CAPITOLO 1

Primo esonero

31 Gennaio 2007

1.1. Esercizio. *Sia f la funzione definita da*

$$f(x,y) := \exp\left(-\frac{x^2}{y}\right).$$

i: *Determinare l'insieme di definizione della funzione f e le curve di livello relative ai valori $0, \frac{1}{2}, 1, 2$*

ii: *calcolare $\nabla f(x,y)$*

iii: *dire se la funzione f e' prolungabile ad una funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}^2$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

i: La funzione è definita per $y \neq 0$, cioè è definita nei due semipiani aperti

$$\{y < 0\} \cup \{y > 0\}$$

La curva di livello $f(x,y) = 0$ corrisponde all'insieme vuoto tenuto conto che $e^t \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Le curve di livello $f(x,y) = k,\ k \neq 0$, vedi Figura 1, corrispondono alle soluzioni dell'equazione

$$-\frac{x^2}{y} = \log(k)$$

Pertanto

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \frac{1}{2} & x^2 = \log(2)y \\ f(x,y) = 1 & x = 0 \\ f(x,y) = 2 & x^2 = -\log(2)y \end{array}$$

ii:

$$f_x(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{y}\right)\left(-\frac{2x}{y}\right), \quad f_y(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$$

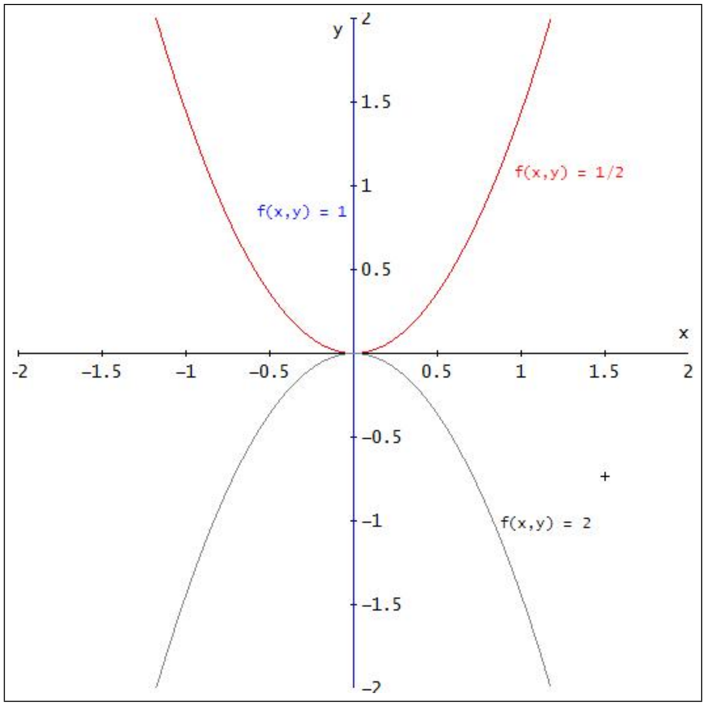

FIGURA 1. $f(x,y) = k, \quad k = 1/2, 1, 2$

iii: La funzione $f(x,y)$ non è prolungabile in modo continuo a tutto $\mathbb{R}^2$ tenuto conto che, per ogni $x \neq 0$ riesce

$$\lim_{y \to 0^-} f(x,y) = \lim_{y \to 0^-} \exp\left(-\frac{x^2}{y}\right) = +\infty$$

La non prolungabilitá nell'origine era del resto evidente dal momento che le tre linee di livello cercate, relative a tre livelli $1/2, 1, 2$ diversi passerebbero tutte e tre nell'origine !

1.2. Esercizio.

i: *Dire se la funzione* $f(x,y) := \cos(\sqrt{x^2+y^2})$ *é derivabile rispetto ad* x *e rispetto ad* y *in* $(0,0)$ *e, in caso affermativo, calcolare* $\nabla f(0,0)$

ii: *Dire se la funzione* $f(x,y) := \sin(\sqrt{x^2+y^2})$ *é derivabile rispetto ad* x *e rispetto ad* y *in* $(0,0)$ *e, in caso affermativo, calcolare* $\nabla f(0,0)$

iii: (facoltativo) *Dire per quali funzioni* $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$*, la funzione*

$$f(x,y) := \phi(\sqrt{x^2+y^2})$$

é derivabile rispetto ad x *e rispetto ad* y *nel punto* $(0,0)$*.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

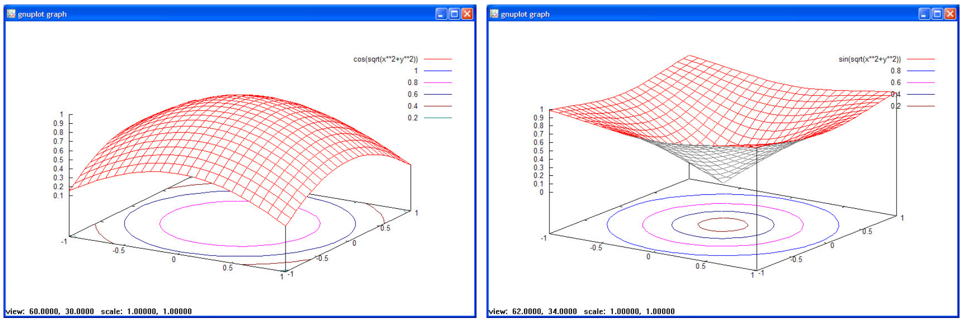

FIGURA 2. $\cos(\sqrt{x^2+y^2})$, e, a destra, $\sin(\sqrt{x^2+y^2})$

i: Consideriamo i due rapporti incrementali (del resto uguali)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ \\ \dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \end{array}\right. = \frac{\cos(|h|)-1}{h}$$

Tenuto conto che $\cos(|h|) = \cos(h)$ e che, servendosi del Teorema di Hopital,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)}{1} = 0$$

si riconosce che

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, \quad \nabla f(0,0) = \{0,\ 0\}$$

ii: Consideriamo i due rapporti incrementali (ancora del resto uguali)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ \\ \dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \end{array}\right. = \frac{\sin(|h|)}{h}$$

Tenuto conto che

$$\sin(|h|) = \left\{\begin{array}{ll} \sin(h) & \text{se } h \geq 0 \\ \\ -\sin(h) & \text{se } h \leq 0 \end{array}\right.$$

e tenuto conto che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

si riconosce che non esiste il limite di

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(|h|)}{h}$$

ovvero che la funzione $f(x,y):=\sin(\sqrt{x^2+y^2})$ non ha le derivate parziali prime nell'origine.

iii: Consideriamo, in generale il rapporto incrementale

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\phi(|h|)-\phi(0)}{h}$$

prima per $h>0$ e poi per $h<0$, servendosi del teorema di Hopital:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\phi(|h|)-\phi(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\phi(h)-\phi(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\phi'(h)}{1}=\phi'(0)$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\phi(|h|)-\phi(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\phi(-h)-\phi(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\phi'(-h)}{1}=-\phi'(0)$$

L'indagine sull'altra derivata parziale è del tutto equivalente.

Pertanto condizione sufficiente perchè la funzione radiale $f(x,y):=\phi(\sqrt{x^2+y^2})$ possieda le derivate parziali nell'origine è

- $\phi(r)\in C^1(\mathbb{R})$
- $\phi'(0)=0$

In tal caso riesce

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=\phi'(0)=0$$

Osservazione 1.1. *Il grafico di una funzione radiale*

$$f(x,y):=\phi(\sqrt{x^2+y^2})$$

si costruisce facendo ruotare il grafico della $\phi(r)$: questa costruzione fa capire come solo se $\phi'(0)=0$, tangente orizzontale nell'origine, la superficie di rotazione grafico della funzione radiale sia senza spigoli nell'origine.

Nei due casi trattati, il primo $f(x,y):=\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ si riferiva alla funzione $\cos(r)$ che ha effettivamente la derivata prima nulla nell'origine (e la f ha avuto le sue due derivate prime nell'origine), il secondo $f(x,y):=\sin(\sqrt{x^2+y^2})$, si riferiva alla $\sin(r)$ che ha derivata prima nell'origine $\sin'(0)=\cos(0)=1\neq 0$.

1.3. Esercizio.
Sia P_n la successione di punti definita da

$$P_n := \left(\frac{\cos(n^2)}{1+n^2}, \frac{(-1)^n\, n^2}{1+n^2} \right).$$

i: *Dimostrare che la successione P_n è limitata.*
ii: *Individuare una sottosuccessione di P_n convergente.*
iii: (facoltativo) *Dimostrare che la successione P_n non ammette sottosuccessioni convergenti a $(0,0)$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

i: La successione $\{P_n\}$ è limitata se e solo se sono limitate le due successioni

$$x_n = \frac{\cos(n^2)}{1+n^2}, \quad y_n = \frac{(-1)^n\, n^2}{1+n^2}$$

cosa che accade, infatti

$$\left| \frac{\cos(n^2)}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2} \leq 1, \quad \left| \frac{(-1)^n\, n^2}{1+n^2} \right| \leq \frac{n^2}{1+n^2} 1 \leq 1$$

ii: La successione delle x_n è convergente a zero: quella delle y_n non è convergente, ma sono convergenti le due sottosuccessioni

$$\{y_{2k}\}, \qquad \{y_{2k+1}\}$$

dei termini di indice $2k = 2, 4, 6, ...$ pari e di quelli di indice $2k+1 = 1, 3, 5, ...$ dispari: convergono a 1 le y_{2k} e convergono invece a -1 le y_{2k+1}.

Quindi le due sottosuccessioni $\{P_{2k}\}$ e $\{P_{2k+1}\}$ della successione assegnata sono convergenti:

$$\lim_{k\to\infty} P_{2k} = (0,1), \qquad \lim_{k\to\infty} P_{2k+1} = (0,-1)$$

iii: I termini della successione $\{y_n\}$ prendono, al crescere di n, valori sempre piú vicini a -1 quelli di indice dispari e a 1 quelli di indice pari.

In altri termini gli y_n oscillano tra valori sempre piú vicini a -1 e valori sempre piú vicini a 1.

Non è quindi possibile trovare una sottosuccessione

$$y_{n_k} \quad \to \quad 0$$

Quindi non esiste alcuna sottosuccessione della $\{P_n\}$ che possa convergere a $(0,0)$.

1.4. Esercizio.

Sia $f(x,y) := (|x| - y)^2$.

i: *Disegnare le curve di livello relative ai valori* $0, 1$ *e* 2.

ii: *Sia* $D := \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Dire se la funzione* f, *considerata nell'insieme* D, *verifica le ipotesi del Teorema di Weierstrass e se verifica quelle del Teorema dei valori intermedi.*

iii: *Individuare l'insieme immagine* $f(D)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

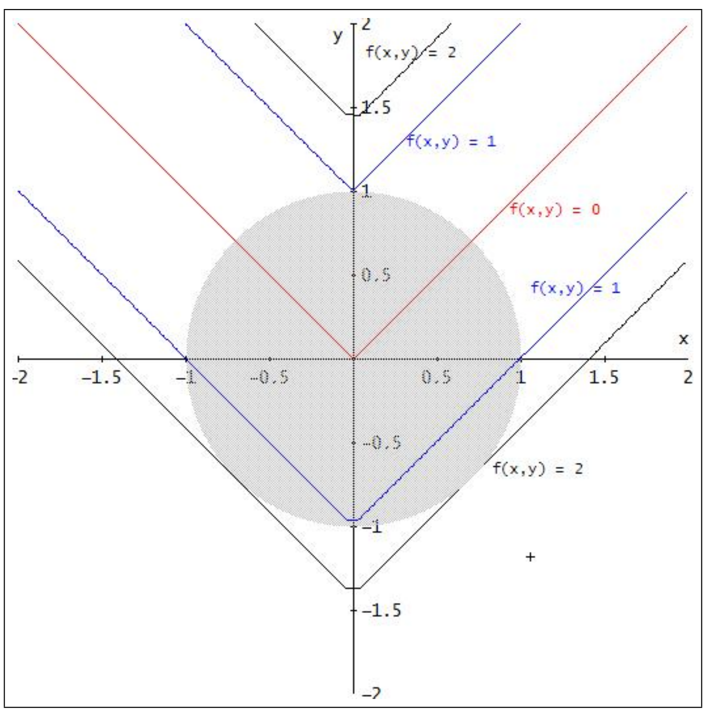

FIGURA 3. Le linee di livello di $f(x,y) := (|x| - y)^2$ e il cerchio D

i:

$$\begin{cases} (|x| - y)^2 = 0 & \to \quad |x| - y = 0 & \to \quad y = |x| \\ (|x| - y)^2 = 1 & \to \quad |x| - y = \pm 1 & \to \quad y = |x| \pm 1 \\ (|x| - y)^2 = 2 & \to \quad |x| - y = \pm\sqrt{2} & \to \quad y = |x| \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

ii: La funzione $(|x| - y)^2$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$, l'insieme

$$D := \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

il cerchio di centro l'origine e raggio 1 è un insieme chiuso e limitato: quindi sono verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass, la funzione ammette massimo e minimo in D.

Tenuto conto che D è anche connesso sono verificate anche le ipotesi del Teorema dei valori intermedi.

Unendo i due Teoremi possiamo quindi affermare che l'immagine $f(D)$ del cerchio D tramite f è l'intervallo $[m, M]$ essendo m il minimo ed M il massimo di f in D.

iii: Le tre linee di livello precedentemente tracciate e la figura di D, vedi Figura 3 fanno intuire che le linee di livello $k \in [0, 2]$ intersecano D, mentre quelle di livello $k > 2$ non lo intersecano.

Quindi $f(D) = [0, 2]$.