FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI
2006-2007

Soluzioni Esame scritto

28 marzo 2007

1.1. Esercizio. *Sia:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & se \quad x^2+y^2 \leq 1 \\ 1 & se \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

- *Dire se f é limitata e indicare i suoi estremi inferiore e superiore.*
- *Determinare l'immagine di $Q := \{0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$.*
- *Dire se f é differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.*

SOLUZIONE:

La funzione é limitata:

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0 = f(0,0), \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 1 = f(1,1)$$

I suoi estremi sono pertanto anche minimo e massimo.
Il minimo é assunto in un solo punto, l'origine.
Il massimo é assunto in tutti i punti $x^2+y^2 \geq 1$

L'immagine $f(Q)$ cioé l'insieme dei valori $f(x,y)$ al variare di $(x,y) \in Q$ é l'intervallo $[0,1]$: infatti

- tra i valori da considerare ci sono $f(0,0) = 0$ ed $f(1,1) = 1$
- di conseguenza, essendo Q connesso per poligonali, ci sono anche tutti i valori intermedi: $[0,\ 1] \subseteq f(Q)$
- non ci possono essere altri valori perché $f(x,y) \in [0,1],\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

f coincide

- nel cerchio aperto $x^2+y^2 < 1$ con il polinomio x^2+y^2, funzione differenziabile
- nel complementare del cerchio chiuso, $x^2+y^2 > 1$, con la costante 1, funzione differenziabile,

gli unici punti in cui puó essere non differenziabile sono quelli della circonferenza $x^2+y^2 = 1$.
Si noti infatti in Figura 1 l'aspetto angoloso che il grafico di f mostra in tali punti.

In tali punti f non é differenziabile: infatti in tali punti non ha una almeno delle derivate parziali prime.
Consideriamo ad esempio la derivata rispetto ad x nel punto $(1,0)$:

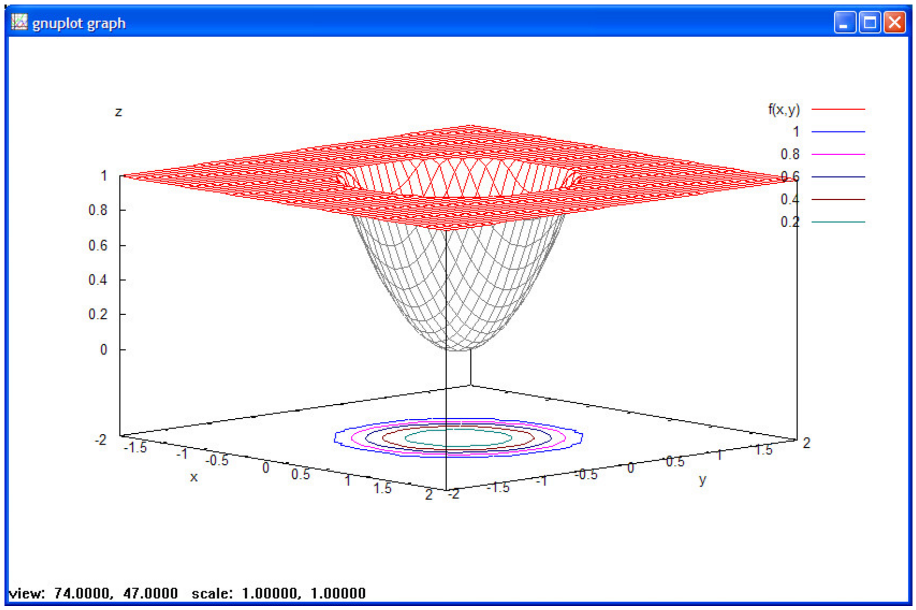

FIGURA 1. La $f(x,y)$ del primo eser4cizio.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}$$

Riesce:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} & = \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h} & = 2 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} & = \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{1-1}{h} & = 0 \end{cases}$$

La diversitá dei due limiti prova che f non ha la derivata parziale rispetto ad x nel punto $(1,0)$.
Ragionamenti analoghi provano la non esistenza della derivata rispetto ad x in tutti gli altri punti della circonferenza, esclusi i due *poli* $(0,1)$ e $(0,-1)$.
In tali due *poli* $(0,1)$ e $(0,-1)$ é del resto facile riconoscere che manca la derivata parziale rispetto ad y.
Riassumendo: f non é differenziabile in nessun punto della circonferenza $x^2+y^2=1$

1.2. Esercizio. *Sia* $f(x,y)=(x^2+y^2)+(x-1)^2+(y-1)^2$

- *Determinare i punti critici di* f *e classificarli come punti di minimo, di massimo o di sella,*

- *Determinare massimo e minimo di f nel cerchio $C := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.*
- *Posto*
$$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta),\, \rho\sin(\theta))$$
calcolare le derivate parziali g_ρ, g_θ e determinare il polinomio di Taylor di primo ordine per $g(\rho,\theta)$ di punto iniziale $(0,0)$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$f(x,y) = 2x^2+2y^2-2x-2y+2 \quad \to \quad \begin{cases} f_x = 4x-2=0 \\ f_y = 4y-2=0 \end{cases} \quad \to \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Tenuto conto che
$$f_{xx} = 4,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 4$$
si riconosce che il punto critico trovato é un punto di minimo.

Il cerchio $C := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ assegnato é un insieme chiuso e limitato quindi la funzione continua f é ivi dotata di minimo e di massimo. Tali valori sono raggiunti:

- o nel punto critico $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\quad \to \quad f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1$
- o sulla frontiera, $x^2 + y^2 = 1$.

I valori sulla frontiera si esplorano servendosi della rappresentazione parametrica
$$x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ t \in [0, 2\pi[\quad \to \quad f = 4 - 2(\cos(t) + \sin(t))$$

Annullando la derivata prima si ha
$$2(-\sin(t) + \cos(t)) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} t = \pi/4 & f = 4 - 2\sqrt{2} \\ t = 5\pi/4 & f = 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Ne segue[1]
$$\min_{(x,y)\in C} f(x,y) = 1, \qquad \max_{(x,y)\in C} f(x,y) = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$g_\rho = f_x\, x_\rho + f_y\, y_\rho = (4\rho\cos(\theta) - 2)\cos(\theta) + (4\rho\sin(\theta) - 2)\sin(\theta)$$
$$g_\theta = f_x\, x_\theta + f_y\, y_\theta = (4\rho\cos(\theta) - 2)\,(-\rho\sin(\theta) + (4\rho\sin(\theta) - 2)\,\rho\cos(\theta)$$

$$\begin{cases} g_\rho = 4\rho - 2(\sin(\theta) + \cos(\theta)) \\ g_\theta = 2\rho(\sin(\theta) - \cos(\theta)) \end{cases}$$

[1] Era stato, erroneamente, indicato il valore $4 - \sqrt{2}$ come minimo: invece il valore piú basso é $f(1/2, 1/2) = 1$

Il polinomio di Taylor richiesto é, per definizione,

$$g(0,0) + g_\rho(0,0)\rho + g_\theta(0,0)\theta \quad \to \quad 2 - 2\rho$$

1.3. Esercizio. *Sia*

$$D := \{0 \le x \le 1, \ \ -4(1-x^2) \le y \le 1 - x^2\}$$

- *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_D y\, dx\, dy$$

- *Calcolare il precedente integrale doppio servendosi del cambiamento di coordinate*

$$u = x, \quad v = \frac{y}{1-x^2}$$

- *Disegnare D e calcolare il volume del solido ottenuto per rotazione di D con asse di rotazione l'asse y*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\iint_D y\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{-4(1-x^2)}^{1-x^2} y\, dy = -\frac{15}{2}\int_0^1 (1 + x^4 - 2x^2)\, dx = -4$$

Il cambiamento di variabile indicato implica

$$(x, y) \in D \quad \to \quad \begin{cases} 0 & \le & u & \le 1 \\ -4 & \le & v & \le 1 \end{cases}$$

Tenuto conto delle formule inverse

$$x = u, \quad y = v(1-u^2), \quad \to \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2uv & 1-u^2 \end{vmatrix} = 1 - u^2$$

si ha

$$\iint_D y\, dx\, dy = \int_0^1 du \int_{-4}^1 v(1-u^2)|1-u^2|\, dv =$$

$$-\frac{15}{2}\int_0^1 (1-u^2)^2\, du = -4$$

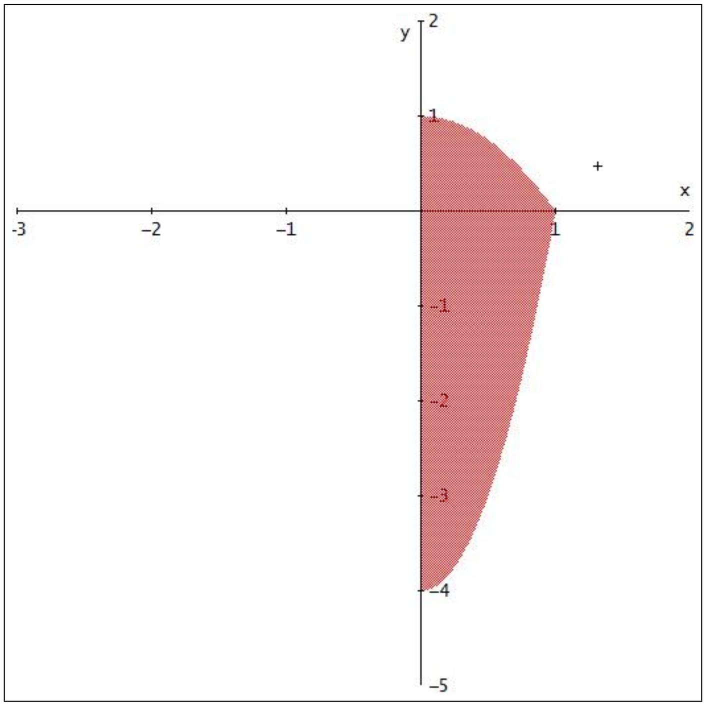

FIGURA 2. $D := \{0 \leq x \leq 1,\ \ -4(1-x^2) \leq y \leq 1-x^2\}$

Per calcolare il volume del solido Σ di rotazione[2] intorno all'asse y occorre procurarsi l'espressione della curva che ruoterá come

$$x = \phi(y)$$

Ne segue

$$\begin{array}{ccll} y = 1-x^2 & \rightarrow & x = \sqrt{1-y}, & y \in [0,1] \\ y = 4x^2-4 & \rightarrow & x = \dfrac{1}{2}\sqrt{y+4}, & y \in [-4,0] \end{array}$$

Da cui

$$\text{Volume}(\Sigma) = \pi \left\{ \int_0^1 (1-y)\,dy + \int_{-4}^0 \frac{1}{4}(y+4)\,dy \right\} = \frac{5}{2}\pi$$

1.4. Esercizio. *Sia*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\{\sin^2(x+y),\ -\cos^2(x+y)\right\}$$

- *Calcolare* $rot(\overrightarrow{F})$

[2] Vedi Dispense di FPV, Cap. 16, §10

- *Calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo il segmento* $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ *percorso da* A *verso* B.
- *Determinare un potenziale di* $\overrightarrow{F}$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ \sin^2(x+y) & -\cos^2(x+y) & 0 \end{vmatrix} = \{0,0,0\}$$

Una rappresentazione parametrica del segmento AB é la seguente

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad t \in [0,1]$$

che induce, al crescere di t esattamente il verso di percorrenza richiesto, da A verso B.

$$\ell = \int_0^1 \left\{-\sin^2(1) - \cos^2(1)\right\} dt = -1$$

Il campo assegnato, ha rotore nullo ed é definito in tutto il piano, quindi, lemma di Poincaré, é dotato di potenziale:

$$U(x,y) = \int \sin^2(x+y)\,dx \quad \to$$

$$\to \quad U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x+y)\cos(x+y)\right) + g(y)$$

imponendo che

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left(x - \sin(x+y)\cos(x+y)\right) + g(y)\right\} = -\cos^2(x+y)$$

si ottiene

$$\frac{1}{2} + g'(y) = 0 \quad \to \quad g(y) = -\frac{1}{2}y + c$$

I potenziali richiesti sono pertanto

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x+y)\cos(x+y)\right) - \frac{1}{2}y + c$$

ovvero

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - y - \sin(x+y)\cos(x+y)\right) + c$$