Terzo esonero

21 marzo 2007

1. Esercizio

- *Disegnare l'insieme*

  $$D := \{(x,y) \,:\, 1-x \leq y \leq 2-x,\, 2x-2 \leq y \leq 2x\}$$

  e calcolarne l'area.
- *Determinare una trasformazione lineare che mandi D in un rettangolo.*
- *Calcolare l'integale doppio*

  $$\int\!\!\int_D (x+2y)\,dx\,dy.$$

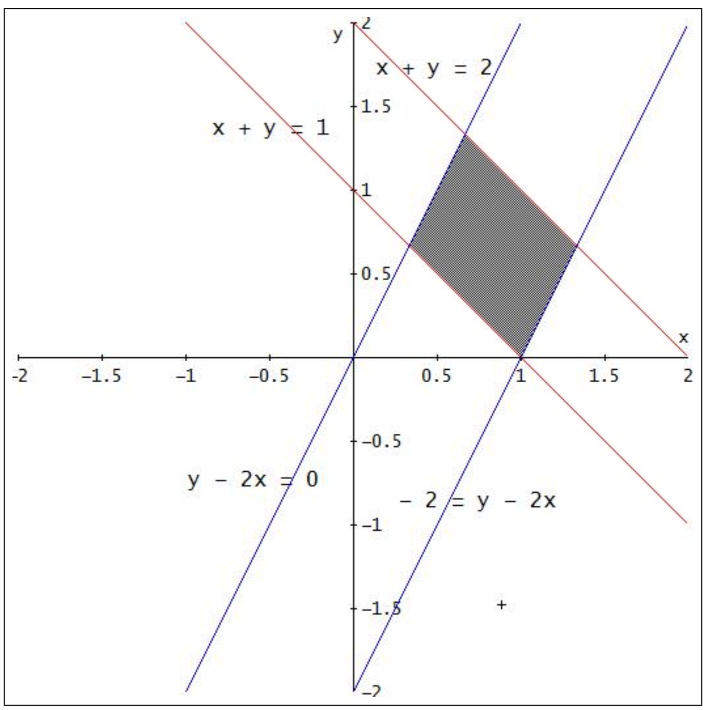

Figura 1. $D := \{(x,y) \,:\, 1 \leq x+y \leq 2,\, -2 \leq y-2x \leq 0\}$

1.1. Soluzione: Le limitazioni che definiscono il dominio D di integrazione

$$\begin{cases} 1 \leq & x+y & \leq 2 \\ -2 \leq & y-2x & \leq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = x+y \\ v = y-2x \end{cases}$$

da cui

$$(x,y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad (u,v) \in R := \{1 \leq u \leq 2,\, -2 \leq v \leq 0\}$$

Il cambiamento di coordinate affine é invertibile come segue

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = & \dfrac{1}{3}(u-v) \\ \\ y = & \dfrac{2}{3}u + \dfrac{1}{3}v \end{cases}$$

Tenuto conto che lo Jacobiano é

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

Riesce

$$Area(D) = |J|\, Area(R) = \frac{2}{3}$$

$$\iint_D (x+2y)\, dx\, dy = \frac{1}{3}\int_{-2}^{0} dv \int_1^2 \frac{1}{3}(5u+v)\, du = \frac{13}{9}$$

Il valore trovato rappresenta il volume del solido di $\mathbb{R}^3$

$$E := \{(x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq x+2y\}$$

2. Esercizio

Sia $f(x,y,z) = x+y+z$.

- *Calcolare l'integrale triplo di* f *sul dominio*
$$\Omega_0 := \{(x,y,z)\,:\, x,y,z \geq 0,\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$
- *Calcolare l'integrale triplo di* f *sul dominio*
$$\Omega_1 := \Omega_0 \cap \{(x,y,z)\,:\, x^2+y^2+z^2 \geq 1/4\}.$$
- *Calcolare l'integrale triplo di* f *sul dominio*
$$\Omega_2 := \Omega_1 \cap \{(x,y,z)\,:\, x-y \geq 0\}.$$

2.1. Soluzione: I tre integrali tripli proposti, relativi a porzioni sferiche si calcolano vantaggiosamente servendosi delle coordinate sferiche

$$f = x + y + z \quad \to \quad \rho(\sin(\psi)\cos(\vartheta) + \sin(\psi)\sin(\vartheta) + \cos(\psi))\, J =$$
$$= \rho^3 \left(\sin^2(\psi)\,[\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)] + \sin(\psi)\ \cos(\psi)\right)$$

$\boxed{\Omega_0}$

$$(x,y,z) \in \Omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 & \leq & \rho & \leq & 1 \\ 0 & \leq & \psi & \leq & \pi/2 \\ 0 & \leq & \vartheta & \leq & \pi/2 \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega_0} f dx dy dz =$$

$$= \int_0^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\psi)\,[\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)] + \sin(\psi)\ \cos(\psi)\right)\, d\vartheta = 3\frac{\pi}{16}$$

$\boxed{\Omega_1}$

$$(x,y,z) \in \Omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2} & \leq & \rho & \leq & 1 \\ 0 & \leq & \psi & \leq & \pi/2 \\ 0 & \leq & \vartheta & \leq & \pi/2 \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega_1} f dx dy dz =$$

$$= \int_{1/2}^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\psi)\,[\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)] + \sin(\psi)\ \cos(\psi)\right)\, d\vartheta = \frac{45\pi}{256}$$

$\boxed{\Omega_2}$

$$(x,y,z) \in \Omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1/2 & \leq & \rho & \leq & 1 \\ 0 & \leq & \psi & \leq & \pi/2 \\ 0 & \leq & \vartheta & \leq & \pi/4 \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega_2} f dx dy dz =$$

$$= \int_{1/2}^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^2(\psi)\,[\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)] + \sin(\psi)\ \cos(\psi)\right)\, d\vartheta = \frac{45\pi}{512}$$

3. Esercizio

- *Dire per quali scelte di $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale*
$$\overrightarrow{F}_a(x,y) = \left(x\, e^{-(x^2+a\,y^2)}, y\, e^{-(x^2+a\,y^2)}\right)$$
é conservativo e, per tali scelte, determinarne un potenziale.
- *Sia Γ la poligonale data dai punti $A = (-1,0)$, $B = (0,0)$ e $C = (0,1)$, orientata da A a C. Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$,*
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}_a \cdot \overrightarrow{T}\, ds$$
- *Dimostrare che il campo vettoriale*
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(x\,\phi(x^2+y^2), y\,\phi(x^2+y^2)\right)$$
é conservativo per ogni scelta di $\phi \in C^1(\mathbb{R})$.

3.1. Soluzione: Il campo $\overrightarrow{F}_a$ é definito in tutto il piano, aperto stellato, quindi per il Lemma di Poincaré é dotato di potenziale per tutti i valori a per i quali riesce rot $\overrightarrow{F}_a = 0$

Tenuto conto che
$$\text{rot } \overrightarrow{F}_a = \left\{0,\, 0,\, \frac{\partial}{\partial x}(y\, e^{-(x^2+a\,y^2)}) - \frac{\partial}{\partial y}(x\, e^{-(x^2+a\,y^2)})\right\} =$$
$$= \left\{0,\, 0,\, 2(a-1)\, x\, y\, e^{-(x^2+ay^2)}\right\}$$
ne segue
$$\text{rot } \overrightarrow{F}_a = 0 \quad \to \quad a = 1 \quad \to$$
$$\to \quad \overrightarrow{F}_1(x,y) = \left\{x\, e^{-(x^2+y^2)}, y\, e^{-(x^2+y^2)}\right\} = \nabla\, U(x,y)$$
Si riconosce facilmente che le due componenti di $\overrightarrow{F}_1$ sono le due derivate parziali della
$$U(x,y) = -\frac{1}{2} e^{-(x^2+y^2)}$$
che pertanto é un potenziale di F_1.

Il lavoro lungo la poligonale Γ deve comunque, almeno se $a \neq 1$ essere calcolato eseguendo le integrazioni
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}_a\,.\,\overrightarrow{T}\, ds = \int_{-1}^{0} x\, e^{-x^2}\, dx + \int_0^1 y\, e^{-ay^2} dy =$$
$$= \frac{1}{2}\{e^{-1} - 1\} - \frac{1}{2a}\{e^{-a} - 1\}$$

Nel caso $a = 1$ il lavoro é nullo: infatti

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}_a \,.\, \overrightarrow{T}\, ds = U(0,1) - U(-1,0) = 0$$

essendo i due punti $(0,1)$ e $(-1,0)$ appartenenti alla stessa linea di livello (la circonferenza di centro l'origine e raggio 1) della $U(x,y)$.
Per decidere se il campo

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \big(x\,\phi(x^2+y^2), y\,\phi(x^2+y^2)\big)$$

sia conservativo é necessario e sufficiente che si abbia

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = 0$$

Tenuto conto che

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \left\{0,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x}(y\,\phi(x^2+y^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(x\,\phi(x^2+y^2)\right\} =$$

$$= \big\{0,\ 0,\ y\,\phi'(x^2+y^2)\,2x - x\,\phi'(x^2+y^2)\,2y\big\} = \{0,0,0\}$$

si ha l'asserto: il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(x\,\phi(x^2+y^2), y\,\phi(x^2+y^2)\big)$$

e' conservativo per ogni scelta di $\phi \in C^1(\mathbb{R})$.

4. Esercizio

Sia dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left\{x, y + \frac{z}{y^2+z^2}, z - \frac{y}{y^2+z^2}\right\}$$

- *Calcolare rot* $\overrightarrow{F}$.
- *Calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo la curva*

$$\mathfrak{C} := \{x(t) = t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = \cos t\} \quad t \in [0, 2\pi].$$

- *Dire se il campo vettoriale* $\overrightarrow{F}$ *e' conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.*

4.1. Soluzione:

$$\text{rot}\ \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ & & \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ & & \\ x & y + \dfrac{z}{y^2+z^2} & z - \dfrac{y}{y^2+z^2} \end{vmatrix} = \{0, 0, 0\}$$

Il calcolo del lavoro:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{C}) = \int_{\mathfrak{C}} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{T}\,ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{t + (\sin(t) + \cos(t))\cos(t) + (\cos(t) - \sin(t))(-\sin(t))\}\,dt =$$

$$= 2\pi^2 + 2\pi$$

Conservativo ?

Il campo F ha rotore nullo, tuttavia essendo definito in un aperto

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad y^2 + z^2 \neq 0\}$$

non stellato, Ω é tutto $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse x, non puó essere applicato ad F il Lemma di Poincaré.
$\overrightarrow{F}$ potrebbe essere conservativo come pure potrebbe non esserlo: osservato che

$$\overrightarrow{F} = \{x, y, z\} - \{0, \ \frac{-z}{y^2+z^2}, \ \frac{y}{y^2+z^2}\}$$

si riconosce

- nel primo addendo $\{x, y, z\}$ un ben noto campo conservativo, di potenziale $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
- nel secondo addendo un noto campo[1] non conservativo, generalmente indicato come *campo magnetico associato ad un filo percorso da corrente.*

Quindi il campo $\overrightarrow{F}$ non puó essere conservativo.
Una verifica diretta che $\overrightarrow{F}$ non é conservativo poteva essere condotta calcolando il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo la circonferenza

$$\mathfrak{B} := \{x = 0, \ y = \cos(t), \ z = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]\}$$

$$\int_{\mathfrak{B}} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{T}\,ds =$$

[1] In genere scritto con y al posto di z e x al posto di y

$$= \int_0^{2\pi} \{(\cos(t) + \sin(t))(-\sin(t)) + (\sin(t) - \cos(t))\cos(t)\}\ dt =$$

$$= -2\pi \neq 0$$