} 2(1+x)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\pi$$

ovvero servendosi dell'altra normalitá

$$\iint_E (1+x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} (1+x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[(1+2\sqrt{1-y^2})^2 - (1-2\sqrt{1-y^2})^2\right] dy =$$

$$= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy = 2\pi$$

8. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_R |2y-x|^3\,dx\,dy, \quad R := \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione:

Tenuto presente che

$$|2y-x| = \begin{cases} 2y-x & y \geq \frac{1}{2}x \\ \\ x-2y & y \leq \frac{1}{2}x \end{cases} \rightarrow |2y-x|^3 = \begin{cases} (2y-x)^3 & y \geq \frac{1}{2}x \\ \\ (x-2y)^3 & y \leq \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Detti

$$R_+ : R \cap \{y \geq \frac{1}{2}x\}, \quad R_- : R \cap \{y \leq \frac{1}{2}x\}$$

riesce

$$\iint_R |2y-x|^3\,dx\,dy = \iint_{R_+} (2y-x)^3\,dx\,dy + \iint_{R_-} (x-2y)^3\,dx\,dy$$

Evidenti ragioni di simmetria conducono del resto a riconoscere che

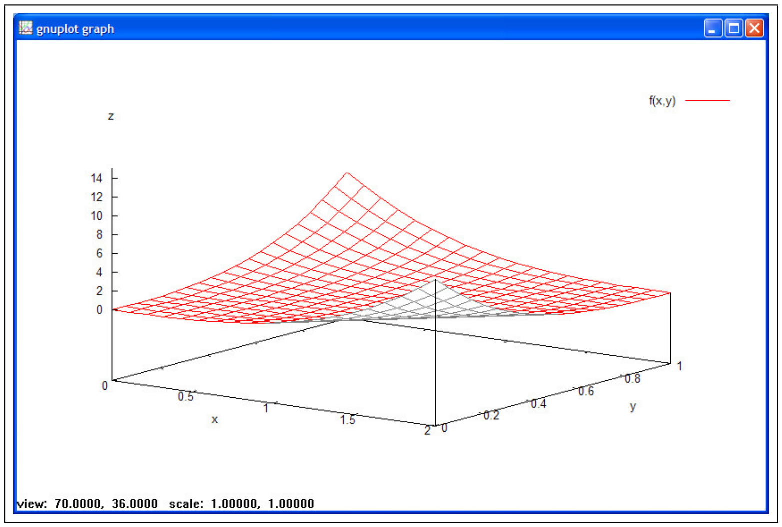


FIGURA 9. $|2y-x|^3$

$$\iint_{R_+} (2y-x)^3\,dx\,dy = \iint_{R_-} (x-2y)^3\,dx\,dy$$

e quindi

$$\iint_R |2y-x|^3\,dx\,dy = 2\iint_{R_+} (2y-x)^3\,dx\,dy$$

Il dominio R_- é normale rispetto all'asse x

$$R_-: \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}x$$

pertanto l'integrale doppio su R_- si calcola per riduzione

$$\iint_{R_-} (x-2y)^3\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} (x-2y)^3\,dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{8}\,x^4\,dx = \frac{4}{5}$$

e quindi

$$\iint_R |2y-x|^3\,dx\,dy = 2\,\frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

Osservazione 8.1. *La funzione integranda* $|2y-x|^3$ *ha il grafico di Figura 9: nonostante nella sua espressione figuri il modulo il grafico si presenta privo di angolature.*
Non deve sorprendere: la potenza 3 *maggiore di* 1 *ha eseguito il miracolo !*
Per semplicitá basta pensare all'esponente 2

$$|2y-x|^2 = (2x-y)^2$$

che... ammazza il modulo e tutte le sue patologie!

9. Esercizio

Sia $f(x,y) = x+y$, [2] *calcolare gli integrali*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy, \qquad \Omega : |x|+|y| \leq 2.$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Il dominio di integrazione Ω é diviso dalla retta $x+y=0$ in due parti uguali e simmetriche

$$\Omega_- = \Omega \cap \{x+y \leq 0\}, \quad \Omega_+ = \Omega \cap \{x+y \geq 0\}$$

Anche la funzione integranda é simmetrica rispetto alla retta $x+y=0$: in Ω_- riesce $x+y \leq 0$, in Ω_+ riesce $x+y \geq 0$.

$$\iint_{\Omega_-}(x+y)\,dx\,dy = -\iint_{\Omega_+}(x+y)\,dx\,dy \quad \to \quad \iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy = 0$$

Per quanto concerne l'integrale del modulo, $|f(x,y)|$ prende gli stessi valori sia in Ω_- che in Ω_+ quindi

$$\iint_\Omega |x+y|\,dx\,dy = 2\iint_{\Omega_+}(x+y)\,dx\,dy$$

L'ultimo integrale doppio puó essere calcolato ricorrendo ad un cambiamento di coordinate affine

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases} \qquad |\det(A)| = \frac{1}{2}$$

[2] Sul foglio era stata assegnata la funzione $f(x,y) = x+y+1$,, il calcolo rispetto ad essa si trova dopo.

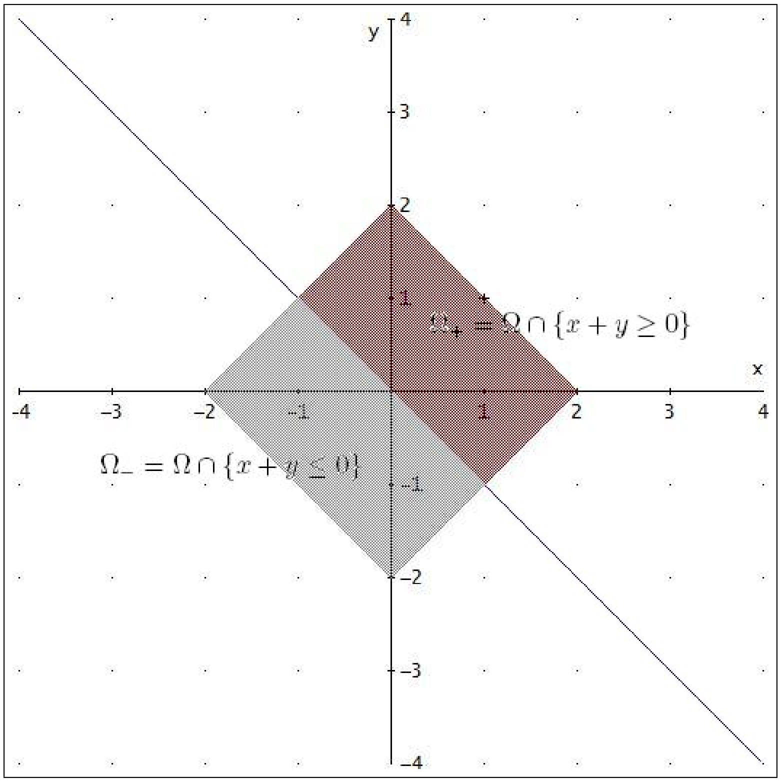


Figura 10. $\Omega : |x| + |y| \leq 2$

$$(x, y) \in \Omega_+ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ -2 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Ne segue, per la regola del cambiamento delle coordinate,

$$\iint_{\Omega_+} (x + y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} dv \int_{0}^{2} u\, du = 4$$

Ne segue

$$\iint_{\Omega} |x + y|\, dx\, dy = 8 \tag{4}$$

L'integrale (4) calcolato rappresenta il volume dell'edificio costruito su Ω con tetto $z = |x + y|$, vedi Figura 11.

Osservazione 9.1. *L'integrale doppio, cioé il volume dell'edificio coperto in Figura 11, poteva essere calcolato anche con gli strumenti della geometria elementare: ciascuna delle due metá, quella su Ω_- e quella su Ω_+, é infatti null'altro che un prisma a base triangolare.*
Il volume pertanto, di ciascuna delle due parti é

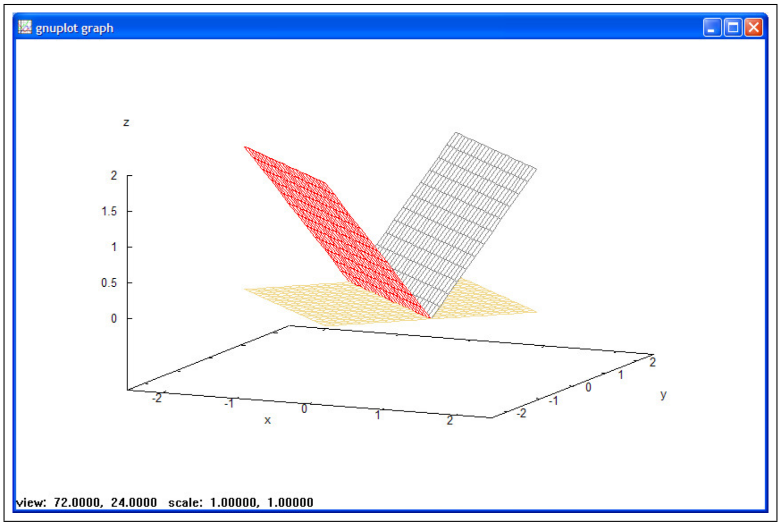


FIGURA 11. $\iint_\Omega |x+y|\,dx\,dy$

$$\textit{area triangolo} \times \textit{altezza} = \tfrac{1}{2} 2\sqrt{2}\, 2\sqrt{2} = 4$$

Il volume totale é quindi 8 come trovato prima.

$\boxed{\textit{Soluzione per } f(x,y) = x+y+1\textit{:}}$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy + \iint_\Omega dx\,dy = Area(\Omega) = 8$$

La regola del cambiamento delle coordinate, precedente vale naturalmente anche per

$$\iint_\Omega |x+y+1|\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} dv \int_{-2}^{2} |u+1|\,du =$$
$$= 4\left\{\int_{-2}^{-1} (-u-1)\,du + \int_{-1}^{2} (u+1)\,du\right\} = 10$$

da cui

$$\iint_\Omega |x+y+1|\,dx\,dy = 10$$

10. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_R (x+y)\,e^{x+2y}\,dx\,dy, \quad R := \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

- sia servendosi della formula di riduzione

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\, e^{x+2y}\, dy \right) dx$$

- sia dell'altra, equivalente,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\, e^{x+2y}\, dx \right) dy$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\iint_R (x+y)\, e^{x+2y}\, dx\, dy = \frac{-3+e^2}{4} + \frac{e\ (1+e^2)}{4}$$

$$\int_0^1 (x+y)\, e^{x+2y}\, dy = \frac{-\left(e^x\ (-1+2\,x)\right)}{4} + \frac{e^{2+x}\ (1+2\,x)}{4}$$

$$\int_0^1 (x+y)\, e^{x+2y}\, dx = -\left(e^{2\,y}\ (-1+y)\right) + e^{1+2\,y}\, y$$

Gli integrali delle due espressioni trovate riproducono il valore precedentemente calcolato.

Osservazione 10.1. *La conoscenza*[3] *del noto integrale indefinito*

$$\int t\, e^t\, dt = t\,(e^t - 1)$$

e l'espressione della funzione integranda come

$$(x+y)\, e^{x+2y} = e^y\, (x+y)\, e^{x+y}$$

consentono l'espressione

$$\iint_R (x+y)\, e^{x+2y}\, dx\, dy = \int_0^1 e^y\, dy \int_0^1 (x+y)\, e^{x+y}\, dx =$$

$$= \int_0^1 e^y\, dy \int_y^{1+y} t\, e^t\, dt = ...$$

[3]Impostazione osservata da uno degli studenti del Corso

11. Esercizio

Calcolare il laplaciano $\triangle f = f_{xx} + f_{yy}$ *della funzione radiale* $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^3$.
Posto in generale

$$f(x, y) = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- *determinare le derivate parziali* $f_x(x, y)$ *e* $f_y(x, y)$ *tramite la derivata prima* $\varphi'(r)$,
- *calcolare il laplaciano* $\triangle f$ *tramite le derivate* $\varphi'(r)$ *e* $\varphi''(r)$.

Soluzione:

Posto $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(1 + r^2)^2\, 2\, r\, r_x = 6(1 + r^2)^2\, r\, r_x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(1 + r^2)^2\, 2\, r\, r_y = 6(1 + r^2)^2\, r\, r_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6(1 + r^2)(2\, r\, r_x)^2 + 6(1 + r^2)^2 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 6(1 + r^2)(2\, r\, r_y)^2 + 6(1 + r^2)^2 \end{cases}$$

Ne segue

$$\triangle\, f(x, y) = 24(1 + r^2)r^2 + 12(1 + r^2)^2 = 36\, r^4 + 48\, r^2 + 12$$

Se $f(x, y) = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la regola di derivazione delle funzioni composte produce

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \varphi'(r)\, r_x \\[2ex] f_y(x, y) = \varphi'(r)\, r_y \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = \varphi''(r)(r_x)^2 + \varphi'(r)\, r_{xx} \\[2ex] f_{yy}(x, y) = \varphi''(r)(r_y)^2 + \varphi'(r)\, r_{yy} \end{cases}$$

Tenuto conto che

$$r_x = \frac{x}{r}, \; r_y = \frac{y}{r}, \; r_{xx} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \; r_{yy} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}$$

si ha

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \dfrac{\varphi'(r)}{r}\, x \\[3ex] f_y(x, y) = \dfrac{\varphi'(r)}{r}\, y \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = \varphi''(r) \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \varphi'(r)\, \dfrac{r^2 - x^2}{r^3} \\[3ex] f_{yy}(x, y) = \varphi''(r) \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \varphi'(r)\, \dfrac{r^2 - y^2}{r^3} \end{cases}$$

Ne segue

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=\varphi''(r)\left\{\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\}+\varphi'(r)\left\{\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}\right\}$$

$$\triangle\, f=\varphi''(r)+\frac{1}{r}\,\varphi'(r)$$

Verifichiamo la formula generale sull'esempio precedente di

$$\varphi(r)=(1+r^2)^3=1+3r^2+3r^4+r^6$$

$$\triangle\, f=6+36r^2+30r^4+6+12r^2+6r^4=12+48r^2+36r^4$$

...esattamente il risultato precedente !

CAPITOLO 30

Foglio 6

1. Esercizio

Determinare massimo e minimo di

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x + 2y - 1$$

nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

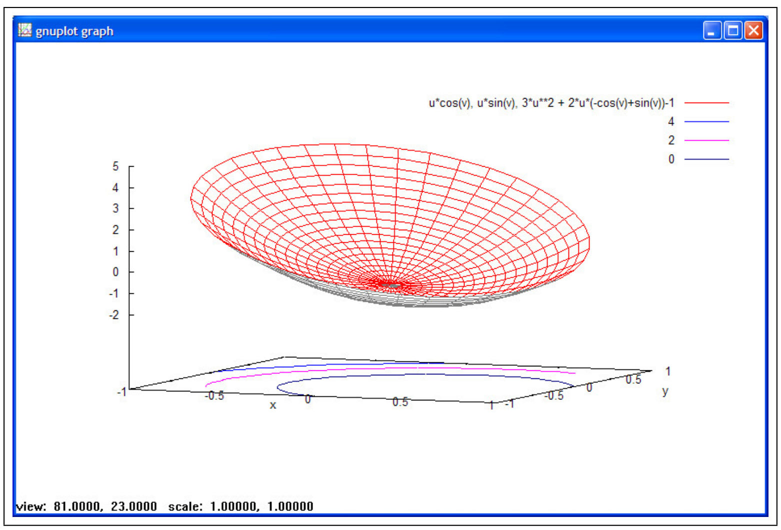


FIGURA 1. $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x + 2y - 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$

- Punti critici interni al cerchio:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = 6y + 2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (x_0, y_0) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \in \overset{o}{C}$$

$$f(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{5}{3} \approx -1.66$$

- Valori sulla circonferenza frontiera:

$$x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(t) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F(t) = f(x(t), y(t)) = 3 - 2\cos(t) + 2\sin(t) - 1$$

$$F'(t) = 2(\sin(t) + \cos(t)) = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{3}{4}\pi,\ t_2 = -\frac{1}{4}\pi$$

$$F(\frac{3}{4}\pi) = 2(1+\sqrt{2}) \approx 4.82,\ F(-\frac{1}{4}\pi) = 2(1-\sqrt{2}) \approx -0.83$$

- Confrontando i tre valori trovati si riconosce, vedi Figura 1, che

$$\min_{x^2+y^2\le 1} f(x,y) = -\frac{5}{3}, \quad \max_{x^2+y^2\le 1} f(x,y) = 2(1+\sqrt{2})$$

2. Esercizio

Sia

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + (2x^2+3y^2)^2,$$

determinare massimo e minimo di f nell'insieme E delimitato dall'ellisse $\quad 2x^2+3y^2 = 4$.

$\boxed{\text{\textit{Soluzione:}}}$

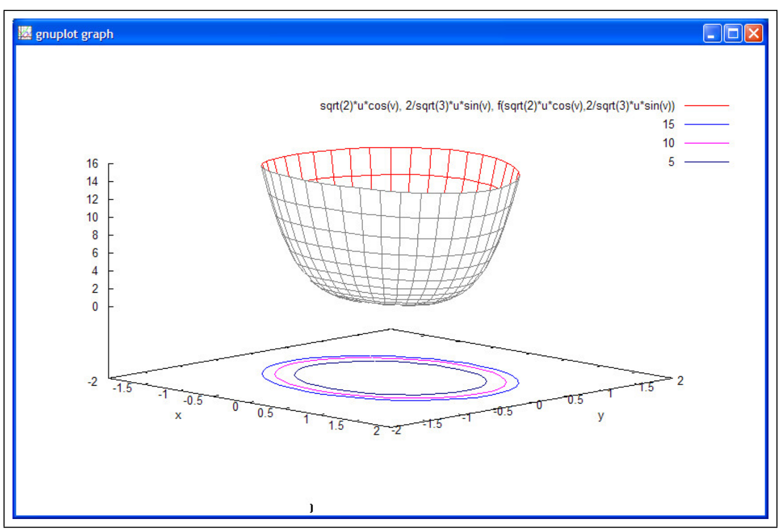


FIGURA 2. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + (2x^2+3y^2)^2, \quad 2x^2 + 3y^2 \le 4$

- Punti critici interni:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2x + 2(2x^2+3y^2)4x = 0 \\ f_y(x,y) = -2y + 2(2x^2+3y^2)6y = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x(-1+4(2x^2+3y^2))=0 \\ f_y(x,y)=2y(-1+6(2x^2+3y^2))=0 \end{array} \right. \qquad \to \qquad \left\{ \begin{array}{l} (0,0) \\ (0,\pm\frac{1}{\sqrt{18}}) \\ (\pm\frac{1}{\sqrt{8}},0) \end{array} \right.$$

$$f(0,0)=1, \quad f(0,\pm\frac{1}{\sqrt{18}})=\frac{35}{36}\approx 0.97, \quad f(\pm\frac{1}{\sqrt{8}},0)=\frac{15}{16}\approx 0.93$$

- Valori sulla frontiera:

$$x(t)=\sqrt{2}\cos(t), \quad y(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(t), \quad t\in[0,2\pi] \quad \to$$

$$\to \quad F(t)=\frac{47}{3}-\frac{2}{3}\cos^2(t)$$

$$0\le\cos^2(t)\le 1 \quad \to \quad \frac{45}{3}\le F(t)\le\frac{47}{3}$$

- Il massimo e il minimo sono evidentemente assunti sulla frontiera

$$\min_{2x^2+3y^2\le 4} f(x,y)=\frac{45}{3}, \quad \max_{2x^2+3y^2\le 4} f(x,y)=\frac{47}{3}$$

3. Esercizio

Sia

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

- *determinare i punti critici,*
- *esaminare se f sia dotata di minimo e/o massimo,*
- *determinare l'immagine $f(\mathbb{R}^2)$.*

Soluzione:

La funzione assegnata é radiale: indicato con

$$r^2=x^2+y^2$$

la funzione di r da cui deriva $f(x,y)$ é $\varphi(r)=r^2\,e^{-r^2}$.

- Punti critici:

$$\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow \varphi'(r)=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r=0 \\ r=1 \end{array} \right.$$

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(1)=\frac{1}{e}$$

- Tenuto presente che

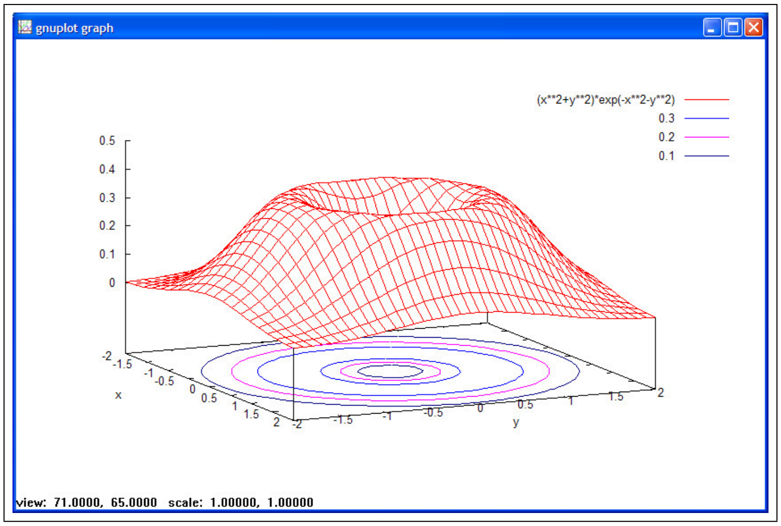


FIGURA 3. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

- $\varphi(r) \geq 0$ discende che $\varphi(0) = 0$ é il minimo di $\varphi(r)$ e quindi di $f(x, y)$
- $\varphi(r)$ é crescente per $r \in [0, 1]$ e decrescente per $r > 1$ si riconosce che $\varphi(1) = \frac{1}{e}$ é il massimo e quindi anche il massimo di $f(x, y)$

Pertanto, vedi Figura 3,

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = 0, \quad \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{1}{e}$$

- Da quanto visto sopra riesce

$$f(\mathbb{R}^2) \subseteq [0, \frac{1}{e}]$$

Essendo $f(x, y)$ continua ed $\mathbb{R}^2$ connesso per poligonali riesce, per il Teorema dei Valori intermedi

$$f(\mathbb{R}^2) = [0, \frac{1}{e}]$$

4. Esercizio

Sia $f(x, y) = \cos(x + y) - e^{x^2+y}$

- *determinare i polinomi di Taylor* $P_1(x, y)$ *e* $P_2(x, y)$ *di punto iniziale l'origine ed* $n = 1$ *e* $n = 2$,
- *posto* $g(x, y) = f(x, y) - P_1(x, y)$ *esaminare se l'origine é punto di massimo o di minimo per* g.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Prepariamo la tabella dei valori necessari a costruire i due polinomi di Taylor richiesti

$$\begin{array}{ll|ll}
f(x,y) & = \cos(x+y) - e^{x^2+y} & f(0,0) = & 0 \\
f_x(x,y) & = -\sin(x+y) - 2x\, e^{x^2+y} & f_x(0,0) = & 0 \\
f_y(x,y) & = -\sin(x+y) - \ e^{x^2+y} & f_y(0,0) = & -1 \\
f_{xx}(x,y) & = -(2+4x^2)\, e^{x^2+y} - \cos(x+y) & f_{xx}(0,0) = & -3 \\
f_{xy}(x,y) & = -2\, e^{x^2+y}\, x - \cos(x+y) & f_{xy}(0,0) = & -1 \\
f_{yy}(x,y) & = -e^{x^2+y} - \cos(x+y) & f_{yy}(0,0) = & -2
\end{array}$$

Ne segue

$$P_1(x,y) = -y, \quad P_2(x,y) = -y + \frac{1}{2}\left\{-3x^2 - 2xy - 2y^2\right\}$$

Posto

$$g(x,y) = \cos(x+y) - e^{x^2+y} + y$$

riesce (ovviamente)

$$\begin{cases} g_x(0,0) = 0, \quad g_y(0.0) = 0, \\ g_{xx}(0,0) = f_{xx}(0,0) = -3 \\ g_{xy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = -1 \\ g_{yy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = -2 \end{cases}$$

Nell'origine sono soddisfatte le condizioni sufficienti di punto di massimo per $g(x,y)$.
Infatti

$$g_{xx}(0,0) = -3 < 0, \quad g_{xx}(0,0).g_{yy}(0,0) - g_{xy}(0,0) = 5 > 0$$

Geometricamente questo

$$g(x,y) \le g(0,0)$$

significa che il grafico di $f(x,y)$ si trova, in un intorno dell'origine al di sotto del piano $z = -y$ tangente in quel punto.

5. Esercizio

Siano[1]

$$A : \{x \le -y^2\} \cup \{8\,y^2 \le x\}, \quad B : \{y \ge x^2\}$$

- *disegnare i due insiemi A e B*
- *detto $C = A \cap B$ provare che C é chiuso e limitato,*
- *determinare l'area di C*

[1]Attenzione: la definizione di A é cambiata, quella indicata nel Foglio 6 conteneva un errore.

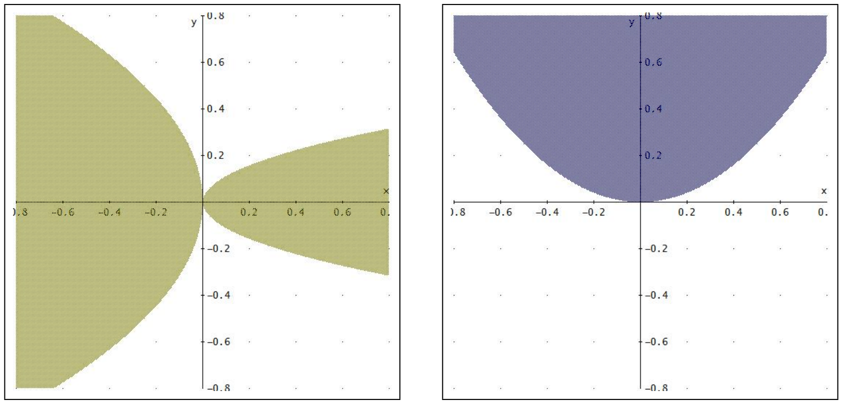


FIGURA 4. Gli insiemi A e B

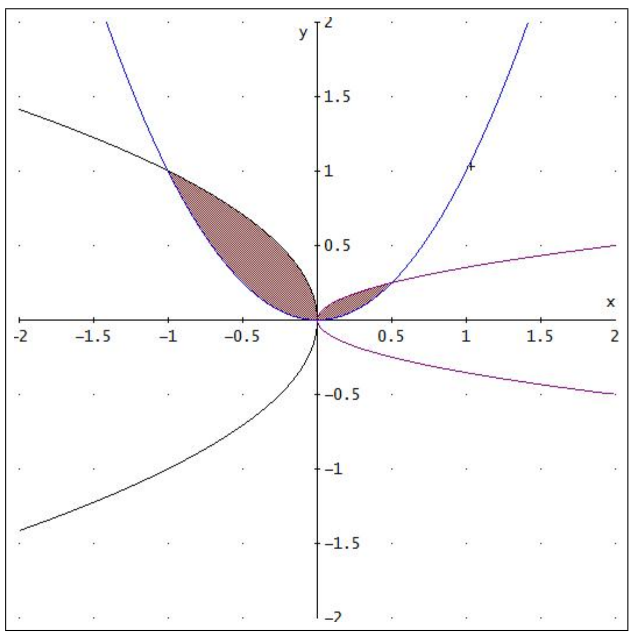


FIGURA 5. L'insieme $C = A \cap B$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Le Figure 4 e 5 mostrano chiaramente come C sia chiuso e limitato.

Determinate le intersezioni

$$A = (-1, 1), \quad B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

della $y = x^2$ con le altre due parabole, l'area si determina con due integrazioni,

$$Area(C) = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{\sqrt{-x}} dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}}} dy$$

ovvero

$$Area(C) = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{3}{8}$$

6. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_R \sin^2(x+y)\, dx\, dy, \quad R: \{0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\iint_R \sin^2(x+y)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_0^\pi \sin^2(x+y)\, dx$$

La funzione $\sin^2(t)$ é periodica quindi...

$$\int_0^\pi \sin^2(x+y)dx = \int_y^{\pi+y} \sin^2(t)dt = \int_0^\pi \sin^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\pi$$

quindi

$$\iint_R \sin^2(x+y)\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi\, dy = \frac{1}{2}\pi$$

7. Esercizio

Sia

$$S: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \le y \le 2x\}$$

- *disegnare S*
- *calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_S x\, e^y\, dx\, dy$$

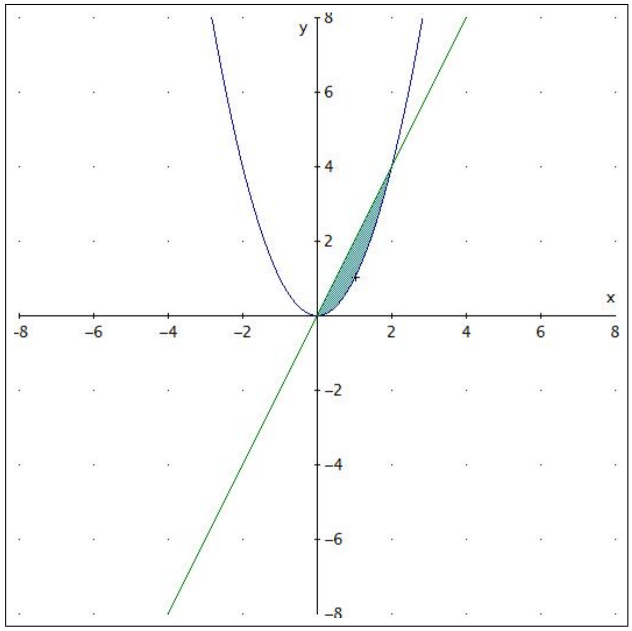


Figura 6. L'insieme $S : x^2 \leq y \leq 2x$

Soluzione:

S é un dominio normale

$$S: \ 0 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 2x$$

pertanto l'integrale doppio richiesto si decompone in

$$\iint_S x\, e^y \, dx\, dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} x\, e^y \, dy = \int_0^2 x\, dx \int_{x^2}^{2x} e^y \, dy$$

Tenuto conto che

$$\int_{x^2}^{2x} e^y \, dy = e^{2x} - e^{x^2}$$

si ha

$$\iint_S x\, e^y \, dx\, dy == \int_0^2 \left(x\, e^{2x} - x\, e^{x^2} \right) dx = \frac{3}{4} + \frac{e^4}{4}$$

8. Esercizio

Posto

$$F(u) = \iint_{T_u} y\, e^x \, dx\, dy,$$

essendo

$$T_u: \ \{0 \leq y \leq 1 - \frac{|x|}{1+|u|}, \quad -1 - |u| \leq x \leq 1 + |u|\}$$

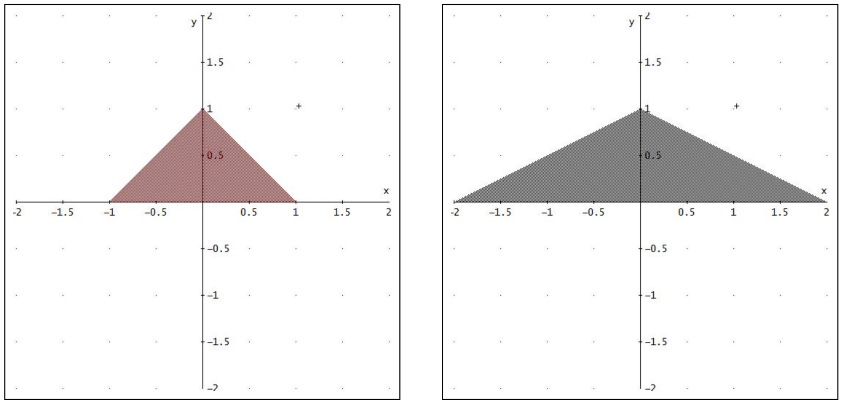


FIGURA 7. T_0 e T_1

- *disegnare* T_0 *e* T_1,
- *calcolare* $F(0)$ *e* $F(1)$,
- *determinare l'immagine* $F(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$F(0) = \iint_{T_0} y\, e^x\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} e^x\, dx \int_0^{1-|x|} y dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-|x|)^2\, e^x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_{-1}^{0} (1+x)^2\, e^x\, dx + \int_0^1 (1-x)^2\, e^x\, dx \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{ (1+x^2)\, e^x\, \Big|_{-1}^{0} + \; e^x\, \left(5 - 4\,x + x^2\Big|_0^1\right) \right\} = -2 - \frac{1}{e} + e$$

$$F(1) = \iint_{T_1} y\, e^x\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} e^x\, dx \int_0^{1-|x|/2} y dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (1-|x|/2)^2\, e^x\, dx = \frac{-4 - e^{-2} + e^2}{4}$$

Tenuto presente che[2]

- $F(u) \geq 0\ \forall u \in \mathbb{R}$,
- $F(u)$ é continua come funzione di u,
- che $u_1 \leq u_2 \quad \to \quad T_{u_1} \subseteq T_{u_2}$
- che F é illimitata superiormente,

[2]Si tratta di affermazioni certamente non ovvie...

si riconosce che

$$F(\mathbb{R}) = [F(0),\, +\infty) = \left[-2 - \frac{1}{e} + \, e,\ +\infty\right)$$

e

9. Esercizio

Posto

$$F(x,y) = \int_{2x}^{3y} \cos(t^2)\, dt$$

- *determinare il polinomio di Taylor di primo ordine e punto iniziale* $(0,0)$ *relativo ad* F.
- *provare che* $F \in C^1$, *e calcolare la derivata direzionale*

$$\frac{dF}{d\overrightarrow{n}}(0,0), \quad \overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Soluzione:

Consideriamo la funzione

$$G(u,v) = \int_{u}^{v} \cos(t^2)\, dt \quad G \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

si tratta di una funzione di classe C^1 : le sue derivate parziali prime sono (Teorema di Torricelli)

$$G_u(u,v) = -\cos(u^2), \quad G_v(u,v) = \cos(v^2)$$

La funzione $F(x,y)$ assegnata é null'altro che la funzione composta

$$F(x,y) = G(2x, 3y), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

Pertanto dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$F_x(x,y) = G_u(2x,3y)\, 2, \quad F_y(x,y) = G_v(2x,3y)\, 3$$

Siamo quindi in grado di produrre la tabella di valori seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x(x,y) = -2\cos(4x^2) \\ F_y(x,y) = 3\cos(9y^2) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} F_x(0,0) = -2 \\ F_y(0,0) = 3 \end{array} \right.$$

Tenuto conto che $F(0,0) = 0$ si ha quindi il seguente polinomio di Taylor di ordine $n = 1$

$$P_1(x,y) = -2x + 3y$$

Tenuto conto della formula delle derivate direzionali applicabile alle funzioni di classe C^1 si ha

$$\frac{dF}{d\overrightarrow{n}}(0,0) = \{-2,\, 3\} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10. Esercizio

Calcolare il volume del solido

$$S:\ \left\{(x,y)\in\{0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\},\quad 0\le z\le x^2+y^2\right\}$$

Esprimere il valore dell'integrale doppio

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

tramite il teorema della media integrale.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy=\frac{10}{3}$$

Applicare il teorema della media significa

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy = Area(S)(\xi^2+\eta^2)$$

essendo $(\xi,\eta)\in S$ opportuno.
Tenuto conto che

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{10}{3},\quad Area(S)=2$$

si tratta di trovare $(\xi,\eta)\in S$ tali che

$$\frac{10}{3}=2\,(\xi^2+\eta^2)\Leftrightarrow \xi^2+\eta^2=\frac{10}{6}$$

Sono punti adatti quindi tutti i punti della circonferenza

$$x^2+y^2=\frac{10}{6}$$

di centro l'origine e raggio $R\simeq 1.29$ interni al rettangolo S.
Ce ne sono molti...

CAPITOLO 31

Foglio 7

1. Esercizio

Assegnata la regione

$$\Omega : \left\{ x-3 \leq y \leq x+1, \quad -\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \leq y \leq -\frac{1}{3}x+5 \right\}$$

- *disegnare* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2_{x,y}$
- *calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_\Omega (y-x)\, dx\, dy$$

servendosi del cambio di coordinate

$$\Phi := \begin{cases} u = y - x \\ \\ v = y + \dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'insieme Ω puó essere letto anche come

$$\Omega : \left\{ -3 \leq y-x \leq 1, \quad \frac{7}{3} \leq y+\frac{1}{3}x \leq 5 \right\}$$

Quindi con il cambiamento di coordinate suggerito

$$\begin{cases} u = y - x \\ \\ v = y + \dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

Si riconosce che

$$(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow (u,v) \in R : \begin{cases} -3 & \leq u \leq & 1 \\ \dfrac{7}{3} & \leq v \leq & 5 \end{cases}$$

Per applicare la formula del cambiamento di coordinate occorre esprimere x, y in funzione di u, v : in altri termini risolvere l'espressione di Φ rispetto ad x, y.

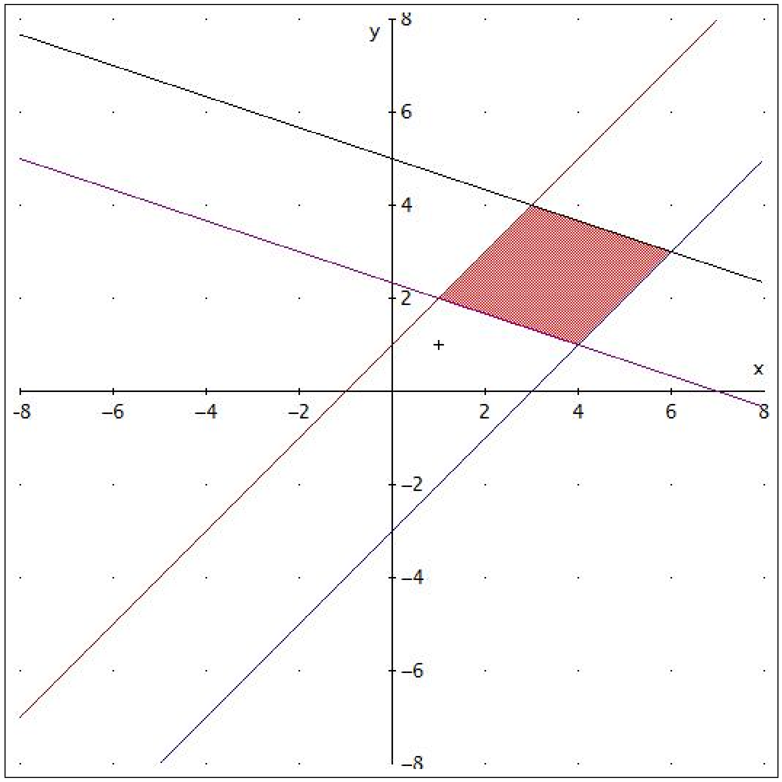


FIGURA 1. $\Omega : \left\{x - 3 \le y \le x + 1, \quad -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \le y \le -\frac{1}{3}x + 5\right\}$

$$\begin{cases} x = & -\dfrac{3}{4}u & +\dfrac{3}{4}v \\ \\ y = & \dfrac{1}{4}u & -\dfrac{3}{4}v \end{cases}$$

Detta A la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(A) = -\frac{3}{4}$$

l'integrale doppio si trasforma al modo seguente

$$\iint_\Omega (y - x)\, dx\, dy = \iint_R u \left| -\frac{3}{4} \right| du\, dv = \frac{3}{4} \int_{7/3}^{5} dv \int_{-3}^{1} u\, du =$$

$$= \frac{3}{4} \int_{7/3}^{5} (-4)\, dv = -8$$

Osservazione 1.1. *Osservate le due matrici B quella della trasformazione Φ assegnata e quella A relativa alle espressioni di x, y in funzione di u, v :*

- *A e B sono una l'inversa dell'altra,*
- $\det(A) = (\det(B))^{-1}$

Quindi la fatica fatta per ricavare x e y in funzione di u e v era superfllua:

- *giá sapevamo che $y - x$ diventava u*
- *mancava solo il fattore* |determinante jacobiano| *che peró era certamente pari a*

$$\left| \frac{1}{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}} \right| = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

2. Esercizio

Sia Q il quadrilatero (convesso) determinato dai punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, -2)$, $D = (-1, -1)$:

- *determinare l'area $\iint_Q dx\, dy$*
- *determinare un cambiamento di coordinate affine che trasformi Q in un quadrato con i lati paralleli agli assi,*
- *calcolare il precedente integrale tramite il cambiamento di coordinate offerto da tale trasformazione.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

É facile riconoscere, vedi Figura 2, che Q é un rettangolo di lati

$$\overline{AB} = \sqrt{2}, \quad \overline{AD} = 2\sqrt{2}$$

e quindi di area

$$\iint_Q dx\, dy = \sqrt{2}\ .\ 2\sqrt{2} = 4$$

La trasformazione affine che trasformi Q in un quadrato puó essere costruita con

- una rotazione di 45^o in senso orario,
- una conveniente contrazione per passare da un rettangolo a un quadrato.

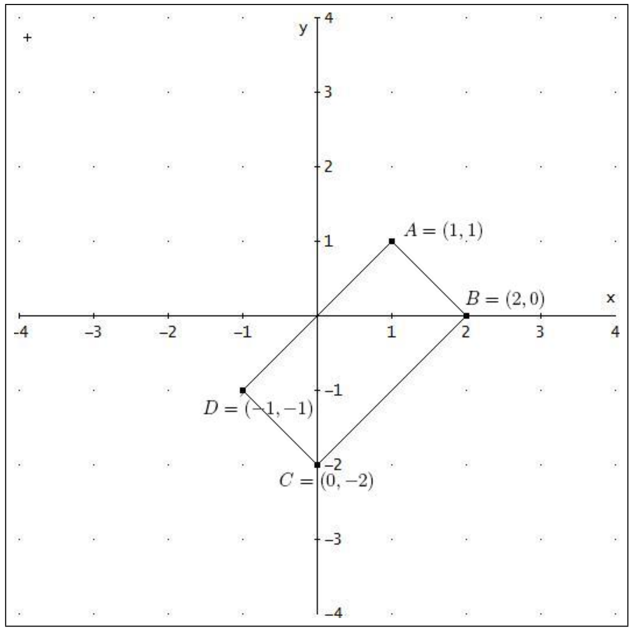


FIGURA 2. $Q : \{A = (1,1), \quad B = (2,0), \quad C = (0,-2), \quad D = (-1,-1)\}$

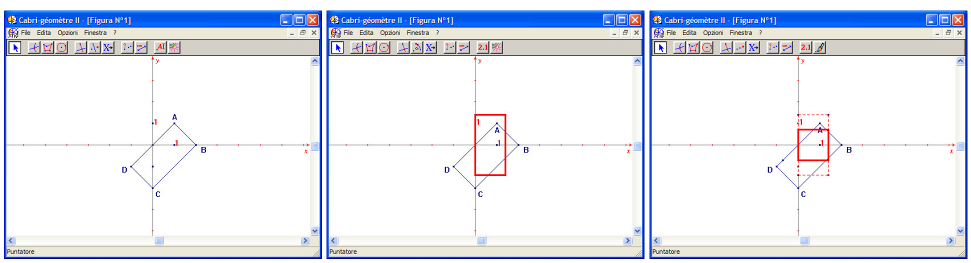


FIGURA 3. Da Q obliquo al rettangolo coordinato e al quadrato.

La rotazione di $\pi/4$ é determinata dalla matrice

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e detta

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

la trasformazione ad essa associata, riesce

$$\begin{cases} A = \Phi[(0,\ \sqrt{2})], \\ B = \Phi[(\sqrt{2},\ \sqrt{2})], \\ C = \Phi[(0,\ -\sqrt{2})], \\ D = \Phi[(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})], \end{cases}$$

Quindi, vedi Figura 3 in centro,

$$Q \ = \ \Phi(R), \quad R : \{0 \leq u \leq \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}\}$$

Per ridursi ad un quadrato, vedi Figura 3 a destra, basta considerare la contrazione

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$(u, v) \in R \Leftrightarrow (\xi, \eta) \in \Omega : \begin{cases} 0 \ \leq \ \xi \ \leq \ \sqrt{2}, \\ \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \leq \ \eta \ \leq \ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ω é un quadrato...
La matrice della trasformazione affine da (ξ, η) a (x, y) é il prodotto

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Il determinante di tale matrice prodotto vale 2 : la regola del cambio di coordinate negli integrali doppi afferma che

$$Area(Q) = \iint_Q dx\,dy = \iint_\Omega 2\,d\xi\,d\eta = 2\,Area(\Omega)$$

Uguaglianza riconoscibile: Q ha area 4 e Ω, quadrato di lato $\sqrt{2}$ del piano (ξ, η) ha area 2 : il conto torna...

3. Esercizio

Calcolare l'area della regione

$$\Omega : \ \{(y - x)^2 + x^2 \leq 10\}$$

servendosi del cambiamento di coordinate affine

$$y - x = u, \quad x = v$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

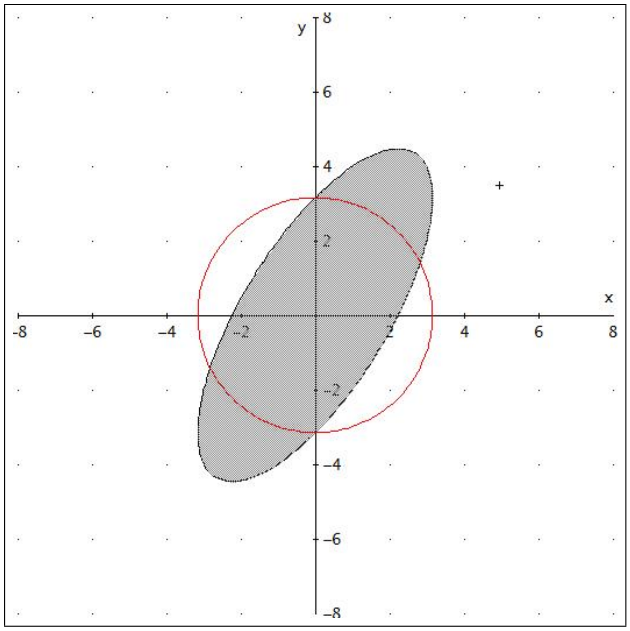


FIGURA 4. $\Omega : \{(y-x)^2 + x^2 \leq 10\}$

Posto $y - x = u, \quad x = v$ si ha

$$(y-x)^2 + x^2 \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + v^2 \leq 10$$

ovvero, detto $\mathcal{C}$ il cerchio $u^2 + v^2 \leq 10$ si ha

$$(x, y) \in \Omega \Leftrightarrow (u, v) \in \mathcal{C}$$

Ricavati dalle $y - x = u, \quad x = v$

$$\begin{cases} x = v \\ y = u + v \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

la regola del cambiamento di coordinate implica

$$Area(\Omega) = \iint_\Omega dx\, dy = \iint_{\mathcal{C}} |-1|\, du\, dv = Area(\mathcal{C}) = 10\,\pi$$

4. Esercizio

Calcolare i due integrali doppi seguenti

$$x_G = \frac{\iint_E x\, dx\, dy}{\iint_E \, dx\, dy}, \quad y_G = \frac{\iint_E y\, dx\, dy}{\iint_E \, dx\, dy}$$

essendo

$$E : \left\{ x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Il punto $G = (x_G,\, y_G)$ *rappresenta il baricentro della regione* E.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La regione E, primo quarto di ellisse, si rappresenta vantaggiosamente con le coordinate polari-ellittiche seguenti

$$\begin{cases} x = a\,\rho\,\cos(\theta) \\ y = b\,\rho\,\sin(\theta) \end{cases} \quad \rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$$

Calcoliamo lo jacobiano

$$J(\rho,\, \theta) = \det \begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -a\rho\sin(\theta) \\ b\,\sin(\theta) & b\,\rho\,\cos(\theta) \end{pmatrix} = a\,b\,\rho$$

La regola del cambiamento delle coordinate produce pertanto

$$\iint_E x\,dx\,dy \quad = a\,b \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 a\,\rho\,\cos(\theta)\rho\,d\rho \quad = \frac{1}{3}a^2 b$$

$$\iint_E y\,dx\,dy \quad = a\,b \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 b\,\rho\,\sin(\theta)\rho\,d\rho \quad = \frac{1}{3}ab^2$$

$$\iint_E dx\,dy \quad = a\,b \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho \quad = \frac{\pi}{4}ab$$

da cui

$$x_G = \frac{\frac{1}{3}a^2 b}{\frac{\pi}{4}ab} = \frac{4}{3\pi}a, \quad y_G = \frac{\frac{1}{3}ab^2}{\frac{\pi}{4}ab} = \frac{4}{3\pi}b$$

I valori approssimati sono

$$x_G \simeq 0.424\,a, \quad y_G \simeq 0.424\,b$$

In Figura 5 si riconosce, scelti $a = 2$ e $b = 1$ la posizione del punto $G = (x_G, y_G)$, il baricentro del quarto d'ellisse, quasi il centro...

5. Esercizio

Calcolare gli integrali doppi

$$\iint_{C_i} (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \qquad i = 1, 2$$

essendo C_1 *il cerchio di centro l'origine e raggio* 1 *e* C_2 *il cerchio di centro il punto* $(1, 1)$ *e ancora raggio* 1. *I due integrali rappresentano il momento d'inerzia di* C_1 *e* C_2 *rispetto all'origine.*

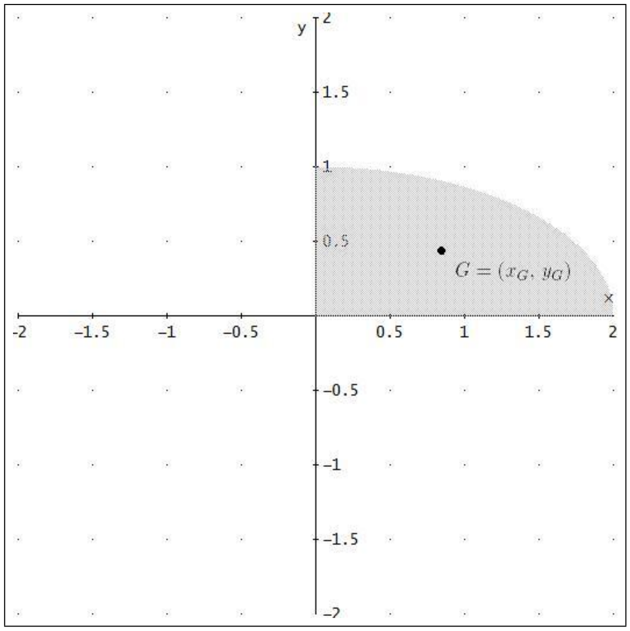


FIGURA 5. $x_G = \frac{4}{3\pi}a, \quad y_G = \frac{4}{3\pi}b$

Soluzione:

Per il calcolo del primo integrale ci serviamo delle coordinate polari

$$x = \rho\cos(\theta),\ y = \rho\,\sin(\theta), \quad J(\rho,\theta) = \rho$$

$$(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1$$

$$\iint_{C_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\,|\rho|\,d\rho = \frac{\pi}{2}$$

Per il calcolo del secondo integrale ci serviamo delle coordinate polari di centro $(1,1)$

$$x = 1+\rho\cos(\theta),\ y = 1+\rho\,\sin(\theta), \quad J(\rho,\theta) = \rho$$

si riconosce che con tali coordinate riesce ancora

$$(x,y) \in C_2 \Leftrightarrow 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1$$

e quindi

$$\iint_{C_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left\{(1+\rho\cos(\theta))^2 + (1+\rho\,\sin(\theta))^2\right\}|\rho|\,d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left\{2+\rho^2+2\,\rho(\cos(\theta)+\sin(\theta))\right\} |\rho|\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2+\rho^2)|\rho|\, d\rho + \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)+\sin(\theta)) d\theta \int_0^1 2\rho|\rho|\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2+\rho^2)|\rho|\, d\rho = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

Il risultato é stato ottenuto tenendo conto che

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta)+\sin(\theta)) d\theta = 0$$

6. Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy, \qquad \Omega : \{x^2+y^2 \le 1\ \}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

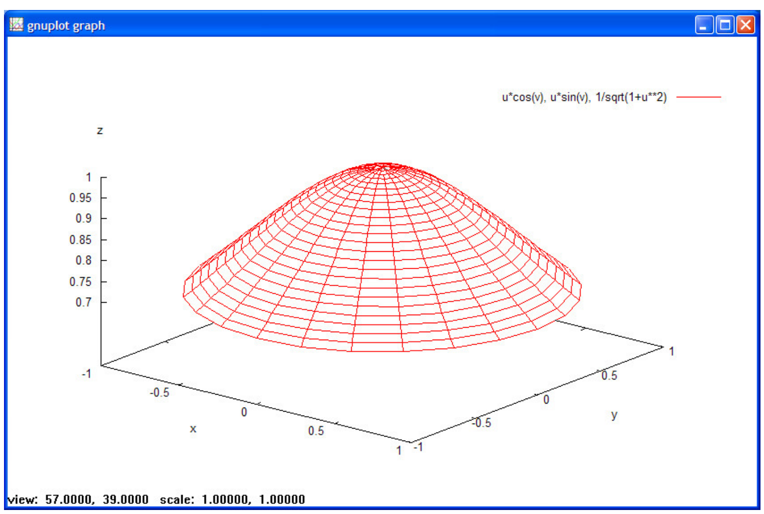


FIGURA 6. $z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad x^2+y^2 \le 1$

Per il calcolo dell'integrale ci serviamo delle coordinate polari

$$x = \rho\cos(\theta),\ y = \rho\,\sin(\theta), \quad J(\rho,\theta) = \rho$$

Riesce

$$(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1$$

e quindi

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\,|\rho| d\rho$$

Tenuto conto che

$$\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho = \left.\sqrt{1+\rho^2}\right|_0^1 = \sqrt{2}-1$$

si ha

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy = (\sqrt{2}-1)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\,\pi\,(\sqrt{2}-1)$$

Il valore trovato rappresenta il volume coperto dal tendone, di profilo iperbolico, grafico della funzione

$$z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad x^2+y^2 \le 1$$

vedi Figura 6.
Si noti che sul bordo, $x^2+y^2=1$ il tendone non arriva a terra, raggiunge la quota positiva

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Esercizio

Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega:\ \{x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \ z \ge 0\}$$

Soluzione:

Ci serviamo delle coordinate polari sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \\ z = \rho\cos(\varphi), \end{cases} \quad \to \quad J(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\sin(\varphi)$$

La regione Ω assegnata é la semisfera superiore

$$(x,y,z)\in\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \{0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$$

Dalla regola del cambiamento delle coordinate negli integrali tripli si ha pertanto

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\,\cos(\varphi)\,|\rho^2\sin(\varphi)|\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\, \sin(\varphi)\, d\varphi \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Il modulo presente nello Jacobiano é stato superato tenuto conto che nella regione d'integrazione assegnata si ha $\rho^2 \sin(\varphi) \geq 0$.

8. Esercizio

Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_C (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

sul cilindro

$$C : \left\{x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\right\}$$

servendosi delle coordinate cilindriche.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Le coordinate cilindriche sono

$$x = \rho \cos(\theta),\ y = \rho\, \sin(\theta),\ z = z, \quad J(\rho, \theta, z)\rho$$

Dalla forma del cilindro C assegnato si riconosce del resto che

$$(x, y, z) \in C \quad \Leftrightarrow \quad \{0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

La regola del cambiamento delle coordinate produce pertanto

$$\iiint_C dx\, dy\, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx\, dy \int_{-1}^1 (x^2 + z^2) dz =$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2x^2 + \frac{2}{3})\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(2\rho^2\, \cos^2(\theta) + \frac{2}{3}\right) |\rho| d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{7}{6}\pi$$

9. Esercizio

Sia Ω la buccia sferica

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

calcolare il volume di Ω, servendosi delle coordinate polari sferiche.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Dette ρ, φ, θ le coordinate sferiche riesce

$$(x, y, z) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq \rho \leq 2$$

Pertanto, tenuto presente che

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \sin(\varphi)\, \rho^2$$

si ha

$$Volume(\Omega) = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin(\varphi)\, d\varphi \int_1^2 \rho^2\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin(\varphi)\, d\varphi \int_1^2 \rho^2\, d\rho = 4\pi \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = 7\,\frac{4}{3}\pi$$

OSSERVAZIONE 9.1. *Il volume della buccia sferica Ω poteva essere ottenuto elementarmente sottraendo dal volume della sfera di raggio* 2 *quello della sfera di raggio* 1.

10. Esercizio

Calcolare il volume della regione limitata

$$\Omega : \{x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4.\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Posto

$$\begin{cases} x = u \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, v \\ \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, w \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad J(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

riesce

$$(x, y, z) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad (u, v, w) \in B_2 : \{u^2 + v^2 + w^2 \leq 4\}$$

da cui

$$\iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint_{B_2} |J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} Volume(B_2) = \frac{2^5}{3\sqrt{6}}\pi \simeq 13.68$$

OSSERVAZIONE 10.1. *Il volume dell'ellissoide*

$$\Omega: \ \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{4}y^2 + \frac{3}{4}z^2 \leq 1$$

si poteva calcolare con la nota formula

$$Volume(\Omega) = \frac{4}{3}\pi a\,b\,c = \frac{4}{3}\pi\, 2\sqrt{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}$$

11. Esercizio

Calcolare il volume della regione limitata dalla rotazione della funzione

$$x = 1 - |z|, \quad -1 \leq z \leq 1$$

intorno all'asse z, servendosi della formula dei solidi di rotazione.

Soluzione:

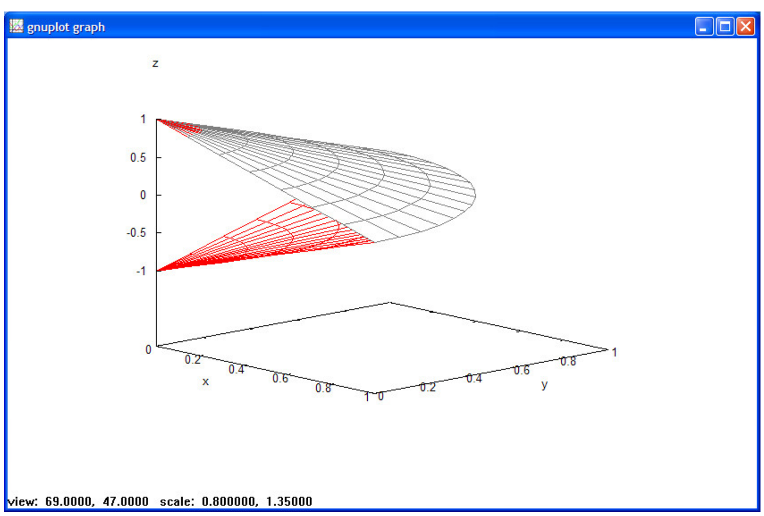


FIGURA 7. La porzione della superficie di rotazione relativa a $x \geq 0$, $y \geq 0$

L'ultima formula di pag. 258 delle Dispense fornisce, per la regione delimitata dalla rotazione di $x = \phi(z), \quad z \in [a, b]$ la formula

$$Volume(\Sigma) = \pi \int_a^b \phi^2(z) dz$$

e quindi, nel caso dell'Esercizio si ha

$$Volume = \pi \int_{-1}^{1} (1 - |z|)^2 \, dz = 2\pi \int_0^1 (1 - z)^2 \, dz = \frac{2}{3}\pi$$

Osservazione 11.1. *Il volume richiesto poteva essere ottenuto per via elementare riconoscendo che*

- *la regione é unione di due coni rotondi uguali,*
- *coni di raggio di base $R = 1$ e altezza $h = 1$*
- *pertanto ciascuno ha volume $\pi/3$*

Il volume complessivo é pertanto $2\pi/3$.

12. Esercizio

Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_\Omega z \, dx \, dy \, dz$$

essendo $\Omega : \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La regione Ω é l'intercapedine tra la tazza esterna $z = x^2 + y^2$, di profilo parabolico e il cono interno $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, al variare di (x, y) nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.
In Figura 8 é disegnata una sezione di Ω quella relativa al semicerchio $y \geq 0$.
Ω é un dominio normale rispetto all'asse z : pertanto

$$\iiint_\Omega z \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} z \, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} z^2 \Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy \quad =$$

servendosi delle coordinate polari per l'integrale doppio

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4) \, \rho \, d\rho = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{12}$$

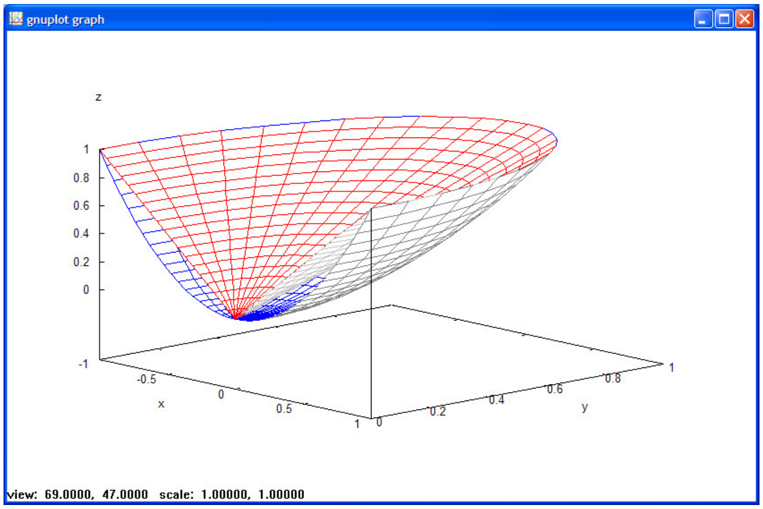


FIGURA 8. $x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

OSSERVAZIONE 12.1. *Il valore trovato rappresenta la massa di Ω supponendo che esso sia riempito di un materiale di densitá*

$$\delta(x, y, z) = z$$

densitá maggiore in alto, quasi nulla vicino al piano $z = 0$...

CAPITOLO 32

Foglio 8

1. Esercizio

Disegnare la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche, per $t \in [0, \pi]$,

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & t \in [0, \pi/4] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - (t - \frac{\pi}{4}) & t \in [\pi/4, \pi] \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi/4] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + (t - \frac{\pi}{4}) & t \in [\pi/4, \pi] \end{cases}$$

e calcolarne la lunghezza.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

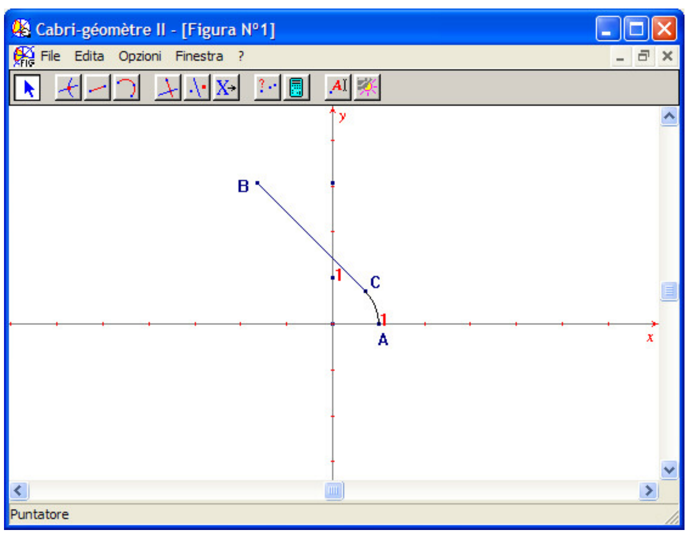


FIGURA 1. La curva $\mathcal{C}$ del primo esercizio

La curva $\mathcal{C}$ del primo esercizio inizia con un ottavo di circonferenza, l'arco $\widehat{AC}$ vedi Figura 1, e prosegue con un segmento CB staccato sulla tangente alla circonferenza in C.
La lunghezza di $\mathcal{C}$ puó essere calcolata artigianalmente sommando la lunghezza dell'arco AC con quella del segmento CB :

$$\ell(AC) = \frac{1}{8}\, 2\pi, \quad \ell(CB) = \sqrt{(\frac{3}{4}\pi)^2 + (\frac{3}{4}\pi)^2} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{2}$$

da cui
$$\ell(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{4}\,(1+3\sqrt{2}) \simeq 4,12$$
Il calcolo puó essere eseguito anche tramite l'integrazione,
$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\,dt \;+\; \int_{\pi/4}^{\pi} \sqrt{1+1}\,dt =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}(1+3\sqrt{2})$$

2. Esercizio

Siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, le curve di equazioni parametriche
$$\begin{matrix} \{x_1(t) = t, & y_1(t) = t^2\} \\ \{x_2(t) = \varphi(t), & y_2(t) = \varphi^2(t)\} \end{matrix} \qquad t \in [0,1]$$
essendo $\varphi(t) \in C^1(\mathbb{R})$, crescente con $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

- *disegnare le due curve,*
- *determinare le loro lunghezze.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le due curve sono uguali: sono entrambe l'arco di parabola
$$y = x^2, \quad 0 \le x \le 1$$
Le due espressioni parametriche fornite sono due rappresentazioni parametriche dello stesso oggetto geometrico. Niente da stupirsi...

Le lunghezze: tenuto conto che il calcolo della lunghezza si serve della rappresentazione parametrica sará interessante riconoscere se le due rappresentazioni proposte producono (o meno) la stessa lunghezza.
$$\ell(\mathcal{C}_1) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt$$
$$\ell(\mathcal{C}_2) = \int_0^1 \sqrt{\varphi'^2(t)+4\varphi^2(t)\,\varphi'^2(t)}dt = \int_0^1 \sqrt{1+4\,\varphi^2(t)}\,\varphi'(t)dt$$
La sostituzione di variabile
$$\tau = \varphi(t)$$
tenuto conto che
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

trasforma l'ultimo integrale in

$$\int_0^1 \sqrt{1+4\,\tau^2}\,d\tau$$

e quindi si riconosce che

$$\ell(\mathcal{C}_2) = \ell(\mathcal{C}_1)$$

Il calcolo dell'integrale indefinito $\int \sqrt{1+4t^2}dt$ si fa con la sostituzione $2t = \sinh(x)$:

$$\int \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\sinh^2(x)}\cosh(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cosh^2(x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (e^{2x}+e^{-2x}+2)\,dx = \frac{1}{8}(\sinh(2x)+2x)$$

Tenuto conto che dalla sostituzione $2t = \sinh(x)$ adottata segue

$$t = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad t = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 4$$

$$e^{2x} - 1 = 4\,e^x \Leftrightarrow e^x = 2+\sqrt{5} \Leftrightarrow x = \log(2+\sqrt{5})$$

Si ha

$$\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = \left.\frac{1}{8}(\sinh(2x)+2x)\right|_0^{\log(2+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{16}\left((2+\sqrt{5})^2 - \frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}\right) + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) \simeq 1.47894$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Si osservi che le curve* $\mathcal{C}_1$, *o naturalmente* $\mathcal{C}_2$, *arco di parabola* $y = x^2,\ 0 \le x \le 1$ *vanno dall'origine* $(0,0)$ *al punto* $(1,1)$: *il segmento di tali estremi é lungo*

$$\sqrt{2} \simeq 1,414$$

La lunghezza 1.47894 *trovata per* $\mathcal{C}_1$ *é, giustamente superiore, anche se di poco...*

3. Esercizio

Scrivere, sotto forma integrale, la lunghezza dell'ellisse $2x^2 + 3y^2 = 4$ e calcolare le lunghezze di due poligonali inscritte in essa.

Soluzione:

L'ellisse assegnata $\mathcal{E}$ si riconosce meglio se scritta nella forma equivalente

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

per la quale é ben nota la rappresentazione parametrica

$$x = \sqrt{2}\,\cos(t), \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Da essa segue l'espressione della lunghezza

$$\ell(\mathcal{E}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t) + \frac{4}{3}\,\cos^2(t)}\,dt \tag{5}$$

L'ellisse assegnata ha semiassi $\sqrt{2}$ e $2/\sqrt{3}$: in altri termini passa per i punti

$$A = (-\sqrt{2}, 0), \quad B = (0, 2/\sqrt{3}), \quad C = (-\sqrt{2}, 0), \quad D = (0, 2/\sqrt{3})$$

Poligonali ovvie in essa inscritte sono:

BD	$\ell(BD)$	$= 4\sqrt{3}$	$\simeq 2,31$
AC	$\ell(AC)$	$= 2\sqrt{2}$	$\simeq 2,83$
$ABCDA$	$\ell(ABCDA)$	$= 4\ell(AB)$	$= 8$

La lunghezza che ci aspettiamo é pertanto

$$\ell(\mathcal{E}) \geq 8$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Il fatto che i due addendi,* $\sin^2(t)$ *e* $\cos^2(t)$ *sotto radice nella formula (5) abbiano, contrariamente a quanto accade per la circonferenza, coefficienti* 2 *e* $4/3$ *diversi, rende l'integrale indicato non elementare, intendendo con tale parola che la primitiva di*

$$\sqrt{2\sin^2(t) + \frac{4}{3}\,\cos^2(t)}$$

non si esprime né tramite funzioni razionali, né goniometriche, né esponenziali o logaritmiche.
Algoritmi di calcolo numerico, implementati ad esempio in Mathematica, *consentono di valutare l'integrale (5), cioé la lunghezza dell'ellisse,*

$$\ell(\mathcal{E}) \simeq 8.09108$$

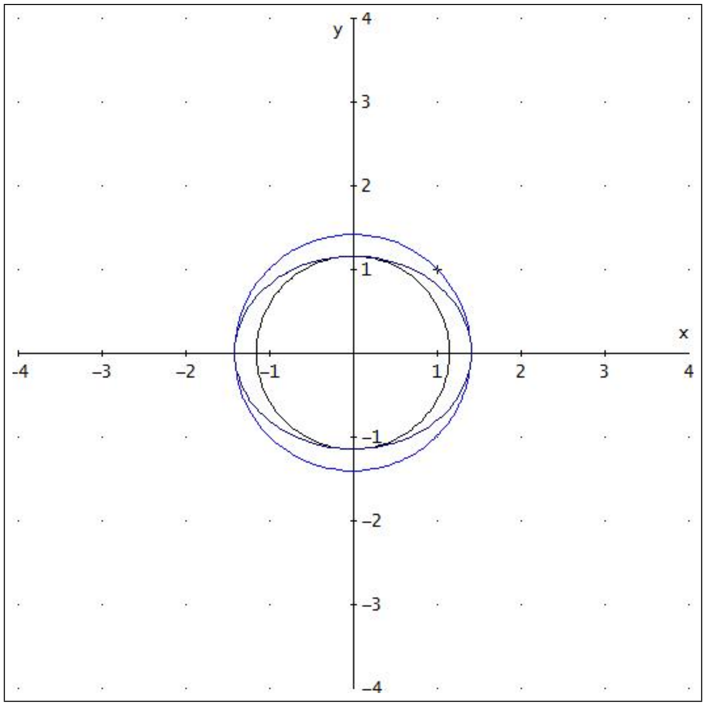


FIGURA 2. $2x^2 + 3y^2 = 4$ e due circonferenze.

Si tratta di un valore ragionevole considerato che l'ellisse assegnata ha, vedi Figura 2, naturalmente lunghezza intermedia tra quelle delle due circonferenze di raggio $2/\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{2}$ *che valgono*

$$7,255 \qquad 8.88577$$

La notevole vicinanza tra la lunghezza 8.09108 *di* $\mathcal{E}$ *e quella* 8 *della poligonale* $ABCDA$ *precedentemente calcolata puó apparire sorprendente e certamente puó essere motivo di riflessione: é ben vero che la linea retta é quella piú corta fra due punti, ma linee curve tra i due stessi punti possono offrire lunghezze assai poco superiori...*

OSSERVAZIONE 3.2. *Un approccio alternativo:*
sostituendo $\cos^2(t)$ *con* $1 - \sin^2(t)$ *l'integrale*

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t) + \frac{4}{3}\cos^2(t)}\, dt$$

che interviene nel calcolo della lunghezza dell'ellisse si trasforma in

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t) + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\sin^2(t)}\, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2(t)}\, dt$$

Introdotta la funzione[1]

$$\Phi(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + k\sin^2(t)}\, dt$$

si riconosce che l'integrale che ci interessa é $\Phi(1/2)$.
Tenuto conto che

$$\Phi(0) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1}\, dt = 2\pi$$

e che

$$\Phi'(k) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{2\sqrt{1 + k\sin^2(t)}} dt \quad \to \quad \Phi'(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{2\sqrt{1}} dt = \frac{\pi}{2}$$

si puó usare la formula di Taylor per approssimare

$$\Phi(k) \simeq \Phi(0) + \Phi'(0)\, k = 2\pi \frac{1}{2}\pi\, k$$

da cui l'approssimazione

$$\Phi(1/2) \simeq 2\pi \frac{1}{2}\pi\, \frac{1}{2}$$

da cui

$$\ell(E) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, \Phi(1/2) \simeq 8.16$$

4. Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma x\, y\, ds \qquad \Gamma : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \ \ y \geq 0$$

Soluzione:

La curva Γ, un'ellisse di semiassi $a = 2,\ b = 3$, ha la nota rappresentazione parametrica

$$x = 2\,\cos(t), \quad y = 3\,\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

si ha pertanto

$$\int_\Gamma x\, y\, ds = \int_0^{2\pi} (2\,\cos(t)).(3\,\sin(t))\, \sqrt{4\sin^2(t) + 9\,\cos^2(t)}\, dt =$$

[1] Funzioni rappresentate da integrali del tipo proposto sono presenti in numerosi problemi concreti e prendono, non a caso, il nome di *funzioni ellittiche*.

$$= 3\int_0^{2\pi} 2\,\sin(t)\,\cos(t)\sqrt{9-5\,\sin^2(t)}\,dt =$$

$$= -\frac{3}{5}\int_0^{2\pi} (9-5\,\sin^2(t))^{1/2}\,(9-5\,\sin^2(t))' dt =$$

$$-\frac{2}{5}\,(9-5\,\sin^2(t))^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

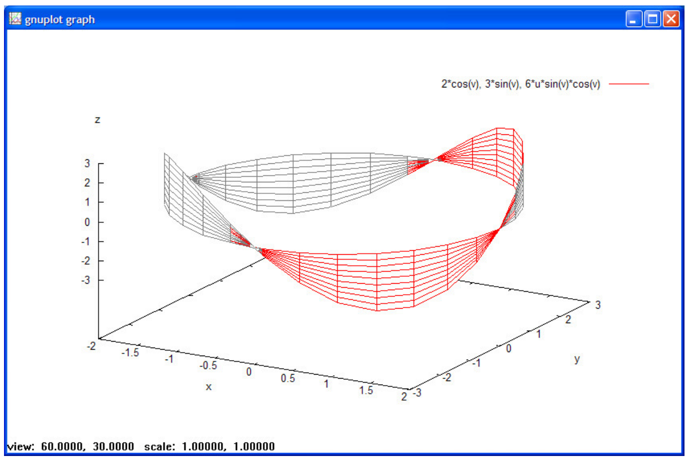


FIGURA 3. Un muro alto xy su $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

OSSERVAZIONE 4.1. *Il risultato nullo dell'integrale era prevedibile: l'ellisse é simmetrica rispetto a ciascun asse e la funzione integranda é dispari rispetto a ciascuna delle due variabili, vedi Figura 3.*
Quindi, ad esempio l'integrale curvilineo sulla semiellisse appartenente a $y \geq 0$ e quello relativo all'altra semiellisse, quella in $y \leq 0$ sono uguali e opposti...

5. Esercizio

Siano

$$\overrightarrow{F} = \left\{y^2,\, xy\right\} \qquad \Gamma:\ \left\{x(t) = 1-t,\ y(t) = t^2+1, \quad t \in [-1,1]\right\}$$

calcolare il lavoro

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds$$

essendo Γ percorsa nel verso dal punto $(x(-1), y(-1))$ al punto $(x(1), y(1))$.

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

La curva Γ assegnata é un arco di parabola: infatti

$$x = 1-t \quad \rightarrow \quad t = 1-x \quad \rightarrow \quad y = (x-1)^2+1$$

Il verso di percorrenza, da $(x(-1), y(-1)) = (2,2)$ a $(x(1), y(1)) = (0,2)$ é quello espresso dal vettore $(x'(t), y'(t))$.

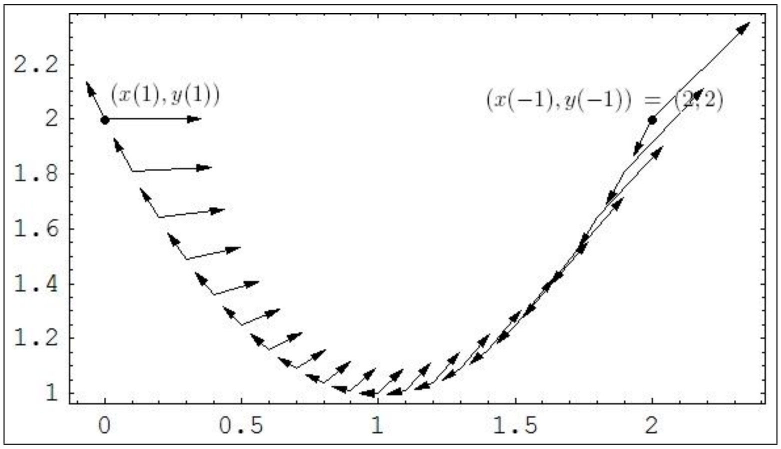


FIGURA 4. $F = \{y^2, xy\}$, e il versore T lungo Γ percorsa da $(2,2)$ a $(0,2)$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_{-1}^{1} \left\{(t^2+1)^2(-1) + (1-t)(t^2+1)(2t)\right\}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-1 + 2\,t - 4\,t^2 + 2\,t^3 - 3\,t^4)\, dt = -\frac{88}{15}$$

Il lavoro negativo é comprensibile osservato che, vedi Figura 4, in quasi tutti i punti di Γ il campo e il versore tangente relativo al verso di percorrenza scelto, hanno prodotto scalare negativo.

6. Esercizio

Calcolare il lavoro $\int_\Gamma (x\,dx + y\,dy + z\,dz)$ *essendo una volta* Γ *l'elica* $x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(t),\ z(t) = t, \quad t \in [0, 2\pi]$ *e un'altra volta* Γ *il segmento verticale tra gli estremi dell'elica, percorsi entrambi nel verso delle* z *crescenti.*

Soluzione:

Si noti l'espressione del lavorio assegnata, scritta con la notazione delle *forme differenziali*.

Lavoro lungo l'ELICA:

$$\int_\Gamma (x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \int_0^{2\pi} \{\cos(t)(-\sin(t)) + \sin(t)\cos(t) + t\}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2$$

Lavoro lungo il SEGMENTO VERTICALE:

$$x = 1,\ y = 0, z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\Gamma (x\,dx\, +\, y\,dy\, +\, z\,dz) = \int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2$$

Che i due lavori dovessero venire uguali poteva essere previsto osservando che F é un campo gradiente

$$F = \{x, y, z\} = \nabla U(x, y, z), \quad U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

e quindi detti A e B l'inizio e la fine della curva riesce, qualunque sia la curva,

$$\int_\Gamma F \times T\,ds = U(B) - U(A)$$

Nel nostro caso le curve da

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 0, 2\pi)$$

considerate erano

- un'elica,
- il segmento verticale.

7. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo $F(x, y) = \{6\,x^2\,y,\ 10\,x\,y^2\}$ da $A = (1, 1)$ a $B = (2, 8)$

- *decidere se il campo sia o meno conservativo*
- *lungo il segmento* AB
- *o lungo la poligonale coordinata* ACB *essendo* $C = (2, 1)$.

Soluzione:

Per decidere se il campo sia o meno conservativo, controlliamo (test del Teorema di Schwarz) se

$$\frac{\partial}{\partial y}\,6\,x^2\,y \quad ? \;=\; ? \quad \frac{\partial}{\partial x}\,10\,x\,y^2$$

Il test non é superato

$$\frac{\partial}{\partial y}\,6\,x^2\,y = 6x^2 \quad \neq \quad \frac{\partial}{\partial x}\,10\,x\,y^2 = 10\,y^2$$

quindi il campo non é un gradiente ovvero non é conservativo.

Lavoro lungo AB

Rappresentazione parametrica di $AB:\ x = 1+t, y = 1+7t, \quad t \in [0,1]$

$$\int_{AB} \{6\,x^2\,y,\ dx + \ 10\,x\,y^2\,dy\} =$$

$$= \int_0^1 \left\{(1+t)^2(1+7t) + 10(1+t)(1+7t)^2\,7\right\}dt =$$

$$= \int_0^1 \{6 + 64\,t + 240\,t^2 + 672\,t^3 + 490\,t^4\}dt = 384$$

Lavoro lungo ACB

$$AC:\ x = t,\ y = 1,\ t \in [1,2]$$
$$CB:\ x = 2,\ y = t,\ t \in [1,8]$$

$$\int_{ACB} \{6\,x^2\,y\,dx + \ 10\,x\,y^2\,dy\} = \int_{AC} 6\,x^2\,y,\ dx + \int_{CB} 10\,x\,y^2\,dy =$$

$$= \int_1^2 6\,x^2\,dx + \int_1^8 20\,y^2\,dy = 14 + \frac{20}{3}(8^3-1) \simeq 3420$$

numero molto diverso dal precedente: non c'é da stupirsi, essendo il campo non conservativo il lavoro andando da A a B puó dipendere fortemente dalla curva seguita.

8. Esercizio

Assegnato il campo

$$F(x,y) = \left\{\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3},\ \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\right\}$$

- *determinare un potenziale di F*
- *determinare il lavoro lungo $x^2+y^2=1,\ y \geq 0$ percorsa in senso orario,*
- *calcolare il rotore di F*
- *calcolare il lavoro di F lungo la $x^2/4 + y^2/9 = 1,\ y \geq 0$*

Soluzione:

Si riconosce facilmente che le due componenti di F sono le derivate parziali di

$$U(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che pertanto ne costituisce un potenziale.

Il lavoro di F lungo qualsiasi curva Γ[2] di estremi A e B, nel verso da A a B é

$$\int_\Gamma F \times T\, ds = U(B) - U(A)$$

quindi il lavoro lungo la semicirconferenza viene 0 essendo

$$A = (-1, 0),\ B = (1, 0), \quad U(B) = -1,\ U(A) = -1$$

$$\text{rot}\,(F) = 0$$

Il lavoro lungo la semiellisse si calcola come per la semicirconferenza: in questo caso

$$A = (-2, 0),\ B = (2, 0), \quad U(A) = U(B)$$

quindi ancora lavoro nullo.

9. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = \left\{ \frac{2x}{x^2 + y^2} + x^2,\ \frac{2y}{x^2 + y^2} + y^2 \right\}$$

- *determinare il rotore di F*
- *determinare un potenziale di F*
- *determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo la circonferenza C di centro l'origine e raggio $R = 1$ percorsa nel senso antiorario,*

Soluzione:

Il campo F appartiene al piano,

$$F = \{F_1(x, y), F_2(x, y), 0\}$$

il rotore quindi ha certamente le prime due componenti nulle e riesce, a conti fatti,

$$\text{rot}\,(F) = \left\{ 0,\ 0,\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right\} = \{0,\ 0,\ 0\}$$

L'annullarsi del rotore non permette tuttavia di affermare che il campo F ammetta potenziale perché F é definito su $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine aperto non é stellato: quindi non puó essere invocato il Lemma di Poincaré.

La determinazione del potenziale puó essere ottenuta con due passi

[2]Naturalmente curva legittima, cioé non passante per l'origine dove il campo F non é definito...!

- un potenziale per il campo

$$\left\{\frac{2x}{x^2+y^2},\, \frac{2y}{x^2+y^2}\right\}$$

- e uno per il campo

$$\left\{x^2,\, y^2\right\}$$

Per entrambi la risposta é evidente:

$$\left\{\frac{2x}{x^2+y^2},\, \frac{2y}{x^2+y^2}\right\} = \nabla \log(x^2+y^2)$$

$$\left\{x^2,\, y^2\right\} = \nabla \frac{1}{3}(x^3+y^3)$$

Quindi

$$\left\{\frac{2x}{x^2+y^2}+x^2,\, \frac{2y}{x^2+y^2}+y^2\right\} = \nabla \left\{\log(x^2+y^2)+\frac{1}{3}(x^3+y^3)\right\}$$

Il lavoro di F lungo la circonferenza assegnata é nullo come é nullo il lavoro di ogni campo gradiente lungo una curva chiusa.

10. Esercizio

Posto

$$\Phi(t) = \int_0^{\pi/4} \left(t - \frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$$

- *calcolare* $\Phi'(t)$
- *calcolare* $\Phi''(t)$
- *determinare il minimo di* $\Phi(t)$ *per* $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

$$\Phi'(t) = 2\int_0^{\pi/4} \left(t - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$\Phi''(t) = 2\int_0^{\pi/4} dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Il fatto che $\Phi''(t)$ sia costante prova che $\Phi(t)$ é un polinomio di secondo grado in t

$$\Phi(t) = \frac{\pi}{4}\, t^2 + b\, t + c$$

una parabola con la concavitá rivolta verso l'alto.

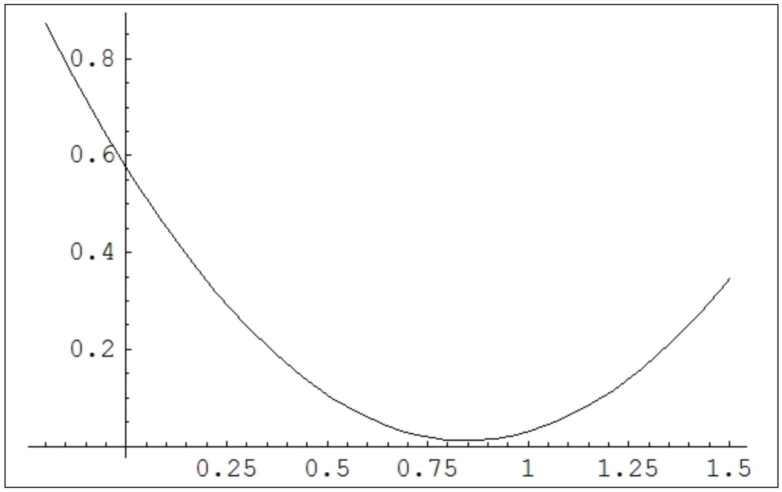


Figura 5. $\Phi(t) = \int_0^{\pi/4} \left(t - \frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$

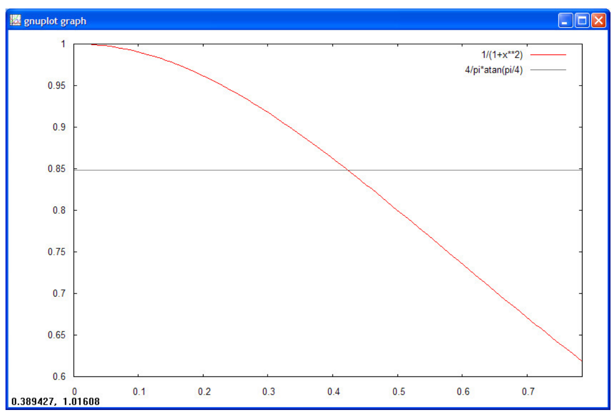


Figura 6. $t = \frac{4}{\pi} \arctan(\pi/4)$

Il valore minimo di $\Phi(t)$ corrisponde quindi al valore preso nel punto in cui si annulla la derivata prima

$$\Phi'(t) = 2\int_0^{\pi/4} \left(t - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 0 \quad \to \quad t\,\frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

da cui

$$t\,\frac{\pi}{4} = \arctan(\pi/4) \quad \to \quad t = \frac{4}{\pi} \arctan(\pi/4)$$

11. Esercizio

Assegnata $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ sia

$$G(t) = \int_t^{t^2} f(x-t)\,dx$$

- *calcolare* $G(0)$
- *calcolare* $G'(t)$
- *nel caso di* $f(x) = e^{-x^2}$ *calcolare* $G''(t)$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$G(0) = \int_0^{0^2} f(x-0)\,dx = 0$$

trattandosi di un integrale esteso ad un intervallo di lunghezza nulla.

$$G'(t) = f(t^2-t)\,2t - f(0) - \int_t^{t^2} f'(x-t)\,dx$$

Tenuto conto che

$$\int_t^{t^2} f'(x-t)\,dx = \left. f(x-t)\right|_{x=t}^{x=t^2} = f(t^2-t) - f(0)$$

si ha

$$G'(t) = f(t^2-t)(2t-1)$$

Nel caso $f(x) = e^{-x^2}$ si ha pertanto

$$G'(t) = (2t-1)\,e^{-(t-t^2)^2} \quad \to$$
$$\to \quad G''(t) = 2\,\left(1 + t - 5\,t^2 + 8\,t^3 - 4\,t^4\right)e^{-\left(t-t^2\right)^2}$$

Osservazione 11.1. *Un approccio alternativo si ricava servendosi della regola di integrazione per sostituzione*

$$G(t) = \int_t^{t^2} f(x-t)\,dx = \int_0^{t^2-t} f(\xi)\,d\xi$$

dedotta ponendo $x - t = \xi$.
Dall'espressione

$$G(t) = \int_0^{t^2-t} f(\xi)\,d\xi$$

si ottiene direttamente

$$G'(t) = f(t^2-t)(2t-1)$$

come ottenuto prima.

Parte 8

Gli esoneri 2006

CAPITOLO 33

Primo esonero

1. Esercizio

Data la funzione radiale

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\log(x^2+y^2) + x^2 + y^2$$

- *determinare l'insieme di definizione,*
- *esaminare se f puó essere prolungata per continuitá in $\mathbb{R}^2$,*
- *calcolare le due derivate parziali prime $f_x(0,1),\ f_y(0,1)$,*
- *determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,1,f(0,1))$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le espressioni che compongono $f(x,y)$ fanno uso di $\log(x^2+y^2)$, quindi richiedono $x^2+y^2>0$: l'insieme di definizione di f é pertanto l'aperto

$$E := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

La prolungabilitá richiesta si riferisce pertanto al solo limite nell'origine.

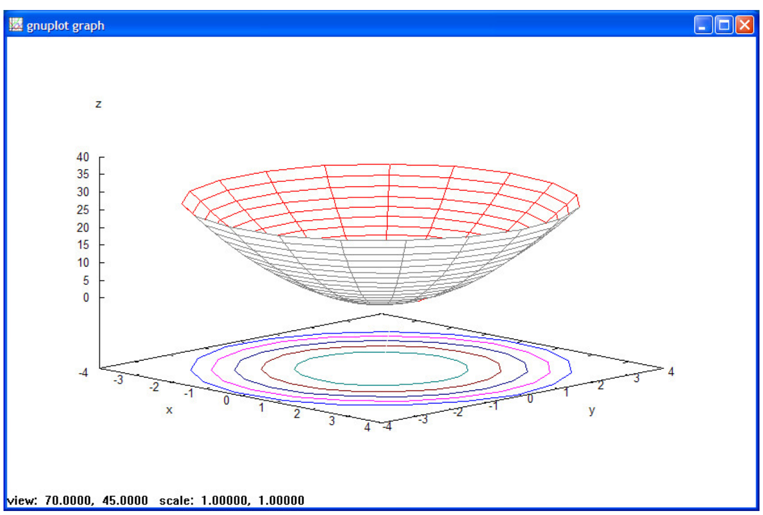


FIGURA 1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\log(x^2+y^2) + x^2 + y^2$

Indicato con
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
la funzione radiale assegnata f si scrive, per $r > 0$ come
$$g(r) = r\ \log(r^2) + r^2 = 2\,r\ \log(r) + r^2$$
É ben noto (o dovrebbe esserlo...) che
$$\lim_{t\to 0^+} t\ \log(t) = 0$$
quindi l'espressione $g(r)$ puó essere prolungata, vedi Figura 1, per continuitá in $r = 0$ al modo seguente
$$g(r) = \begin{cases} 2\,r\ \log(r) + r^2 & r > 0 \\ \\ 0 & r = 0 \end{cases}$$
La funzione assegnata f puó pertanto essere prolungata per continuitá a tutto R^2 attribuendole nell'origine il valore 0.
In $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ le derivate parziali di f si calcolano con l'ovvio algoritmo di derivazione e si ha
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2\,x + \dfrac{2\,x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x\ \log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f_y(x,y) = 2\,y + \dfrac{2\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y\ \log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$
Le derivate nel punto $(0,1)$ richiesto sono null'altro che le espressioni precedenti calcolate in tale punto:
$$\begin{cases} f_x(0,1) = 0 \\ f_y(0,1) = 4 \end{cases}$$
Il piano tangente ha la nota formula
$$z = f_x(0,1)(x-0) + f_y(0,1)(y-1) + f(0,1) \quad \to \quad z = 4(y-1) + 1$$
OSSERVAZIONE 1.1. *Il grafico di $f(x,y)$, vedi Figura 2, é quello di una superficie di rotazione: é abbastanza comprensibile quindi che anche i piani tangenti ad essa godano di benefici collegati alla rotazione.*
Uno di tali benefici é il seguente:
la normale al piano tangente, nel punto di tangenza passa per l'asse z.
Il piano trovato, $z = 4y - 3$ é infatti parallelo all'asse x, quindi la sua normale in $(0,1,1)$ appartiene al piano $x = 0$, quindi interseca l'asse z.

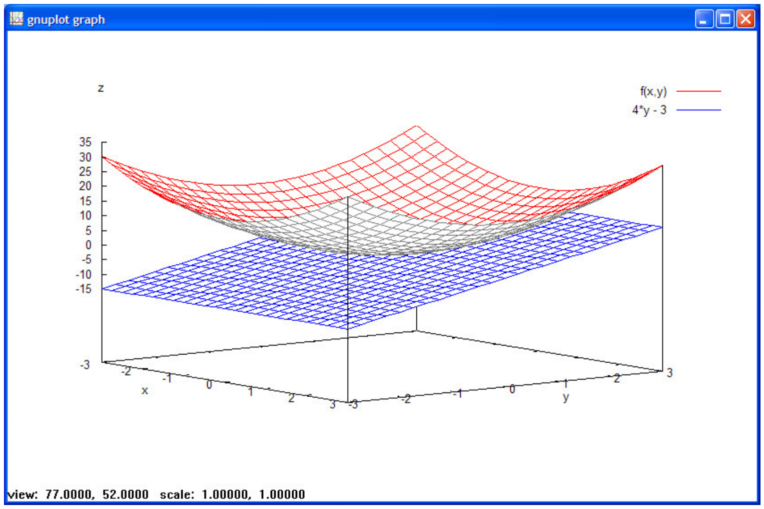


FIGURA 2. $z = \sqrt{x^2+y^2}\,\log(x^2+y^2) + x^2 + y^2$, $z = 4y - 3$

2. Esercizio

Assegnata la successione

$$\{P_n\} = \left\{ \left(\frac{(-2)^n}{1+2^n},\ \frac{n}{n+1} \right) \right\}, \qquad n = 1, 2, 3...$$

- *esaminare se é limitata,*
- *esaminare se é convergente,*
- *trovare due sottosuccessioni convergenti.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- Per decidere se $\{P_n\}$ sia limitata occorre riconoscere se sono limitate (o meno) le due succssioni
$$x_n = \frac{(-2)^n}{1+2^n}, \quad y_n = \frac{n}{n+1}$$
Si ha
$$|x_n| = \left| \frac{(-2)^n}{1+2^n} \right| = \frac{2^n}{1+2^n} \leq 1$$
$$|y_n| = \frac{n}{n+1} \leq 1$$
Quindi $\{P_n\}$ é limitata:
$$\|P_n\| \leq \sqrt{2}$$
- Per decidere se $\{P_n\}$ sia convergente occorre esaminare se sono convergenti (o meno) le due successioni $\{x_n\}, \quad \{y_n\}$:

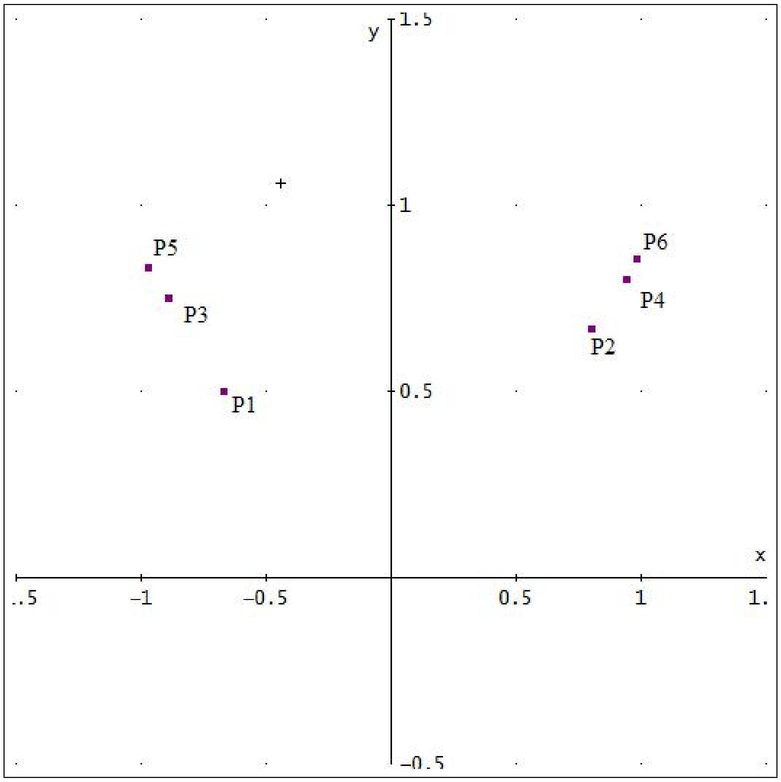


FIGURA 3. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6

– la prima $\{x_n\}$ non é convergente, infatti

$$x_{2n} \to 1, \quad x_{2n+1} \to -1$$

– la seconda $\{y_n\}$ é convergente

$$y_n \to 1$$

quindi $\{P_n\}$ non é convergente.

- Due sottosuccessioni della $\{P_n\}$ convergenti sono

$$\{P_{2n}\} = \{P_2,\, P_4,\, ...\}, \quad \{P_{2n-1}\} = \{P_1,\, P_3,\, ...\}$$

ovviamente non sono le uniche.

3. Esercizio

Sia

$$E := \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x\,y \geq 1 \end{cases}$$

- *disegnare l'insieme E,*

- *detta*
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$
esaminare se é applicabile a f in E il teorema di Weierstrass,
- *determinare un maggiorante di f in E,*
- *trovare due punti di E in cui la f prenda valori di segno opposto ed esaminare se é applicabile il teorema di esistenza degli zeri.*

Soluzione:

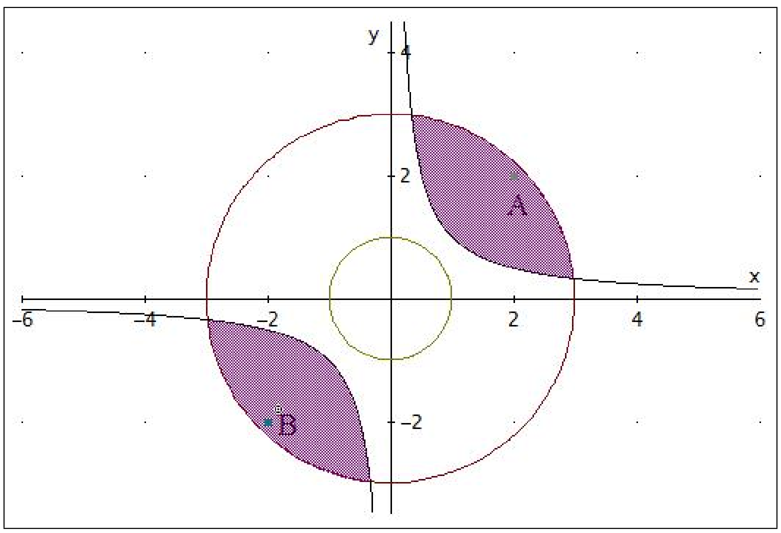


FIGURA 4. $\{x^2+y^2 \leq 9\} \cap \{x\,y \geq 1\}$

L'insieme E, vedi Figura 4, é limitato e chiuso:

- limitato perché contenuto in un cerchio $E \subseteq \{x^2+y^2 \leq 9\}$
- chiuso perché intersezione di due insiemi chiusi $x^2+y^2 \leq 9$ e $x\,y \geq 1$

La funzione $f(x,y)$ é continua nell'aperto $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, quindi é continua nell'insieme $E \subseteq \Omega$.
Ne segue che il Teorema di Weierstrass é applicabile ad f in E : quindi

- l'immagine $f(E)$ é un insieme di $\mathbb{R}^1$ chiuso e limitato,
- la funzione f é dotata in E di minimo e di massimo.

Un *maggiorante di f in E* é qualsiasi numero reale λ tale che

$$\forall (x,y) \in E \quad \rightarrow \quad f(x,y) \leq \lambda$$

Tenuto conto che

$$x \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad \frac{x}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

si ha

$$f(x,y) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

avendo tenuto conto, vedi Figura 4, che

$$(x,y) \in E \quad \to \quad x^2+y^2 \geq 1$$

Quindi $\lambda = 1$ é un *maggiorante di f in E*.
Anche $\lambda = 17$ o $\lambda = \pi$ sono *maggioranti di f in E*.
I due punti $A = (2,2)$ e $B = (-2,-2)$ appartengono, vedi Figura 4, ad E : in essi si ha

$$f(A) = \frac{2}{8} > 0, \quad f(B) = -\frac{2}{8} < 0$$

Se valesse per f in E il teorema dei valori intermedi allora dovrebbe trovarsi un punto $(\alpha,\beta) \in E$ in cui $f(\alpha,\beta) = 0$.
Ma f si annulla se e solo se $x = 0$ e nessuno dei punti di E ha l'ascissa nulla.
Quindi il Teorema dei Valori Intermedi non vale per f in E : quindi non vale almeno una delle sue due ipotesi:

- continuitá di f
- connessione per poligonali di E.

Poiché la prima, la continuitá, vale vuol dire che non vale la seconda, la connessione di E, come si vede infatti molto bene in Figura 4, che mostra E formato di due parti ben separate.

4. Esercizio

Sia $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

- *disegnare le linee di livello* $f(x,y) = k, \quad k = 0,1,2,$
- *determinare massimo e minimo di f nel triangolo T di vertici*

$$A = (0,1), \quad B = (1,1), \quad C = (1,2),$$

- *determinare l'immagine $f(T)$ del precedente triangolo.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

- la linea di livello 0

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 = 0 \quad \to \quad (x,y) = (0,0)$$

- la linea di livello 1
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 = 1$$
ellisse di centro l'origine, semiassi $A_x = 1, B_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$
-
- la linea di livello 2
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$
ellisse di centro l'origine, semiassi $A_x = \sqrt{2}$, $B_y = 1$, ellisse simile alla precedente.

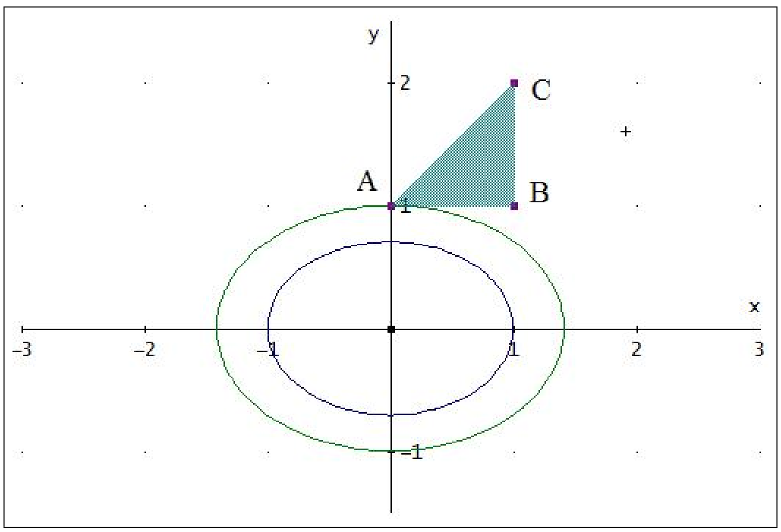


FIGURA 5. $x^2 + 2y^2 = k,\ k = 0,\ 1,\ 2$

É evidente che il valore $x^2 + 2y^2$ é tanto piú piccolo quanto piú piccole sono x ed y : é quindi evidente che $f(x,y) = x^2+2y^2$ prende tra i punti del triangolo T, vedi Figura 5, il valore piú basso nel vertice A.
Pertanto
$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,1) = 2$$
Analogo discorso per il valore maggiore che viene assunto in corrispondenza al vertice C
$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(1,2) = 9$$
L'immagine $f(T)$ é, per il Teorema dei Valori Intermedi, in questo caso valido

- f continua,
- T convesso, quindi connesso,

l'intervallo chiuso di estremi il minimo e il massimo

$$f(T) = [2,\, 9]$$

Osservazione 4.1. *Ovviamente il termine*

$$\textit{triangolo } T \textit{ di vertici } A,\, B,\, C$$

é inteso come

$$\textit{regione chiusa delimitata dai tre segmento } AB,\, AC,\, CB.$$

Tuttavia le affermazioni fatte su massimo, minimo e immagine $f(T)$ non cambiano anche interpretando il termine triangolo T di vertici A, B, C come insieme dei soli tre segmenti AB, AC, CB.

CAPITOLO 34

Secondo esonero

1. Esercizio

Data la funzione

$$f(x, y) = x - y + x^2 + 3xy + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- *trovare i punti critici,*
- *dimostrare che f non ha punti di massimo o di minimo locali,*
- *trovare il massimo e il minimo di f nel quadrato*

$$Q: \ \{0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1\}$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 2x + 3y = & -1 \\ 3x + 2y = & 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = & 1 \\ y = & -1 \end{cases}$$

La matrice hessiana é, in ogni punto (x, y),

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

con determinante $\det(H) = -5 < 0$.
Quindi l'unico punto critico trovato, $(1, -1)$, é punto di sella.

La funzione continua f ha massimo e minimo nel quadrato Q chiuso e limitato, come garantito dal Teorema di Weierstrass.
Tali massimo e minimo sono assunti, per quanto giá visto (non esistono punti di massimo o di minimo locali per f), necessariamente sulla frontiera di Q.

La frontiera di Q é composta di 4 segmenti:

$$\begin{cases} y = 0, & 0 \leq x \leq 1 & \to & f = & x + x^2 \\ x = 1, & 0 \leq y \leq 1 & \to & f = & 2 + 2y + y^2 \\ y = 1, & 0 \leq x \leq 1 & \to & f = & 4x + x^2 \\ x = 0, & 0 \leq y \leq 1 & \to & f = & -y + y^2 \end{cases}$$

Su ciascuno di essi dobbiamo cercare il massimo e il minimo della f

Tenuto conto che f é un polinomio di secondo grado il suo massimo e minimo sull'intervallo $[0,1]$ sono assunti

- nell'eventuale punto $\xi \in (0,1)$ in cui si annulla la derivata prima,
- agli estremi dell'intervallo.

Quindi

Primo intervallo:	$0 \le f \le 2$
Secondo intervallo:	$2 \le f \le 5$
Terzo intervallo:	$0 \le f \le 5$
Quarto intervallo:	$-\frac{1}{4} \le f \le 0$

Ne segue pertanto

$$\min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(0,1/2) = -\frac{1}{4}, \quad \max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(1,1) = 5$$

2. Esercizio

Siano

$$A : \{|x| + |y| \ge 1\},$$
$$B : \{x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$$

- *riconoscere che $A \cap B$ é misurabile secondo Peano Jordan,*
- *determinare l'area di $A \cap B$,*
- *calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_{A\cap B} (1-y)^2 \, dx \, dy$$

Soluzione:

L'insieme $A \cap B$ é disegnato in Figura 1: esso é misurabile secondo Peano Jordan in quanto la sua frontiera $\mathcal{F}(A \cap B)$ ha area nulla.

Infatti $\mathcal{F}(A \cap B)$ é composta di due archi di parabola e quattro segmenti, tutti grafici di funzioni continue e pertanto insiemi di misura nulla.

Per quanto concerne l'area di $A \cap B$ é facile riconoscere che le quattro regioni

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \Omega_4$$

che lo compongono sono uguali e quindi basterá calcolare l'area di una di esse, per esempio quella Ω_1 contenuta nel primo quadrante

$$\Omega_1 : \{0 \le x \le 1, \ 1 - x \le y \le 1 - x^2\}$$

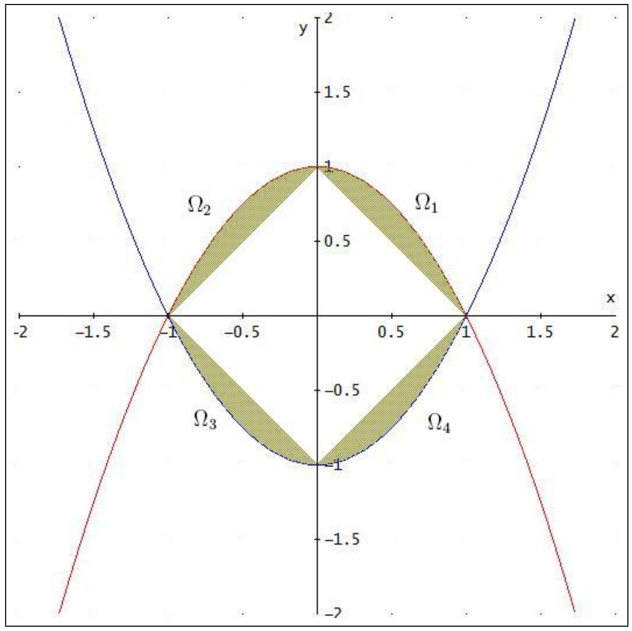


Figura 1. $A \cap B$

$$Area(\Omega_1) = \iint_{\Omega_1} dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1-x^2} dy = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}$$

Pertanto

$$Area(A \cap B) = 4\, Area(\Omega_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 0,666$$

$$\iint_{A\cap B} (1-y)^2\, dx\, dy = \iint_{A\cap B} (1 - 2y + y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{A\cap B} dx\, dy - 2 \iint_{A\cap B} y\, dx\, dy + \iint_{A\cap B} y^2\, dx\, dy$$

Tenuto presente che:

- il primo integrale rappresenta l'area di $A \cap B$
- il secondo é nullo per motivi di simmetria: la funzione integranda su Ω_3 e Ω_4 prende valori opposti a quelli che prende in Ω_1 e Ω_2

$$\iint_{A\cap B} (1-y)^2\, dx\, dy = \frac{2}{3} + \iint_{A\cap B} y^2\, dx\, dy =$$

$$= \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^{4} \iint_{\Omega_i} y^2\, dx\, dy$$

Ancora motivi di simmetria fanno riconoscere che

$$\iint_{\Omega_i} y^2\,dx\,dy = \iint_{\Omega_j} y^2\,dx\,dy, \quad \forall i,j \in [1,4]$$

e quindi

$$\iint_{A\cap B} (1-y)^2\,dx\,dy = \frac{2}{3} + 4\iint_{\Omega_1} y^2\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{3} + 4\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1-x^2} y^2\,dy = \frac{2}{3} + 4\int_0^1 \left.\frac{1}{3}y^3\right|_{1-x}^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\int_0^1 \left\{(1-x^2)^3 - (1-x)^3\right\} dx =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\int_0^1 \left\{3x - 6x^2 + x^3 + 3x^4 - x^6\right\} dx =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left\{\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right\} = \frac{2}{3} + \frac{29}{105} = \frac{33}{35} \simeq 0,94$$

Osservazione 2.1. *Il numero positivo*

$$\iint_{A\cap B} (1-y)^2\,dx\,dy = \frac{33}{35} \simeq 0,94$$

ottenuto rappresenta il volume dell'edificio, vedi Figura 2, costruito

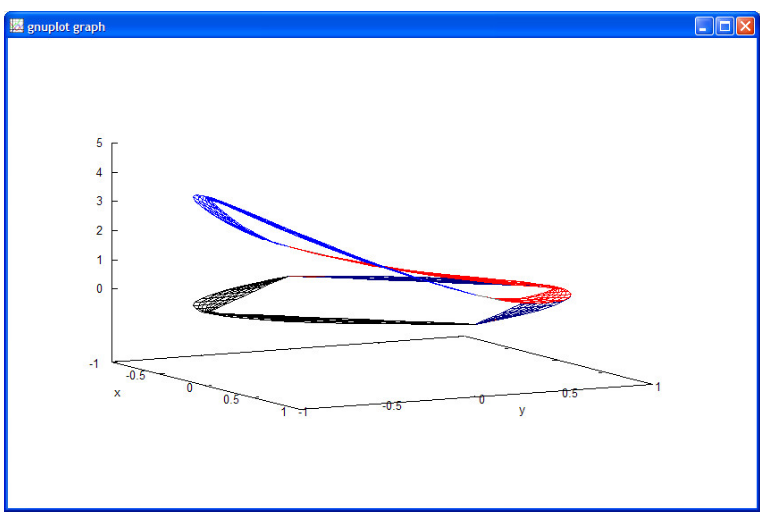


Figura 2. La copertura $z = (1-y)^2$ del terreno $A \cap B$

sul terreno $A \cap B \subseteq \mathbb{R}^2_{xy}$ *e coperto, in ogni punto* $(x,y) \in A \cap B$, *con un tetto di altezza* $z = (1-y)^2$

3. Esercizio

Sia $D : \{4(x-1)^2 \le y \le x^2\}$

- *disegnare l'insieme* D,
- *calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dx\, dy,$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'insieme D é delimitato dalle due parabole $y = x^2$ e $y = 4(x-1)^2$: per poterlo disegnare, vedi Figura 3, occorre determinare i punti in cui le due parabole si intersecano

$$x^2 = 4(x-1)^2 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3},\, x_2 = 2$$

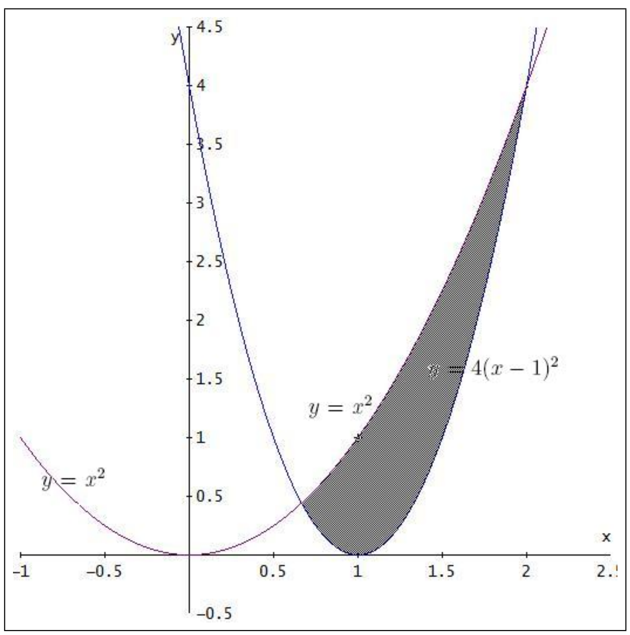


FIGURA 3. $D : \{\frac{2}{3} \le x \le 2,\ 4(x-1)^2 \le y \le x^2\}$

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dx\, dy = \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx \int_{4(x-1)^2}^{x^2} dy =$$

$$= \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{x^2 - 4(x-1)^2}{x^2}\, dx = \int_{\frac{2}{3}}^{2} \left\{-3 + 8\frac{1}{x} - 4\frac{1}{x^2}\right\} dx =$$

$$-3\left(2-\frac{2}{3}\right)+8\left(\log(2)-\log(\frac{2}{3})\right)+4\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=$$
$$=-4+8\log(3)-4=8\,(\log(3)-1)\simeq 0,79$$

4. Esercizio

Sia

$$f(x,y)=\sin(x+2y)+\cos(3x-y)$$

- *determinare i polinomi di Taylor* $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ *di punto iniziale* $(0,0)$ *e ordini* $n=1$ *ed* $n=2$,
- *determinare* M *tale che*

$$|f(x,y)-P_1(x,y)|\leq M\,(x^2+y^2),\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Per determinare i polinomi di Taylor richiesti occorre disporre dei valori nell'origine della funzione e delle sue derivate parziali prime e seconde.

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(x,y) & = & \sin(x+2y)+\cos(3x-y)\\ f_x(x,y) & = & \cos(x+2\,y)-3\,\sin(3\,x-y)\\ f_y(x,y) & = & 2\,\cos(x+2\,y)+\sin(3\,x-y)\\ f_{xx}(x,y) & = & -9\,\cos(3\,x-y)-\sin(x+2\,y)\\ f_{xy}(x,y) & = & 3\,\cos(3\,x-y)-2\,\sin(x+2\,y)\\ f_{yy}(x,y) & = & -\cos(3\,x-y)-4\,\sin(x+2\,y)\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcr} f(0,0) & = & 1\\ f_x(0,0) & = & 1\\ f_y(0,0) & = & 2\\ f_{xx}(0,0) & = & -9\\ f_{xy}(0,0) & = & 3\\ f_{yy}(0,0) & = & -1\end{array}\right.$$

Ne segue

$$P_1(x,y)=1+x+2y$$
$$P_2(x,y)=1+x+2y+\frac{1}{2}\left\{-9x^2+6xy-y^2\right\}$$

Dalla formula di Taylor discende che

$$f(x,y)-P_1(x,y)=\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)x^2+2f_{xy}(\xi,\eta)xy+f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right\}$$

Per ottenere una maggiorazione di

$$|f(x,y)-P_1(x,y)|$$

occorre quindi ottenere una maggiorazione di

$$\left|\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)x^2+2f_{xy}(\xi,\eta)xy+f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right\}\right|$$

quindi, in definitiva, tre maggiorazioni per i tre coefficienti incogniti

$$|f_{xx}(\xi,\eta)|,\quad |f_{xy}(\xi,\eta)|,\quad |f_{yy}(\xi,\eta)|$$

Tenuto conto che tutte e tre le derivate seconde, precedentemente calcolate, sono combinazioni lineari di seni e coseni é facile riconoscere che

$$\begin{cases} |f_{xx}(\xi,\eta)| \leq 10 \\ |f_{xy}(\xi,\eta)| \leq 5 \\ |f_{yy}(\xi,\eta)| \leq 5 \end{cases}$$

e quindi

$$\left|\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right\}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{10\,x^2 + 10|x||y| + 5\,y^2\right\} \leq$$

Tenuto conto che

$$|x||y| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \to \quad 10|x||y| \leq 5(x^2+y^2)$$

riesce

$$\frac{1}{2}\left\{10\,x^2 + 10|x||y| + 5\,y^2\right\} \leq \frac{1}{2}\left\{15\,x^2 + 10\,y^2\right\} \leq \frac{15}{2}(x^2+y^2)$$

Riesce pertanto, qualunque sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x,y) - P_1(x,y)| \leq \frac{15}{2}\,(x^2+y^2)$$

OSSERVAZIONE 4.1. *La costante*

$$M = \frac{15}{2}$$

trovata non é probabilmente la piú bassa: le maggiorazioni che abbiamo usate per determinarla sono abbastanza grossolane.
Lo sono particolarmente quelle con cui sono state maggiorate le tre derivate seconde, maggiorando brutalmente i seni e coseni che figuravano in esse con 1.
Conti piú accurati avrebbero potuto offrire stime M piú basse: la domanda dell'esercizio era tuttavia

determinare M, un M, tale che...

quindi la proposta fatta risponde correttamente all'esercizio.

CAPITOLO 35

Terzo esonero

1. Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\{x^2 - 2xy,\, 2xy + y^2\right\}$$

- *calcolare rot*$(\overrightarrow{F})$,
- *calcolare il lavoro*

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T}\, ds, \qquad \Gamma : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^2, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

percorsa nel verso da $(0,0)$ *a* $(1,1)$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

Si ha

$$\mathrm{rot}\,(\overrightarrow{F}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ x^2 - 2xy & 2xy + y^2 & 0 \end{pmatrix} = \{0,\, 0,\, 2y + 2x\}$$

$\mathrm{rot}\,(\overrightarrow{F}) \neq \{0,0,0\}$ implica che il campo $\overrightarrow{F}$ non é un gradiente, ovvero non ha potenziale.

Versori tangenti alla curva Γ sono

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\{1,\, 2t\}$$

il verso di percorrenza assegnato corrisponde alla scelta

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,\{1,\, 2t\}$$

tenuto presente che

$$ds = \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

si ha

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} ds = \int_0^1 \left\{ t^2 - 2\,t^3 + 2\,t\,\left(2\,t^3 + t^4\right) \right\} dt =$$
$$= \int_0^1 (t^2 - 2\,t^3 + 4\,t^4 + 2\,t^5) dt = \frac{29}{30}$$

2. Esercizio

Assegnata

$$F(x) = \int_0^1 (1 + \sin(x\,y^2))\,dy$$

- *calcolare il polinomio di Taylor di primo ordine e punto iniziale* $x_0 = 0$,
- *determinare* M *tale che il resto verifichi la maggiorazione*

$$|R(x)| \leq M\,x^2.$$

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

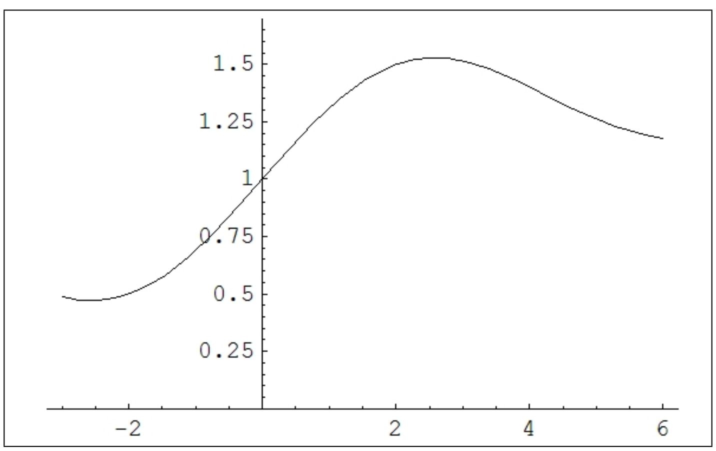


FIGURA 1. $F(x) = \int_0^1 (1 + \sin(x\,y^2))\,dy$

Per calcolare il polinomio di Taylor $P(x)$ occorre calcolare $F(0)$, $F'(0)$

$$F(x) = \int_0^1 (1 + \sin(x\,y^2))\,dy \quad \to \quad F(0) = \int_0^1 dy = 1$$
$$F'(x) = \int_0^1 (y^2\,\cos(x\,y^2))\,dy \quad \to \quad F'(0) = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}$$

Ne segue

$$P(x) = 1 + \frac{x}{3}$$

Il resto $R(x)$ é, per definizione, l'addendo tale che

$$F(x) = P(x) + R(x)$$

L'espressione di Lagrange garantisce che

$$R(x) = \frac{1}{2} F''(\xi)\, x^2$$

quindi per maggiorare $R(x)$ occorre maggiorare $F''(x)$.
Tenuto conto che

$$F''(x) = \int_0^1 -y^4 \sin(xy^2)\, dy \quad \rightarrow \quad |F''(x)| \leq \int_0^1 y^4 dy = \frac{1}{5}$$

si ha quindi la maggiorazione

$$|R(x)| \leq \frac{1}{10}\, x^2, \quad M = \frac{1}{10}$$

In Figura 2 si vede il grafico di $|R(x)| = |F(x) - P(x)|$ in nero, sottile

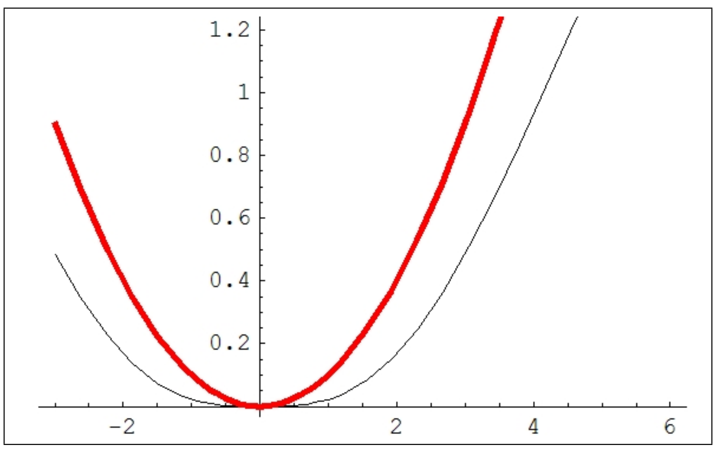


FIGURA 2. $|R(x)| = |F(x) - P(x)|$, $\quad \frac{1}{10}x^2$

e in rosso, piú spesso, il grafico della maggiorazione $\frac{1}{10}x^2$ ottenuta.

3. Esercizio

Calcolare, servendosi delle coordinate sferiche, l'integrale triplo

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz$$

essendo

$$\Omega := \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0\}.$$

Soluzione:

Le coordinate sferiche sono

$$x = \rho \sin(\varphi)\cos(\vartheta),\ y = \rho \sin(\varphi)\sin(\vartheta),\ z = \rho\cos(\varphi)$$

con determinante jacobiano

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Il dominio di integrazione Ω assegnato, una semibuccia sferica, corrisponde a

$$1 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

Pertanto

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\pi/2} |\sin(\varphi)|\, d\varphi \int_1^2 \frac{1}{\rho}\rho^2\, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)\, d\varphi \int_1^2 \rho\, d\rho = 3\pi \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)\, d\varphi = 3\pi$$

4. Esercizio

Sia $\overrightarrow{F}(x,y) = \{2xy + y^2 + 1,\ x^2 + 2xy + 3\}$

- *calcolare rot*$(\overrightarrow{F})$
- *determinare un potenziale* $U(x,y)$,
- *determinare* h *tali che detti* $O = (0,0)$, $B = (1,h)$ *riesca*

$$\int_{OB} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T}\, ds = 1$$

essendo OB *il segmento di estremi* O *e* B *percorso nel verso da* O *a* B.

Soluzione:

$$\text{rot}\,(F) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + y^2 + 1 & x^2 + 2xy + 3 & 0 \end{pmatrix} = \{0, 0, 0\}$$

Il campo F ha rotore nullo, é definito in tutto $\mathbb{R}^2$ quindi (Lemma di Poincaré) ammette potenziale.
Determiniamo prima le primitive rispetto ad x della prima componente $2xy + y^2 + 1$

$$U(x,y) = x^2y + y^2x + x + c(y)$$

imponiamo che soddisfino anche la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = x^2 + 2xy + 3 \quad \rightarrow \quad c'(y) = 3 \quad \rightarrow \quad c(y) = 3y + k$$

Le funzioni

$$U(x, y) = x^2 y + y^2 x + x + 3y + k$$

sono potenziali di F

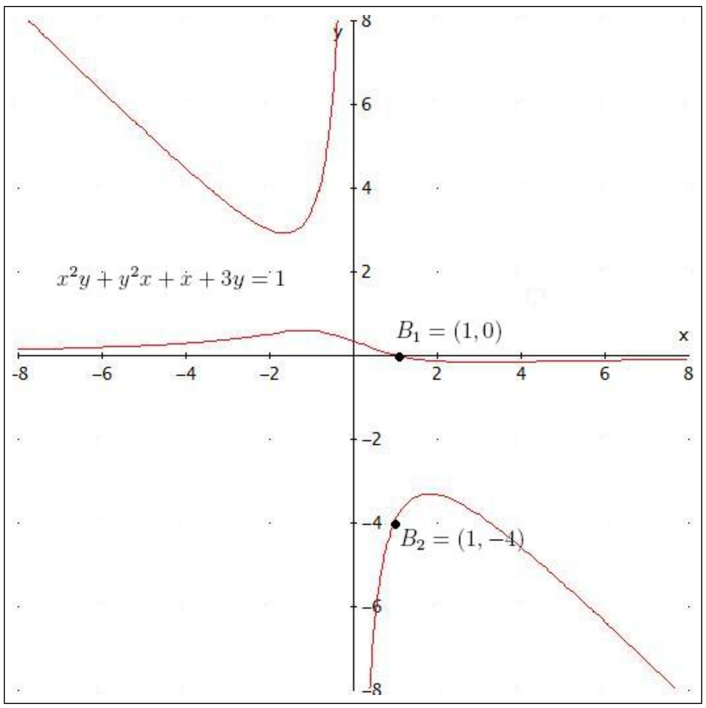


Figura 3. $U(x, y) - U(0, 0) = 1$

Il lavoro del campo $F = \nabla U$ lungo una qualsiasi curva da $O = (0, 0)$ a $B = (1, h)$ vale

$$U(1, h) - U(0, 0) = h + h^2 + 1 + 3h$$

Si compie un lavoro pari ad 1 se e solo se

$$h + h^2 + 1 + 3h = 1 \quad \rightarrow \quad h(h + 4) = 0$$

quindi

$$h = 0, \qquad h = -\,4$$

In altri termini i punti B tali che

$$\int_{OB} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T}\, ds = 1$$

sono tutti e soli i punti della linea

$$U(x,y)\ -\ U(0,0) = x^2y + y^2x + x + 3y = 1$$

vedi Figura 3.

$$B_1 = (1,0), \quad B_2 = (1,-4)$$

Parte 9

L'esame 2006

CAPITOLO 36

Esame Marzo 2006

1. Esercizio

Sia

$$E := \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 - y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- *disegnare l'insieme E,*
- *detta*

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

esaminare se é applicabile a f in E il teorema di Weierstrass,
- *trovare due punti di E in cui la f prenda valori di segno opposto ed esaminare se é applicabile il teorema di esistenza degli zeri.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

L'insieme E é determinato dalla circonferenza $x^2+y^2 = 4$ e dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, vedi Figura 1

La funzione $f(x, y)$ é continua in E, insieme chiuso e limitato: pertanto é applicabile il teorema di Weierstrass che afferma che f é dotata in E di massimo e di minimo.

Detti

$$A = (-2, 0), \quad B = (2, 0)$$

riesce

- $A, B \in E$
- $f(A) = \sin(-\frac{1}{2}) < 0$
- $f(B) = \sin(\frac{1}{2}) > 0$

Non esistono tuttavia punti $P \in E$ in cui riesca $f(P) = 0$: infatti

$$\sin\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ma del resto, vedi Figura 1, si ha

$$(x, y) \in E \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq |x| \leq 2 \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right| \leq 2$$

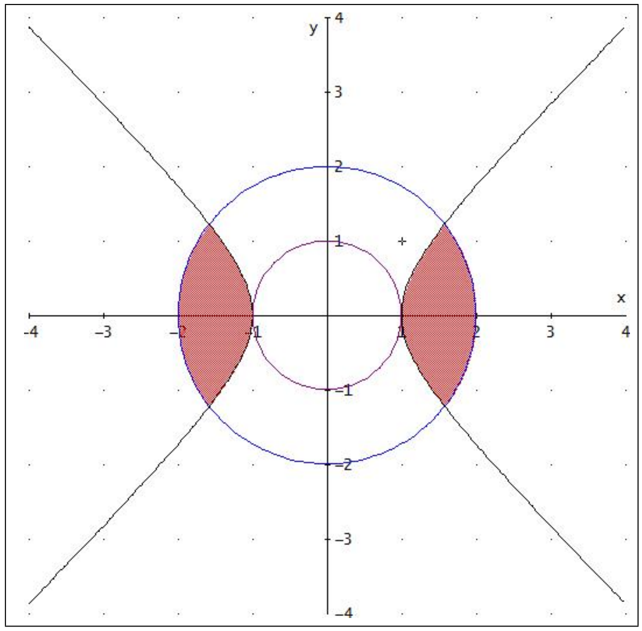


FIGURA 1. $E := \{x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \{x^2 - y^2 \geq 1\}$

e quindi la frazione

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

non coincide per $(x, y) \in E$ con alcuno zero della funzione *sin*.
Si riconosce pertanto che la funzione $f(x, y)$ non verifica in E il Teorema d'esistenza degli zeri: risultato prevedibile tenuto conto che l'insieme E, formato di due parti separate del disco $x^2 + y^2 \leq 4$, vedi Figura 1, non é connesso per poligonali.

2. Esercizio

Siano

$$A : \{|x| + |y| \leq 1\}, \quad B : \{\tfrac{3}{4}\, x^2 \leq y\}, \quad C : \{x \geq 0\}$$

- *disegnare l'insieme $A \cap B \cap C$ e riconoscere che é misurabile secondo Peano Jordan,*
- *determinare l'area di $A \cap B \cap C$,*
- *calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_{A \cap B \cap C} x \, dx \, dy$$

Soluzione:

L'insieme $A \cap B \cap C$ é disegnato in Figura 2: la sua frontiera é composta da due segmenti e da un arco di parabola, insiemi tutti e tre di misura nulla.
Quindi $A \cap B \cap C$ é misurabile secondo Peano-Jordan.

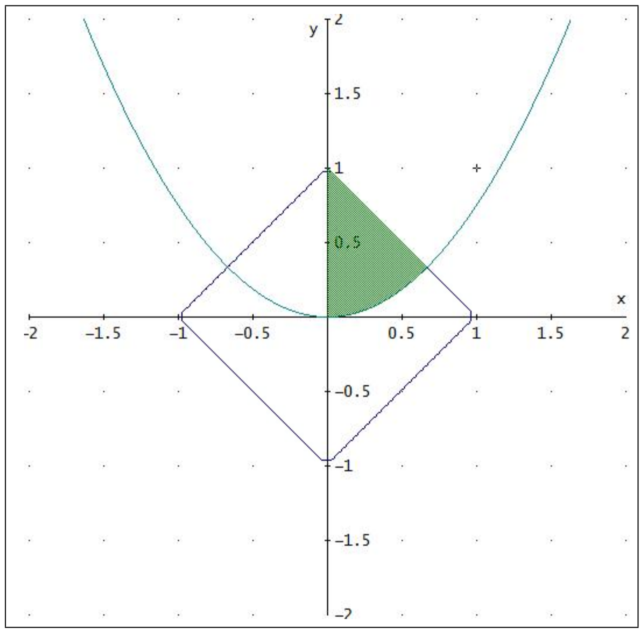


FIGURA 2. $A \cap B \cap C$

Per calcolare l'area é necessario determinare le coordinate dell'intersezione, $x > 0$, tra la retta e la parabola

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ \\ y = \frac{3}{4}x^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x + \frac{3}{4}x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

Ne segue

$$Area(A \cap B \cap C) = \iint_{A \cap B \cap C} dxdy = \int_0^{2/3} dx \int_{3x^2/4}^{1-x} dy = \frac{10}{27}$$

L'integrale doppio:

$$\iint_{A \cap B \cap C} x\, dx\, dy = \int_0^{2/3} x\, dx \int_{3x^2/4}^{1-x} dy \int_0^{2/3} (x - x^2 - \frac{3}{4}x^3)\, dx = \frac{7}{81}$$

3. Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y)=e^{x^2-y^2}$$

- *trovare i punti critici e determinare se sono punti di massimo, di minimo o di sella,*
- *trovare il massimo e il minimo di $f(x,y)$ nel disco*

$$D:\ \{x^2+y^2\le 1\}$$

Soluzione:

Punti critici:

$$f_x=2x\,e^{x^2-y^2}=0\to x=0,\quad f_y=-2y\,e^{x^2-y^2}=0\to y=0$$

L'origine $(0,0)$ é l'unico punto critico di f

Per determinare se si tratti di un punto di massimo, di minimo o di sella occorre calcolare la matrice hessiana

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2+4x^2)\,e^{x^2-y^2} & -4xy\,e^{x^2-y^2}\\ -4xy\,e^{x^2-y^2} & (-2+4y^2)\,e^{x^2-y^2}\end{pmatrix}$$

che nel punto critico diventa

$$H(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\quad\to\quad \det(H)=-4<0$$

Il punto critico $(0,0)$ é pertanto un punto di sella.

Il massimo e il minimo di f non possono quindi che trovarsi sulla frontiera

$$x^2+y^2=1\quad\to\quad x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\quad \vartheta\in[0,2\pi]$$

$$f=e^{\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)}\quad\to\quad f'=-4\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,e^{\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)}=0$$

$$\to\quad \vartheta=k\frac{\pi}{2}$$

Tali valori $\vartheta=k\frac{\pi}{2}$ rappresentano i 4 punti

$$(1,0),\quad (0,1),\quad (-1,0),\quad (0,-1)$$

Riesce quindi:

$$\begin{cases} f(1,0) & =e\\ f(0,1) & =e^{-1}\\ f(-1,0) & =e\\ f(0,-1) & =e^{-1}\end{cases}\quad\to\quad \max_{(x,y)\in D} f=e,\quad \min_{(x,y)\in D} f=e^{-1}$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Un approccio utile poteva essere riconoscere che*

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} = e^{x^2} \, . \, e^{-y^2}$$

- *il primo fattore,* e^{x^2} *crescente allontanandosi da* $x = 0$,
- *il secondo fattore* e^{-y^2} *decrescente allontanandosi da* $y = 0$.

Ne risulta evidente che l'origine é punto di sella e che gli estremi nel disco siano raggiunti nei quattro punti intersezione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ *con gli assi.*

4. Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left\{ \frac{x}{2}, \, \frac{y}{8} \right\}$$

- *calcolare* $rot(F)$
- *determinare un potenziale per* $\overrightarrow{F}$,
- *determinare l'insieme dei punti* $P = (x, y)$ *del piano tali che il lavoro del campo* $\overrightarrow{F}$ *da* $A = (2, 0)$ *a* $P = (x, y)$ *sia positivo.*

$\boxed{\textit{Soluzione:}}$

$$\text{rot}\,(F) = \left\{ 0, \, 0, \, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{8}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2}\right) \right\} = \{0, 0, 0\}$$

Un potenziale si calcola determinandoi prima le primitive rispetto ad x della prima componente

$$U(x, y) = \frac{x^2}{4} + c(y)$$

quindi determinando la $c(y)$ in modo che

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{4} + c(y)\right) = \frac{y}{8} \quad \to \quad c'(y) = \frac{y}{8} \quad \to \quad c(y) = \frac{y^2}{16} + k$$

Quindi i potenziali di F sono

$$U(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + k$$

Tenuto conto che

$$\int_{\overrightarrow{AP}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{T} \, ds = U(P) - U(A)$$

i punti $P = (x, y)$ richiesti devono soddisfare la condizione

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+k-\left(\frac{2^2}{4}+\frac{0^2}{16}+k\right)>0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}>1$$

L'insieme richiesto é pertanto l'esterno dell'ellisse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Tenuto conto che il campo*

$$\overrightarrow{F}(x,y)=\left\{\frac{x}{2},\,\frac{y}{8}\right\}$$

é diretto su ogni semiretta per l'origine nel verso di allontanamento dall'origine si intuisce che il lavoro di F sará positivo per spostamenti da A

verso l'esterno

Del resto qualunque punto P esterno all'ellisse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

puó essere raggiunto da A con la traiettoria indicata in Figura 3, metá seguendo l'ellisse, linea equipotenziale quindi a lavoro nullo, metá diretti verso P seguendo le linee di forza del campo F, compiendo quindi lavoro positivo.

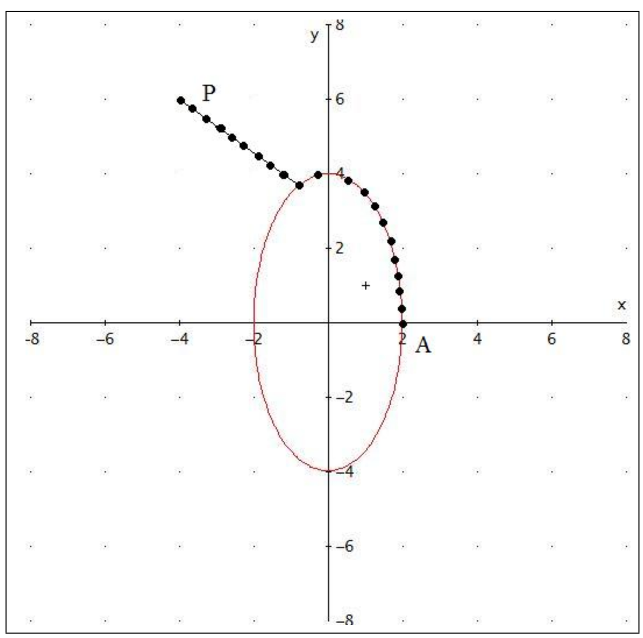


FIGURA 3. Da A a P

CAPITOLO 37

Esame Settembre 2006

1. Esercizio

Sia

$$E := \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 - y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- disegnare l'insieme E,
- detta
  $$f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$
  esaminare se é applicabile a f in E il teorema di Weierstrass,
- trovare due punti di E in cui la f prenda valori di segno opposto ed esaminare se é applicabile il teorema di esistenza degli zeri.

2. Esercizio

Siano

$$A : \{|x| + |y| \leq 1\}, \quad B : \{\tfrac{3}{4}\, x^2 \leq y\}, \quad C : \{x \geq 0\}$$

- disegnare l'insieme $A \cap B \cap C$ e riconoscere che é misurabile secondo Peano Jordan,
- determinare l'area di $A \cap B \cap C$,
- calcolare l'integrale doppio
  $$\iint_{A \cap B \cap C} x \, dx \, dy$$

3. Esercizio

Data la funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

- trovare i punti critici e determinare se sono punti di massimo, di minimo o di sella,
- trovare il massimo e il minimo di $f(x, y)$ nel disco
  $$D : \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

4. Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\{\frac{x}{2}, \frac{y}{8}\right\}$$

- calcolare $\operatorname{rot}(F)$
- determinare un potenziale per $\overrightarrow{F}$,
- determinare l'insieme dei punti $P = (x, y)$ del piano tali che il lavoro del campo $\overrightarrow{F}$ da $A = (2, 0)$ a $P = (x, y)$ sia positivo.

Parte 10

Indice analitico

Indice analitico