CAPITOLO 1

Secondo esonero

28 febbraio 2007

1. Esercizio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2y^2}-1}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- *calcolare il gradiente di f in $\mathbb{R}^2 - (0,0)$,*
- *calcolare il gradiente nell'origine,*
- *provare che f é differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ inclusa l'origine.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione assegnata, quoziente di due funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ é indefinitamente derivabile con tutte le derivate parziali continue $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

Le due derivate parziali si calcolano con le usuali regole di derivazione:

$$f_x(x,y) = \frac{-2\left(-1+e^{x^2\,y^2}\right)\,x}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{2\,e^{x^2\,y^2}\,x\,y^2}{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{-2\left(-1+e^{x^2\,y^2}\right)\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{2\,e^{x^2\,y^2}\,x^2\,y}{x^2+y^2}$$

Le due derivate parziali nell'origine sono calcolabili tramite i rispettivi rapporti incrementali

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

avendo tenuto conto che $f(h,0) = f(0,k) = f(0,0) = 0$.

Il gradiente nell'origine é pertanto nullo.

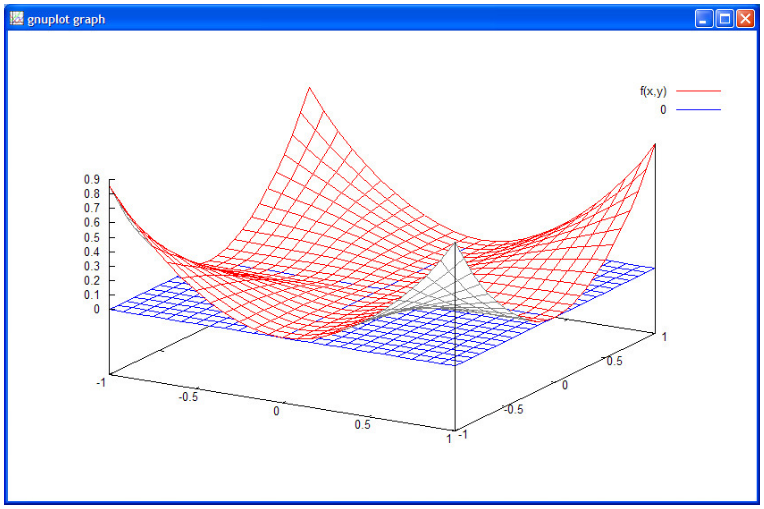

FIGURA 1. $z = f(x, y)$

La differenziabilitá della f

- in ogni punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ deriva dal fatto che nell'aperto $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ la f é dotata delle derivate parziali prime continue, condizione sufficiente alla differenziabilitá;
- nell'origine la (eventuale) differenziabilitá va controllata direttamente esaminando se riesca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \{f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

L'espressione, a conti fatti, si riduce a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}$$

Osservato che

$$x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2 \quad \to \quad \left|e^{x^2y^2} - 1\right| \leq e^{(x^2+y^2)^2} - 1$$

si ha, posto $x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\left|\frac{e^{x^2y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}\right| \leq \frac{e^{\rho^4} - 1}{\rho^3}$$

espressione certamente infinitesima per $\rho \to 0$ come si riconosce, per esempio servendosi del teorema di Hopital.

OSSERVAZIONE 1.1. *Il grafico di Figura 1 mostra come il grafico della $z = f(x, y)$ si accosti a quello del piano tangente*

$z = 0$ in $(0,0,0)$, : accostamento che corrisponde, geometricamente, alla differenziabilitá.

2. Esercizio

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \int_x^y \sqrt{1+\sin^2(t)}\, dt$$

- *determinare le derivate parziali prime $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$*
- *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine e punto iniziale $(0,0)$ relativo alla $F(x,y)$*
- *posto $\Phi(u,v) = F(u^2,v^2)$ calcolare il gradiente di Φ.*

Soluzione:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - \int_0^x \sqrt{1+\sin^2(t)}\, dt + \int_0^y \sqrt{1+\sin^2(t)}\, dt$$

da cui segue

$$\begin{cases} F_x(x,y) & = 2x - \sqrt{1+\sin^2(x)} & \rightarrow & F_x(0,0) = -1 \\ F_y(x,y) & = 2y + \sqrt{1+\sin^2(y)} & \rightarrow & F_y(0,0) = 1 \\ F_{xx}(x,y) & = 2 - \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} & \rightarrow & F_{xx}(0,0) = 2 \\ F_x y(x,y) & = 0 & \rightarrow & F_{xy}(0,0) = 0 \\ F_{yy}(x,y) & = 2 + \dfrac{\sin(y)\cos(y)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} & \rightarrow & F_{yy}(0,0) = 2 \end{cases}$$

Il polinomio di Taylor di secondo ordine é pertanto

$$P(x,y) = -x + y + x^2 + y^2$$

La funzione $\Phi(u,v)$ é ottenuta componendo la $F(x,y)$ con le

$$x = u^2, \quad y = v^2$$

pertanto

$$\frac{\partial}{\partial u}\Phi(u,v) = F_x(u^2,v^2)\frac{\partial x}{\partial u} + F_y(u^2,v^2)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\Phi(u,v) = F_x(u^2,v^2)\frac{\partial x}{\partial v} + F_y(u^2,v^2)\frac{\partial y}{\partial v}$$

Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial u}v^2 = \frac{\partial}{\partial v}u^2 = 0$$

si ha

$$\Phi_u(u,v) = 2u\left(2u^2 - \sqrt{1+\sin^2(u^2)}\right)$$
$$\Phi_v(u,v) = 2v\left(2v^2 + \sqrt{1+\sin^2(v^2)}\right)$$

Osservazione 2.1. *Il polinomio di Taylor trovato*

$$P(x,y) = -x + y + x^2 + y^2$$

corrisponde alla evidente approssimazione

$$(x,y) \approx (0,0) \quad \to \quad t \in (x,y): \ \sqrt{1+\sin^2(t)} \approx 1 \quad \to$$
$$\to \quad \int_x^y \sqrt{1+\sin^2(t)}\,dt \approx y - x$$

da cui

$$F(x,y) \approx x^2 + y^2 + y - x$$

espressione trovata per altra via.

3. Esercizio

$$f(x,y) = 1 + (x+y)^2 + 2y^2$$

- *determinare i punti critici,*
- *classificarli come punti di minimo, massimo o sella,*
- *determinare il minimo e il massimo di f in*

$$T := \{0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x\}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2(x+y) & = 0 \\ f_y(x,y) = 2(x+y) + 4y & = 0 \end{cases} \quad \to \quad (x,y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = 2 \\ f_{xy}(x,y) = 2 \\ f_{yy}(x,y) = 6 \end{cases} \quad \to \quad f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0) = 8 > 0$$

Essendo inoltre $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ il punto critico $(0,0)$ é certamente un punto di minimo relativo.
L'insieme T assegnato é chiuso e limitato: quindi la funzione continua $f(x,y)$ é dotata in esso di massimo e minimo.

All'interno di T non cadono punti critici di f: quindi il massimo e il minimo sono assunti sulla frontiera.

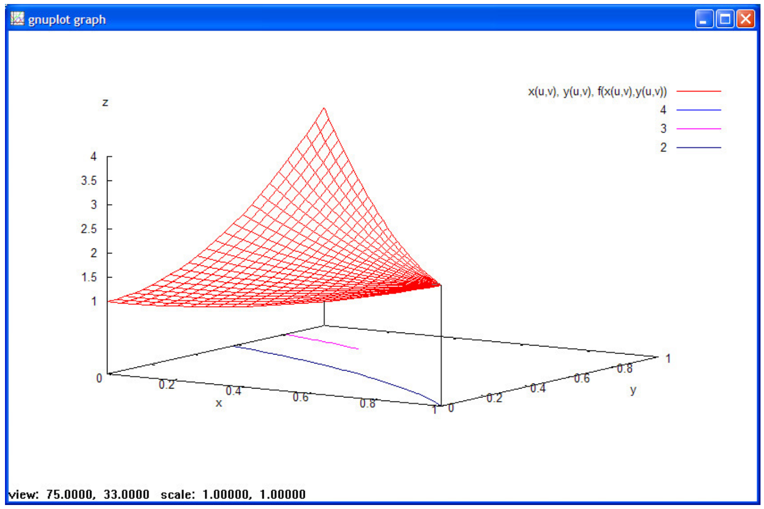

FIGURA 2. $z = f(x,y) = 1 + (x+y)^2 + 2y^2$ su $T := \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x\}$

La frontiera del triangolo rettangolo T é composta dei due cateti sugli assi e dell'ipotenusa, obliqua.

- cateto su $y = 0 \quad \rightarrow \quad f = 1 + x^2 \quad \rightarrow \quad 1 \leq f \leq 2$
- cateto su $x = 0 \quad \rightarrow \quad f = 1 + 3y^3 \quad \rightarrow \quad 1 \leq f \leq 4$
- ipotenusa $f = 2 + 2y^2 \quad \rightarrow \quad 2 \leq f \leq 4$

Ne segue, evidentemente

$$\min_{(x,y)\in T} f = 1, \quad \max_{(x,y)\in T} f = 4$$

4. Esercizio

Assegnati i domini normali

$$\begin{array}{ll} \Omega_- := & \{-1 \leq x \leq 0, \ \ 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2\}, \\ \Omega_+ := & \{\ \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2\} \end{array}$$

calcolare i seguenti integrali doppi

- $$\iint_{\Omega_-} x\,dx\,dy, \quad \iint_{\Omega_+} x\,dx\,dy$$
- $$\iint_{\Omega_-} x\,e^y\,dx\,dy, \quad \iint_{\Omega_+} x\,e^y\,dx\,dy$$
- $$\iint_{\Omega_-\cup\Omega_+} x^2\,dx\,dy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\iint_{\Omega_-} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{2x^2-1}^{x^2} x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0} x(x^2-2x^2+1) = -\frac{1}{4}$$

$$\iint_{\Omega_+} x\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{2x^2-1}^{x^2} x\,dy\right)dx = \int_{0}^{1} x(x^2-2x^2+1) = \frac{1}{4}$$

$$\iint_{\Omega_-} x\;e^y\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{2x^2-1}^{x^2} x\,e^y\,dy\right)\,dx = \int_{-1}^{0} x(e^{x^2}-e^{2x^2-1})dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{4e}-\frac{1}{4}e$$

$$\iint_{\Omega_+} x\;e^y\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{2x^2-1}^{x^2} x\,e^y\,dy\right)\,dx = \int_{0}^{1} x(e^{x^2}-e^{2x^2-1})dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4e}+\frac{1}{4}e$$

$$\iint_{\Omega_-\cup\Omega_+} x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{2x^2-1}^{x^2} x^2dy\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2(x^2-2x^2+1)dx = \frac{4}{15}$$

Osservazione 4.1. *Che i primi quattro integrali calcolati dovessero risultare due a due opposti poteva essere previsto considerando la simmetria tra i due insiemi di integrazione Ω_+ e Ω_- e la natura dispari della funzione integranda f sia nel primo caso, $f = x$ sia nel secondo caso $f = x\,e^y$.*