ANALISI

Soluzioni terzo appello

22 giugno 2012

3.1. Esercizio. *Assegnata la funzione* $f(x) = |3e^{-x^2} - 1|$

- *indicare dove é derivabile e determinare l'espressione della derivata,*
- *determinare massimo e minimo,*
- *disegnare il grafico.*

SOLUZIONE:

Tenuto presente che

$$3e^{-x^2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 = \log(1/3) \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{\log(3)}$$

e quindi

$$\begin{cases} 3e^{-x^2} - 1 > 0 & |x| < \sqrt{\log(3)} \\ 3e^{-x^2} - 1 < 0 & |x| > \sqrt{\log(3)} \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ coincide, per via del modulo, con

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-x^2} - 1 & -\sqrt{\log(3)} \leq x \leq \sqrt{\log(3)} \\ \\ 1 - 3e^{-x^2} & x < -\sqrt{\log(3)} \cup \sqrt{\log(3)} < x \end{cases}$$

$f(x)$ é continua in tutto $\mathbb{R}$ ed é derivabile in $\mathbb{R}$ privato dei due punti

$$x_1 = -\sqrt{\log(3)}, \qquad x_2 = \sqrt{\log(3)}$$

L'espressione della derivata é la seguente

$$f'(x) = \begin{cases} -6xe^{-x^2} & -\sqrt{\log(3)} < x < \sqrt{\log(3)} \\ \\ 6xe^{-x^2} & x < -\sqrt{\log(3)} \cup \sqrt{\log(3)} < x \end{cases}$$

Tenuto presente che $f(x)$ in quanto modulo é non negativa e che

$$f(x_1) \;=\; f(x_2) \;=\; 0$$

si riconosce immediatamente che

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(x_1) \;=\; f(x_2) \;=\; 0$$

Tenuto conto che

- la derivata si annulla solo per $x = 0$ in cui riesce $f(0) = 2$,

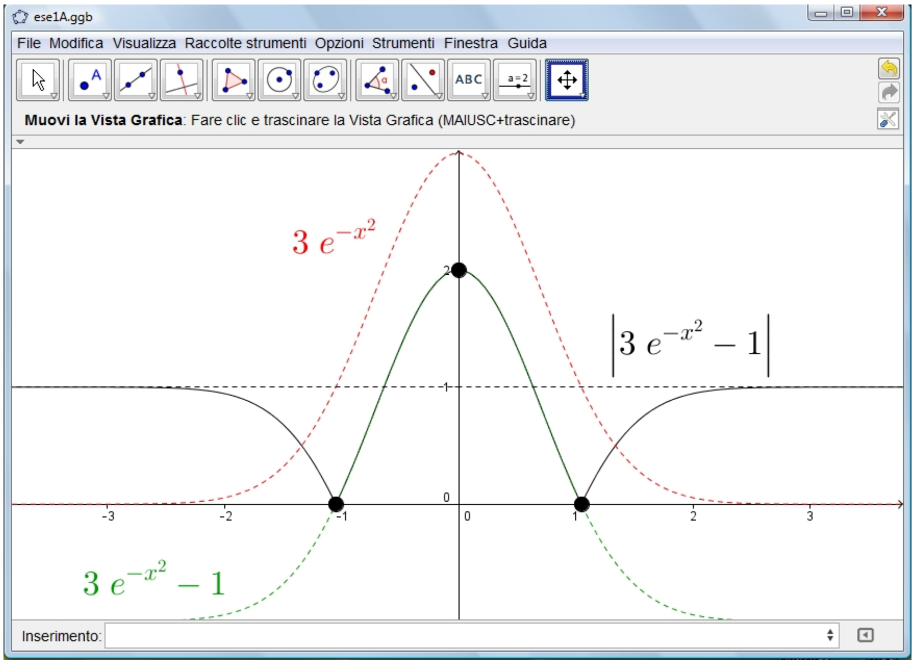

FIGURA 1. $f(x) = |3e^{-x^2} - 1|$

- i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$,

si riconosce che

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 2$$

3.2. Esercizio.

- *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int_0^{3\pi} (\sin(x) + \cos(x))^2 dx, \qquad \int_0^{3\pi} (\sin(x) + \cos(x))^3 dx$$

- *Calcolare, mediante un'opportuna sostituzione, il seguente integrale*

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x} + x}\, dx$$

SOLUZIONE:

$$\boxed{\int_0^{3\pi} (\sin(x) + \cos(x))^2 dx}$$

Tenuto conto che

$$(\sin(x)+\cos(x))^2 = \sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x) = 1+2\sin(x)\cos(x)$$

si ha

$$\int_0^{3\pi} (\sin(x)+\cos(x))^2 dx = 3\pi + \int_0^{3\pi} 2\sin(x)\cos(x)\,dx =$$
$$= 3\pi + \sin^2(x)\Big|_0^{3\pi} = 3\pi$$

$$\boxed{\int_0^{3\pi} (\sin(x)+\cos(x))^3 dx}$$

Tenuto conto che

$$(\sin(x)+\cos(x))^3 = \sin^3(x)+3\sin^2(x)\cos(x)+3\sin(x)\cos^2(x)+\cos^3(x) =$$
$$= \sin(x)\left\{1-\cos^2(x)\right\}+3\sin^2(x)\cos(x)+3\sin(x)\cos^2(x)+\cos(x)\left\{1-\sin^2(x)\right\}$$

si ha

$$\int_0^{3\pi} (\sin(x)+\cos(x))^3 dx = \int_0^{3\pi} \sin(x)\left\{1-\cos^2(x)\right\}\,dx+\int_0^{3\pi} 3\sin^2(x)\cos(x)\,dx+$$
$$+\int_0^{3\pi} 3\sin(x)\cos^2(x)\,dx + \int_0^{3\pi} \cos(x)\left\{1-\sin^2(x)\right\}\,dx = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx}$$

Una sostituzione utile é $x = t^2$ da cui segue $x \in [1,4] \Leftrightarrow t \in [1,2]$,

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t+t^2}\,2t\,dt = \int_1^2 \frac{2}{t+1}\,dt = 2\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

3.3. Esercizio. *Determinare*

- *le soluzioni dell'equazione omogenea $y''+\alpha y = 0$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,*
- *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''+y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

- *le soluzioni dell'equazione non omogenea $y''+\alpha y = \sin(\alpha x)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\alpha < 0: \qquad y_0(x) = c_1 e^{-x\sqrt{-\alpha}} + c_2 e^{x\sqrt{-\alpha}}$$

$$\alpha = 0: \qquad y_0(x) = c_1 + c_2 x$$

$$\alpha > 0: \qquad y_0(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\alpha}) + c_2 \sin(x\sqrt{\alpha})$$

$\boxed{\text{Problema di Cauchy}}$

L'integrale generale dell'equazione omogenea $y'' + y = 0$ é

$$y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Una soluzione particolare della equazione completa, tenuto conto che il termine noto coincide con una delle soluzioni dell'omogenea puó essere cercata nella forma

$$\overline{y}(x) = x(A\cos(x) + B\sin(x))$$

sostituendo si perviene a

$$-2A\sin(x) + 2B\cos(x) = \sin(x) \qquad \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{x\,\cos(x)}{2}$$

Le condizioni iniziali individuano pertanto la soluzione

$$Y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{x\,\cos(x)}{2}$$

La terza domanda consiste nella determinazione della soluzione particolare dell'equazione completa da aggiungere all'integrale generale dell'equazione omogenea giá calcolato al punto 1).

- $\sin(\alpha x)$ non sia soluzione dell'omogenea: allora una soluzione particolare si trova nella forma

  $$\overline{y}(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

  Sostituendo si ricavano

  $$A = 0, \quad B = \frac{1}{1-\alpha^2}$$

- $\sin(\alpha x)$ é soluzione dell'omogenea nei soli casi $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$:

– la soluzione particolare nel primo caso é stata giá determinata nel punto 2) ed é

$$\overline{y}(x) = -\frac{x\,\cos(x)}{2}$$

– nel secondo caso, $\alpha = 0$, l'equazione diventa omogenea $y'' = 0$, l'integrale generale é stato trovato nel punto 1)

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

3.4. Esercizio.

- *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\arctan\left(\frac{2}{n^3+1}\right)$$

- *Determinare la somma della seguente serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

Soluzione:

- Tenuto conto che

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad |\arctan(t)| \leq |t|$$

si riconosce che

$$\forall n \geq 1: \quad \left| n\,\arctan\left(\frac{2}{n^3+1}\right)\right| \leq \frac{2n}{n^3+1} = \frac{2}{n^2+\frac{1}{n}} < \frac{2}{n^2}$$

Dal momento che la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente la serie assegnata sará assolutamente convergente.

- I termini della seconda serie verificano l'uguaglianza

$$\frac{1}{3^k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{6^k}$$

Tenuto conto che le due serie geometriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k}$$

convergono rispettivamente a

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5}$$

risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{3}{10}$$

3.5. Esercizio. *Indicata con*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2+e^{t^2}} dt$$

determinare:

- *in quali intervalli é positiva e in quali é negativa,*
- *l'equazione della tangente al grafico nel punto di ascissa* $x_0 = 0$,
- *il polinomio di Taylor relativo a* $F(x)$ *di ordine* $n = 2$ *e punto iniziale* $x_0 = 0$

SOLUZIONE:

Dal Teorema fondamentale del Calcolo si ha

$$F'(x) = \frac{1}{2+e^{x^2}}$$

da cui si riconosce che $F(x)$ é strettamente crescente: quindi, tenuto conto che $F(0) = 0$, si ha

$$\begin{array}{l} x < 0 \ \rightarrow \ F(x) < 0 \\ x > 0 \ \rightarrow \ F(x) > 0 \end{array}$$

L'equazione della tangente é

$$y = F(0) + F'(0)(x-0) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x$$

Il polinomio di Taylor richiesto

$$P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 \quad \rightarrow \quad P(x) = \frac{1}{3}x$$

tenuto conto che $F''(0) = 0$.