FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI
2006-2007

Soluzioni Esame scritto

19 settembre 2007

2.1. Esercizio.
Sia $f = f(x, y)$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{1 + x^2 + 4y^2} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione f in $\mathbb{R}^2$ e dire se si tratta di massimo e minimo, rispettivamente.*
- *Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Determinare l'insieme immagine $f(B)$.*
- *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $(0, 0)$.*

SOLUZIONE:

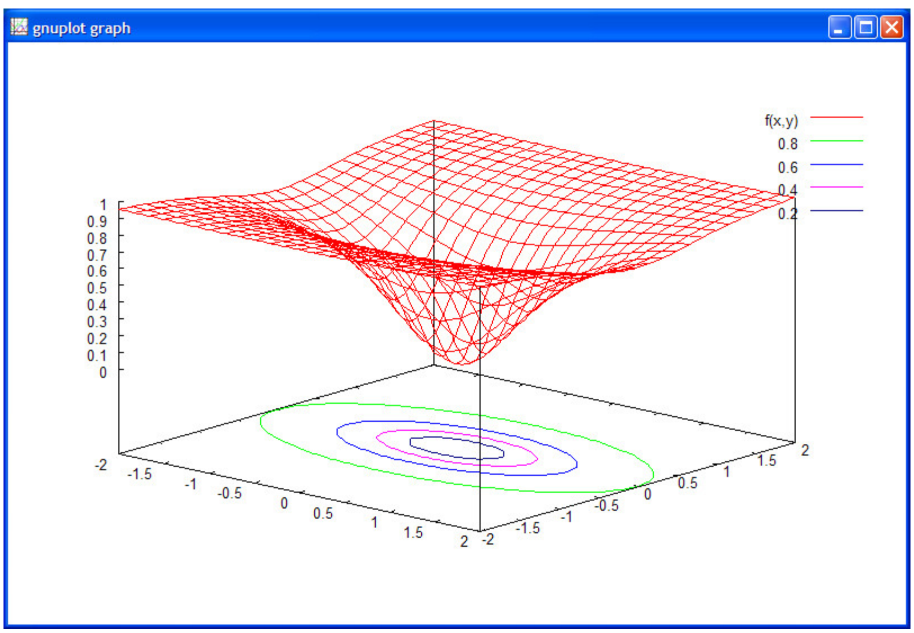

FIGURA 1. $f(x, y) = \frac{x^2+4y^2}{1+x^2+4y^2} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

Indicato con

$$t = x^2 + 4y^2 \quad \rightarrow \quad f(x, y) = \frac{t}{1 + t}, \quad t \geq 0$$

Ne segue, tenuto conto che l'espressione in t é monotona crescente,

$$0 \leq f(x, y) < 1$$

Ovvero

- $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = 0 = f(0, 0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$

- $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 1$ non é massimo.

L'immagine di B, insieme chiuso, limitato e connesso tramite la funzione continua f sará necessariamente un intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$:

- tenuto conto che $(0,0) \in B,\ f(0,0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ ne segue che $a = 0$
- tenuto conto che $\dfrac{t}{1+t}$ é crescente e che

  $$(x,y) \in B \quad \to \quad t \leq 4$$

  ne segue che il massimo di f su B é $\dfrac{4}{1+4}$
- quindi $f(B) = [0, 4/5]$

Ricordando che

- $\dfrac{t}{1+t} = t\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k$
- $f(x,y) = (x^2+4y^2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(x^2+4y^2)^k$
- Il polinomio di Taylor di secondo grado é quindi

  $$P(x,y) = x^2 + 4y^2$$

2.2. Esercizio.

Sia $f = f(x,y)$ la funzione definita da

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)x \qquad\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Determinarne i punti critici e classificarli come punti di minimo, di massimo, di sella.*
- *Determinarne il massimo ed il minimo nell'insieme*

  $$B_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  .
- *Determinarne il massimo ed il minimo nell'insieme*

  $$B_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

  .

SOLUZIONE:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = & 1 - 3x^2 - y^2 = & = 0 \\ f_y(x,y) = & -2xy & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, & y = 0 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, & y = 0 \\ x = 0, & y = -1 \\ x = 0, & y = 1 \end{cases}$$

La classificazione fa uso dell'hessiano

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 12x^2 - 4y^2$$

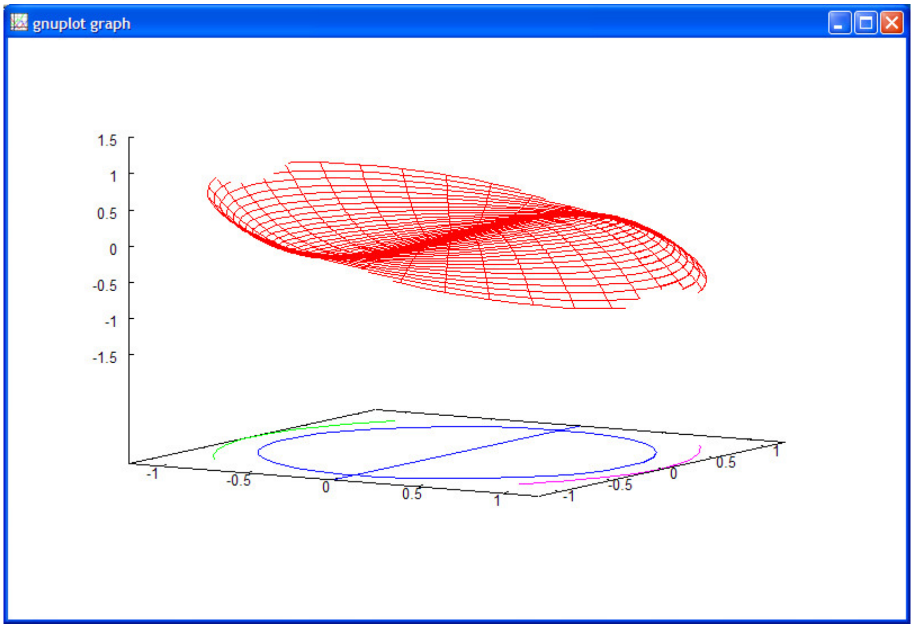

FIGURA 2. $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)x \qquad\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

Si riconosce pertanto che i primi due punti, $x = \pm 1/\sqrt{3}$, $y = 0 \quad \rightarrow \quad H(x,y) > 0$ sono minimo il primo e massimo il secondo, gli altri due, $x = 0,\ y = \pm 1$ sono punti di sella.
All'interno del cerchio B_1 cadono il punto critico di minimo e quello di massimo. Sulla circonferenza frontiera riesce $f = 0$.
Pertanto

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = 0, \quad f(x,y) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} & \rightarrow \quad \displaystyle\min_{(x,y)\in B_1} f(x,y) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = 0, \quad f(x,y) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} & \rightarrow \quad \displaystyle\max_{(x,y)\in B_1} f(x,y) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

All'interno del cerchio B_2 non cadono punti critici: il massimo e il minimo pertanto vengono assunti sulla frontiera.
Sulla circonferenza frontiera riesce

$$f(x,y) = \frac{3}{4}\,x$$

pertanto, tenuto conto che $-1/2 \leq x \leq 1/2$ si ha

$$\min_{(x,y)\in B_1} f(x,y) = -\frac{3}{8}, \quad \max_{(x,y)\in B_1} f(x,y) = \frac{3}{8}$$

2.3. Esercizio.

Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \leq 1\}$.

- *Dopo aver dimostrato che*

$$D = \{-1 \leq x + y \leq 1\} \cap \{-1 \leq x - y \leq 1\}$$

disegnare D.

- *Calcolare gli integrali doppi*

$$\iint\limits_D y\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_D x^2\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_D (y+3x^2)\,dx\,dy.$$

- *Dopo aver verificato che la trasformazione*

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y \end{cases}$$

definisce un cambio di coordinate, calcolare, utilizzando tale cambiamento, l'integrale doppio

$$\iint\limits_D (x+y)^2\,dx\,dy.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$|x|+|y| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 & y \ge 0 & x+y \le 1 \\ x \le 0 & y \ge 0 & -x+y \le 1 \\ x \le 0 & y \le 0 & -x-y \le 1 \\ x \ge 0 & y \le 0 & x-y \le 1 \end{cases}$$

La prima e la terza delle disequazioni ottenute corrispondono a

$$-1 \le x+y \le 1$$

mentre la seconda e la quarta corrispondono a

$$-1 \le x-y \le 1$$

L'insieme D é normale rispetto all'asse x: infatti

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow -1 \le x \le 1, \quad -1+|x| \le y \le 1-|x|$$

Pertanto

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} y\,dy = 0$$

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} x^2\,dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} dy = 4\int_0^1 x^2(1-x)dx = 4(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}$$

Il terzo integrale si ricava, per linearitá dai due giá calcolati:

$$\iint\limits_D (y+3x^2)\,dx\,dy = 1$$

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} u^2 dv = \frac{2}{3}.$$

2.4. Esercizio.

Per ciascuno dei campi vettoriali seguenti

$$\mathbf{F}(x,y) = (y\,e^{xy}, x\,e^{xy}), \qquad \mathbf{G}(x,y) = (x\,e^{xy}, y\,e^{xy}).$$

- *dire se si tratta di un campo conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.*
- *Sia* Γ *la poligonale data dai punti* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(1,1)$. *Calcolare*

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds, \qquad \int_\Gamma \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\,ds,$$

- *Dire se esiste una funzione* $f = f(x,y,z)$ *tale che il campo vettoriali in* $\mathbb{R}^3$ *di componenti* $(x\,e^{xy}, y\,e^{xy}, f(x,y,z))$ *e' conservativo.*

SOLUZIONE:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}(x,y) = \nabla e^{xy}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{G}(x,y) \neq 0, \quad \rightarrow \quad \text{non} \quad \text{conservativo}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_\Gamma \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y\,e^y\,dy = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Il campo $(x\,e^{xy}, y\,e^{xy}, f(x,y,z))$ per essere conservativo deve avere rotore nullo: condizione che implica

$$\begin{cases} f_y(x,y,z) = 0 \\ f_x(x,y,z) = 0 \\ (y^2 - x^2)\,e^{xy} = 0 \end{cases}$$

condizioni chiaramente incompatibili: le prime due richiedono una f costante rispetto ad x e ad y mentre l'ultima richiede una condizione non vera, indipendentemente dalla scelta di f.

Quindi non esiste alcuna f rispetto alla quale il campo sia conservativo.

OSSERVAZIONE 2.1. *Del resto se* $(x\,e^{xy}, y\,e^{xy}, f(x,y,z))$ *fosse stato conservativo per qualche* f *speciale allora il lavoro lungo circonferenze del piano* $z = 0$ *sarebbe stato, come su ogni curva chiusa, nullo.*

Ma il lavoro lungo le curve del piano $z = 0$ *é determinato solo dal campo* $\{x\,e^{xy}, y\,e^{xy}\}$ *che sappiamo essere non conservativo...!*