ANALISI

Soluzioni quarto appello

18 settembre 2012

4.1. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(3x+\frac{1}{16x}\right)^k$$

- *determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge,*
- *determinare per tali x la somma $S(x)$ della serie.*

SOLUZIONE:

La serie assegnata é una serie geometrica di ragione

$$\rho = 3x + \frac{1}{16x}$$

pertanto converge se e solo se $|\rho| < 1$.
Occorre pertanto determinare le soluzioni della disequazione

$$\left|3x+\frac{1}{16x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{48x^2+1}{16x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|48x^2+1\right| < 16\,|x|$$

che tenuto conto che

$$\left|48x^2+1\right| = 48x^2+1 = 48|x|^2+1$$

equivale, a sua volta, a

$$48\,|x|^2 - 16\,|x| + 1 < 0$$

da cui, determinatele radici dell'equazione $48\,\xi^2 - 16\,\xi + 1 = 0$,

$$\xi_1 = \frac{1}{12}, \quad \xi_2 = \frac{3}{12}$$

riesce

$$\left|3x+\frac{1}{16x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1 < |x| < \xi_2$$

La serie pertanto converge nei due intervalli aperti, simmetrici rispetto all'origine,

$$-\xi_2 < x < -\xi_1 \quad \text{e} \quad \xi_1 < x < \xi_2$$
$$-\frac{3}{12} < x < -\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{12} < x < \frac{3}{12}$$

Ricordata l'espressione della somma della serie geometrica di ragione ρ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$$

riesce, nei due intervalli di convergenza,

$$S(x) = \frac{1}{1 - 3x - \dfrac{1}{16x}} = \frac{16x}{16x - 48x^2 - 1}$$

4.2. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y''(t) - 6y'(t) + 5y(t) = 25t$$

- *determinare l'integrale generale,*
- *determinare la soluzione che verifica le condizioni iniziali*

$$y(0) = 8, \quad y'(0) = 11$$

SOLUZIONE:

Integrale generale $y_0(t)$ dell'omogenea:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

da cui

$$y_0(t) = A\,e^t \; + \; B\,e^{5t}$$

Integrale particolare $\overline{y}(t)$ dell'equazione completa:

$$\overline{y}(t) = \alpha t + \beta \quad \rightarrow \quad -6\alpha + 5(\alpha t + \beta) = 25\,t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

Integrale generale dell'equazione assegnata

$$y(t) = A\,e^t \; + \; B\,e^{5t} + 5\,t + 6$$

La soluzione che soddisfa i valori iniziali assegnati corrisponde alla scelta dei coefficienti A e B seguenti

$$\begin{cases} A + B + 6 & = 8 \\ A + 5B + 5 & = 11 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = B = 1$$

Pertanto la soluzione é

$$y(t) = e^t \; + \; e^{5t} + 5\,t + 6$$

4.3. Esercizio. *Sia*

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$$

determinare

- *l'insieme di definizione ed eventuali asintoti (obliqui, verticali, orizzontali),*
- *la derivata prima $f'(x)$ e gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$,*
- *la derivata seconda $f''(x)$ e gli intervalli di concavità e convessità di $f(x)$,*
- *il grafico di f.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La funzione razionale $f(x)$ é definita in tutto $\mathbb{R}$ privato del punto $x_0 = 2$.
Asintoti:

- verticale: $x = 2$
- orizzontale nessuno,
- obliquo: osservato che
$$\frac{x^2 + 6x}{x - 2} = x + 8 + \frac{16}{x - 2}$$
si riconosce che $y = x + 8$ é asintoto obliquo.

La precedente espressione

$$\frac{x^2 + 6x}{x - 2} = x + 8 + \frac{16}{x - 2}$$

permette di calcolare rapidamente le derivate

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 12}{(x - 2)^2}$$

Riesce pertanto

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & x_1 = -2, \quad x_2 = 6 \\ f'(x) > 0 & x < -2, \quad x > 6 \\ f'(x) < 0 & -2 < x < 2, \quad 2 < x < 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \nearrow & x < -2, \quad x > 6 \\ f(x) \searrow & -2 < x < 2, \quad 2 < x < 6 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{32}{(x - 2)^3}$$

Ne segue

$$\begin{cases} x < 2 & f''(x) < 0 \\ x > 2 & f''(x) > 0 \end{cases}$$

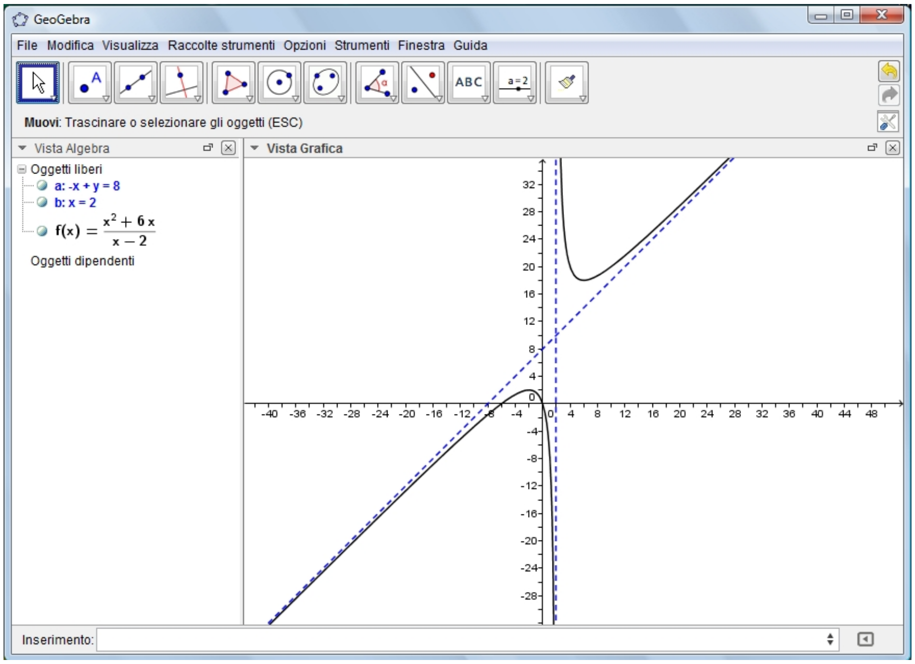

FIGURA 1. $f(x) = \frac{x^2+6x}{x-2}$

Pertanto $f(x)$ é concava per $x < 2$ e convessa per $x > 2$.

4.4. Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int_1^e \frac{\log(x)}{x^2} dx, \qquad \int_0^1 x^2 \arctan(x)\, dx$$

SOLUZIONE:

$$\int_1^e \frac{\log(x)}{x^2} dx = -\int_1^e \log(x) \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{\log(x)}{x}\Bigg|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{\log(x)+1}{x}\Bigg|_1^e = -\frac{2}{e} + 1$$

$$\int_0^1 x^2 \arctan(x)\, dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \arctan(x)\, dx = \frac{x^3}{3} \arctan(x)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{x - \frac{x}{1+x^2}\right\} dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log(2)$$

4.5. Esercizio. *Sia*

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt$$

- *Dire per quali x é derivabile e calcolare la derivata,*
- *scrivere l'equazione della tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$,*
- *determinare il polinomio di Taylor di $F(x)$ di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La $F(x)$ é derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e riesce, dal Teorema fondamentale del Calcolo,

$$F'(x) = \sin(x^2)$$

L'equazione della tangente in un qualsiasi punto x_0 é la seguente

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

da cui, scelto $x_0 = 0$ e tenuto conto che

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0$$

si ottiene come tangente la retta $y = 0$, l'asse x.
Il polinomio di Taylor relativo al punto x_0 e ordine $n = 2$ é il seguente

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2$$

da cui, scelto $x_0 = 0$ e tenuto conto che

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 0$$

si riconosce che il polinomio richiesto é il polinomio identicamente nullo.