Equazioni Differenziali

Abbiamo studiato le equazioni algebriche, trigonometriche, ora studieremo le equazioni differenziali, cioè equazioni in cui l'incognita (l'oggetto sconosciuto da determinare) è una funzione $y(x)$ e nell'equazione sono presenti anche le derivate di $y(x)$, in altre parole il problema consiste nel trovare una funzione $y(x)$ che soddisfi un'equazione in cui appare y e alcune delle sue derivate. L'equazione differenziale più semplice che abbiamo già visto è

$$y' = g(x), \tag{1}$$

che è risolta grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, ogni soluzione di (1) è data da $y(x) = y_0 + G(x)$, con G primitiva di g e y_0 costante, ovvero

$$G(x) = \int g(t)\, dt \qquad y(x) = y_0 + G(x).$$

Le equazioni differenziali sono di grande importanza perché costituiscono la spina dorsale su cui si basa buona parte della matematica e della fisica, in quanto molti processi della vita reale possono essere descritti da un'equazione differenziale, vediamo un paio di esempi.

Disintegrazione radioattiva

Gli elementi costitutivi della materia sono gli atomi e gli atomi sono composti da un nucleo costituito da particelle chiamate protoni e neutroni e dagli elettroni che gravitano attorno al nucleo. Il neutrone non è una particella stabile, ma si disintegra spontaneamente in un protone, un elettrone e un neutrino. Se indichiamo con $N(t)$ il numero di neutroni presenti al tempo t e con p la probabilità che un neutrone si disintegri in un secondo, si ottiene che

$$N'(t) = -pN(t) \tag{2}$$

cioè la variazione del numero di neutroni (espressa dalla derivata $N'(t)$) è proporzionale al numero di neutroni presenti $N(t)$. Se vogliamo determinare $N(t)$ dobbiamo risolvere (2) . Ovviamente $N(t) \not\equiv 0$, cioè i neutroni sono sicuramente presenti in partenza negli atomi. Dividendo ambo i membri per $N(t)$ si ottiene

$$\frac{d}{dt} \lg N(t) = \frac{N'(t)}{N(t)} = -p,$$

quindi $\lg N(t) = -pt + c$ da cui

$$N(t) = Ae^{-pt}, \qquad \text{con } A = e^c. \tag{3}$$

Questa soluzione dipende dalla costante arbitraria A; d'altronde non possiamo sperare di conoscere il numero di neutroni al tempo t se non conosciamo il numero di neutroni ad un tempo anteriore. Se conosciamo il numero di neutroni al tempo $t = 0$ abbiamo, usando (3) che $N(0) = A$ e dunque $N(t) = N(0)e^{-pt}$. La legge di decadimento espressa in (3) è importante per la datazione in archeologia. Ad esempio, i neutroni di un certo tipo di carbonio decadono secondo la legge (3). Un albero che fissa il carbonio dell'atmosfera assorbendo dall'aria anidride carbonica e liberando ossigeno ha una quantità di carbonio uguale a quella dell'aria, ma se l'albero viene tagliato, smette di assorbire anidride carbonica e il carbonio presente nell'albero inizia a decadere spontaneamente secondo (3), quindi misurando la quantità di carbonio presente nell'albero (scegliendo quindi $t = t_1$ finale) e usando (3) si può risalire alla data in cui l'albero è stato tagliato.

Un po' di storia

Nel passato, come oggi, molti problemi della geometria e della fisica hanno dato luogo a equazioni differenziali. Ad esempio nel 1696 Johann Bernoulli propose sul giornale scientifico del tempo il problema della *brachistocrona* : immaginiamo un corpo che scivoli, sotto l'azione della forza di gravità, senza attrito, lungo una certa curva che congiunge un punto A e un punto B un po' più in basso. Come deve essere fatta la curva affinché il corpo raggiunga B nel minor tempo possibile? Bernoulli si vantò di avere una soluzione che però non voleva pubblicare per incitare i matematici del tempo a cimentarsi sul problema. In particolare egli sfidò suo fratello Jacob con cui a quel tempo era impegnato in una seria contesa e che pubblicamente definì incapace di risolvere il problema. La soluzione trovata da Newton, Leibniz, e dallo stesso Bernoulli era una curva scoperta da poco, la *cicloide*, legata anche allo studio del moto del pendolo. Un secondo problema, anch'esso risalente a Galileo, che conduce ad un'equazione differenziale è quello della ricerca della *catenaria*, cioè della posizione d'equilibrio di una catenella pesante sospesa agli estremi. Anche questo problema fu risolto da Leibniz, dai Bernoulli e dal marchese de l'Hopital per mezzo del calcolo differenziale, e Leibniz se ne servì per sostenere l'importanza delle equazioni differenziali nella risoluzione di problemi.

1 Definizioni e primi risultati

Veniamo ora allo studio della risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali.

Definizioni 1. *1. Un'equazione differenziale si dice di ordine k se la derivata di ordine superiore che appare nell'equazione è di ordine k.*

Quindi, in un'equazione del primo ordine appare la derivata prima della funzione incognita $y(x)$ e non appare nessuna derivata di ordine superiore (ad esempio le equazioni (1) e (2) sono del primo ordine).

2. Un'equazione di dice in forma normale se il coefficiente della derivata di ordine più alto è non nullo.

Dunque in un'equazione in forma normale si può esplicitare la derivata di ordine più alto. Studieremo solo equazioni in forma normale.

3. L'equazione

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0 \tag{4}$$

si dice lineare poiché l'applicazione L che associa ad una funzione y la funzione $L(y) = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_0(x)y$ è lineare, cioè soddisfa $L(\lambda y + \mu v) = \lambda L(y) + \mu L(v)$ per ogni λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Le funzioni $a_i(x)$ sono i coefficienti dell'equazione che è detta omogenea perché non è presente alcuna funzione f che non moltiplica la funzione y o alcuna delle sue derivate.

4. L'integrale generale di un'equazione differenziale è l'insieme di TUTTE le soluzioni dell'equazione.

Dalla definizione di linearità segue che se u, v sono soluzioni dell'equazione (4) allora ogni loro combinazione lineare $y(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$ con α, $\beta \in \mathbb{R}$ è ancora soluzione. Se poi u, v sono soluzioni dell'equazione non omogenea

$$L(y) = f(x), \tag{5}$$

la funzione $w(x) = u(x) - v(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea (4). Quindi, per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione (5) basta sommare UNA soluzione di (5) alla famiglia di TUTTE le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Questo è il metodo per trovare le soluzioni dell'equazione lineare (5):
1. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
2. Trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

una volta risolti i punti 1. e 2. la soluzione dell'equazione (5) sarà la somma delle soluzioni del punto 1. e del punto 2.

Studieremo le equazioni lineari del primo e del secondo ordine e alcuni tipi particolari di equazioni non lineari del primo ordine.

2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

2.1 Equazioni Omogenee

Un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine in forma normale è un'equazione del tipo

$$y' = a(x)y. \tag{6}$$

Seguendo il procedimento di risoluzione già detto, studiamo prima l'equazione omogenea associata a (6),

$$y' = a(x)y, \tag{7}$$

che si può risolvere come abbiamo fatto per (2); infatti dividendo per $y(x)$ e integrando in dx abbiamo

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int a(x)dx$$

Facendo la sostituzione $s = y(x)$ si ha $ds = y'(x)dx$ per cui

$$\int \frac{ds}{s} = \int a(x)dx \;\Rightarrow\; \lg(s) = \int a(x)dx + c,$$

con c costante arbitraria. Ricordando chi è s otteniamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date

$$y_0(x) = Ce^{A(x)}, \qquad A(x) = \int a(t)dt, \quad C = e^c \tag{8}$$

al variare della costante C; dove abbiamo posto il pedice 0 ad indicare che abbiamo risolto l'equazione omogenea.

2.2 equazioni non omogenee

Un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine in forma normale è un'equazione del tipo

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{9}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea useremo il metodo di *variazione delle costanti*, cioè consideriamo la costante C NON COSTANTE ma VARIABILE in dipendenza di x, cioè cerchiamo una soluzione della forma

$$y_p(x) = C(x)e^{A(x)} \tag{10}$$

per essere soluzione y_p deve soddisfare (6), quindi facciamo le derivate e sostituiamo in (6). La derivata prima di y_p è

$$y_p'(x) = e^{A(x)}(C'(x) + C(x)a(x))$$

e sostituendo in (6), otteniamo che deve essere soddisfatta l'equazione

$$e^{A(x)}(C'(x) + C(x)a(x)) = e^{A(x)}C(x)A(x) + b(x) \;\Rightarrow\; e^{A(x)}C'(x) = b(x)$$

per cui

$$C'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Rightarrow C(x) = \int b(t)e^{-A(t)}dt$$

e la soluzione particolare è data da

$$y_p(x) = e^{A(x)} \int b(t)e^{-A(t)}dt.$$

Quindi essendo $b(x)$ il termine noto in (9) una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è data da

$$y_p(x) = e^{A(x)}B(x) \quad \text{dove} \quad B(x) = \int b(t)e^{-A(t)}dt \tag{11}$$

Infine la soluzione di (6) è data dalla somma $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(t)e^{-A(t)}dt + C\right). \tag{12}$$

Questo è l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

2.3 Esercizi

Dopo aver stabilito se sono omogenee o no, si risolvano le seguenti equazioni differenziali

1. $y' = (1 + e^x)y$
2. $y' + x \sin x = 0$
3. $y' + x^4 y = e^{-x^5/5}$
4. $y' = 5y + 7$
5. $y' = (2 + y) \sin x$
6. $y' = \frac{(3-y)}{x^2}$
7. $y' + y \sin x = (1 + \cos x) \sin x$
8. $y' - y = e^{2x}$
9. $y' + \frac{2}{x} y = e^x + 1$
10. $y' = (y + 6)x^3$

2.4 Problema di Cauchy

Abbiamo visto che le soluzioni di un'equazione differenziale si determinano a meno di una costante e la cosa non ci deve sorprendere; come abbiamo notato per il problema del decadimento del neutrone, non possiamo conoscere precisamente un procedimento di variazione se non sappiamo quali erano le condizioni iniziali (nell'esempio la quantità di neutroni presenti all'inizio o alla fine dell'osservazione). Quindi, se imponiamo all'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione di soddisfare determinate condizioni iniziali dovremmo essere in grado di arrivare ad un'unica soluzione. Il problema della determinazione di una soluzione di un'equazione differenziale in dipendenza da certe condizioni iniziali è noto come *Problema di Cauchy*. Facciamo un esempio.
Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 6. \end{cases}$$

L'equazione non è omogenea, risolviamo quindi prima l'equazione omogenea associata $y' = y$. Le soluzioni sono evidentemente le funzioni esponenziali $y_0(x) = Ce^x$. Passiamo a cercare una soluzione dell'equazione non omogenea. Con il metodo di variazione delle costanti otteniamo

$$C' = e^{-x} \Rightarrow C(x) = -e^{-x} + c,$$

per cui l'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x) = ce^x - 1. \tag{13}$$

Ora, tra tutte le soluzioni dobbiamo cercare quella che soddisfa $y(0) = 6$, sostituendo questa informazione in (13) otteniamo che c deve soddisfare $6 = c - 1$, cioè $c = 7$; in definitiva la soluzione cercata è $y(x) = 7e^x - 1$.

Osservazione 1. *Potevamo anche usare direttamente la formula* (12) *per trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione. Infatti, abbiamo che* $a(x) = 1$ *per cui* $A(x) = x$, *e* $b(x) = 1$, *sostituendo in* (12) *abbiamo*

$$y(x) = e^x \left(-e^{-x} + C\right) = Ce^x - 1$$

come avevamo già trovato.

La soluzione di questo esempio è definita in tutto $\mathbb{R}$ come la funzione $f(y) = y + 1$, però può capitare che una soluzione non sia definita in tutto l'intervallo in cui è definita la funzione a secondo membro. Ad esempio consideriamo $f(y) = y^2$ e il problema

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $y = 0$ (la funzione identicamente nulla) non è soluzione perché non soddisfa la condizione iniziale, possiamo quindi dividere per y^2; integrando tra 0 e x (facendo la sostituzione $y(x) = t$) otteniamo

$$\int_1^y \frac{1}{t^2} dt = \int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int_0^x dx \ \Rightarrow \ 1 - \frac{1}{y(x)} = x$$

per cui $y(x) = 1/(1 - x)$ che non è definita in uno mentre $f(y) = y^2$ lo è! Altro problema riguarda l'unicità. Nel primo esempio abbiamo visto che risolvendo l'equazione differenziale e imponendo la condizione iniziale abbiamo ottenuto una unica soluzione. Tuttavia, ci sono casi in cui esistono più funzioni che soddisfano sia l' equazione differenziale che la condizione iniziale. Ad esempio consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $y \equiv 0$ è soluzione poiché soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale; ma ci sono anche soluzioni non costanti, infatti dividendo e integrando otteniamo che anche $y = (x/3)^3$ è soluzione del problema. Quindi ci sono dei casi in cui non c'è unicità di soluzioni. Sotto opportune ipotesi però la soluzione è unica e esiste in tutto l'intervallo in cui è definita la funzione a secondo membro. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1. *Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, e supponiamo che la funzione $f(x, y)$ sia definita nel rettangolo*

$$I \times J = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0 \leq b|\right\}$$

contenente il punto (x_0, y_0). Supponiamo inoltre che $f(x, y)$ soddisfi in $I \times J$ le seguenti ipotesi
1) $f(x, y)$ sia continua nella coppia.
2) $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$ per ogni $x \in I$, y, $z \in J$ con $L > 0$.
Allora esiste un raggio positivo $\delta > 0$ definito da

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \tag{14}$$

tale che per ogni x in $I_\delta = \{|x - x_0| \leq \delta\}$ è definita una e una sola funzione $y(x)$ che risolve

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Dimostreremo solo l'esistenza.
Iniziamo con il dimostrare che esiste una funzione $y(x)$ continua in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \tag{15}$$

Definiamo la seguente successione $y_k(x)$

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= costante = y_0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \\
y_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt, \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

La prima cosa da verificare è che $y_k(x)$ sia ben definita. Poiché y_k è definita da un integrale, bisogna verificare che la funzione che si integra sia continua nell'intervallo (x_0, x) dove integriamo, altrimenti y_k non esiste! Dato che $f(t, y)$ è continua in $I \times J$ e $t \in (x_0, x) \subset I$, se $y_k(x) \in J$ $f(t, y_k(x))$ sarà continua e quindi integrabile. Dobbiamo quindi solo mostrare che $y_k(x) \in J$ per ogni k, cioè che $|y_k(x) - y_0| \leq b$ per ogni k. Lo faremo per induzione; dalla definizione di y_1, otteniamo, usando l'ipotesi 1)

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt \leq M|x - x_0| \leq M\delta, \tag{16}$$

$$\text{dove } \; M = \max_{I \times J} |f(t, y)|. \tag{17}$$

Visto che $\delta < b/M$, abbiamo

$$|y_1(x) - y_0| \leq b, \Rightarrow \; y_1 \in J$$

Supponiamo che $|y_k(t) - y_0| \leq b$ e proviamo che questo implica che anche $y_{k+1} \in J$. Visto che $|y_k(t) - y_0| \leq b$, $y_k(t) \in J$ allora $f(t, y_k(t)$ è continua e integrabile, inoltre $|f(t, y_k(t))| \leq M$, quindi

$$|y_{k+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))|dt \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b.$$

Il principio di induzione ci garantisce che y_k è in J per ogni k, quindi y_k è ben definita e dalla definizione otteniamo che y_k sono anche continue. Ora vogliamo provare che y_k converge uniformemente ad una funzione y, che sarà continua (perché limite uniforme di funzioni continue). Inoltre la convergenza uniforme implicherà che si potrà scambiare l'operazione di limite con quella di integrale e avremo

$$\begin{aligned}
y(x) = \lim_{k \to \infty} y_k(x) &= y_0 + \lim_{k \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{k \to \infty} f(t, y_k(t))dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt
\end{aligned}$$

Ovvero avremo trovato una funzione $y(x)$ continua che soddisfa (15). Quindi tutto il problema è provare la convergenza uniforme di $y_k(x)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
y_{k+1}(x) &= y_{k+1}(x) - y_k(x) + y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x) + \ldots + y_1(x) - y_0 + y_0 \\
&= y_0 + \sum_{n=0}^{k} (y_{n+1}(x)) - y_n(x)).
\end{aligned}$$

Quindi y_k convergerà uniformemente se converge uniformemente la serie di funzioni

$$y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}(x)) - y_n(x)); \tag{18}$$

In realtà proveremo che la serie converge totalmente (ancora meglio!), per farlo dobbiamo provare una diseguaglianza per induzione, cioè proviamo che

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1}. \tag{19}$$

Per $k = 0$ abbiamo che deve essere

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|.$$

e questa l'abbiamo già provata in (16). Ora supponiamo che (19) sia vera per k e la proviamo per $k+1$, dobbiamo quindi mostrare che se al posto di $k+1$ c'è $k+2$ e al posto di k c'è $k+1$, (19) rimane vera. Abbiamo usando l'ipotesi 2),

$$|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{k+1}(t)) - f(t, y_k(t))|dt \leq L \int_{x_0}^{x} |y_{k+1}(t) - y_k(t)|dt.$$

Usando (19) otteniamo

$$\begin{aligned} |y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &\leq \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^{k+1} dt = \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{k+1} dt \\ &= \frac{ML^{k+1}}{(k+2)!}|x - x_0|^{k+2} \end{aligned}$$

che è proprio (19) scritta con al posto di k, $k+1$. Usando (19) nella definizione (18) abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x)) - y_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^k}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^k}{(k+1)!}\delta^{k+1}$$

Usando il criterio del rapporto si vede che la serie numerica su scritta è convergente, quindi la nostra serie di partenza converge totalmente, quindi anche uniformemente. In conclusione abbiamo provato l'esistenza di una funzione continua in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ che soddisfa (15). Ora osserviamo che se $x = x_0$ da (15) abbiamo che $y(x_0) = y_0$; inoltre il teorema fondamentale del calcolo implica che $y'(x) = f(x, y(x))$, proprio quello che volevamo dimostrare.

■

2.5 Esercizi

Dopo aver verificato che le ipotesi del Teorema di Cauchy sono soddisfatte, si calcolino le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy e si determini il loro intervallo di esistenza

1. $\begin{cases} y' + y = e^{-x} + 3\sin x \\ y(1) = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy' - 2y = x^5 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' + \mathrm{tg} x y = \cos x \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (1 - x^2)y' - 2xy = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3 Equazioni Differenziali del primo ordine non lineari

3.1 Equazioni Differenziali del primo ordine a variabili separabili

Tra le equazioni differenziali non lineari trattiamo qui brevemente le equazioni a variabili separabili. Queste sono equazioni che si presentano nella forma

$$y' = f(x)g(y)$$

con f, g funzioni continue. Se esiste y_0 tale che $g(y_0) = 0$, allora sicuramente $y(x) \equiv y_0$ è una soluzione dell'equazione. Per determinare le altre supponiamo $y \neq y_0$, così $g(y) \neq 0$ e possiamo dividere per $g(y)$, ottenendo

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int f(x)dx$$

da cui

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Quindi l'equazione si risolve cercando una primitiva di $1/g$ e una primitiva di f.
Immediatamente riconducibili alle equazioni a variabili separabili sono le equazioni della forma

$$y' = g(ax + by)$$

infatti ponendo $z = ax + by$ otteniamo $z' = a + by'$ e sostituendo arriviamo a studiare l'equazione

$$z' = a + bg(z),$$

che è a variabili separabili.

3.2 Esercizi

Si risolvano le seguenti equazioni differenziali.

1. $y' = \dfrac{x}{y}$
2. $y' = 1 + y^2$
3. $y'(2x + y) = 1$
4. $y' = x \sin y$
5. $y' = \dfrac{1 + 2x}{\cos y}$
6. $yy' = e^{x-y} \sin x$
7. $y' = y^2 \lg(x + 3)$
8. $y' = (2x + y)^2$
9. $y' = e^{3x+y}$
10. $y' = \dfrac{x + y - 1}{2 - x - y}$
11. $\begin{cases} y' = (x + y - 3)^2 \\ y(0) = 6 \end{cases}$
12. $\begin{cases} y' = \dfrac{2x + y + 4}{(2x + y + 3)^2} - 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

4 Equazioni Differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (in forma normale) è data da

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{20}$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ è il termine noto. L'equazione è omogenea se $f(x) \equiv 0$. Come già detto, le soluzioni dell'equazione (20) sono la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una particolare dell'equazione non omogenea.

4.1 Equazioni omogenee: Polinomio caratteristico

Per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea abbiamo bisogno di alcuni fatti preliminari. Dalla teoria degli spazi vettoriali sappiamo che due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ definite in un intervallo $[a, b]$ si dicono linearmente dipendenti se esistono due costanti c_1, c_2 entrambe diverse da zero tali che

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0.$$

Altrimenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ si dicono linearmente indipendenti. Un modo per stabilire se due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono indipendenti è studiare il determinante *Wronskiano* definito da

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Valgono i seguenti risultati.

Proposizione 1. *Se esiste un punto x_0 in cui $W(x_0) \neq 0$, le due funzioni $y_1(x)$ $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti.*

Teorema 2. *Se y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata a (20) in un intervallo $[a, b]$, allora l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea è dato da $y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ al variare delle costanti c_1, c_2.*

Unendo le informazioni della proposizione e del teorema otteniamo che per avere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (20) basta conoscere due soluzioni particolari tali che $W(x_0) \neq 0$ per qualche x_0. Per fare ciò si usa il polinomio caratteristico, più precisamente per trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{21}$$

si cercano le radici dell'equazione

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{22}$$

Posto $\Delta = a^2 - 4b$, si distinguono i seguenti casi

1. $\Delta > 0$, in questo caso si hanno due radici reali e distinte λ_1, λ_2 e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$\boxed{y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}}$$

2. $\Delta = 0$ in questo caso si hanno due radici reali e coincidenti λ_1 e otteniamo il seguenti integrale generale

$$\boxed{y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}, \qquad \lambda_1 = -a/2}$$

3. $\Delta < 0$ in questo caso si hanno due radici complesse e coniugate e si ha

$$\boxed{y_0(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \qquad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ con } \alpha = \frac{-a}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}$$

Si noti che le funzioni che determinano l'integrale generale sono linearmente indipendenti.

Esempio 1. *Consideriamo un corpo di massa m appoggiato su un piano e collegato al muro con una molla di costante elastica k. Indichiamo con $x(t)$ lo spostamento al tempo t della posizione di equilibrio e supponiamo che non ci sia attrito, in modo che l'unica forza che agisce è quella della molla $F = -kx(t)$; allora dalla seconda legge della dinamica otteniamo l'equazione differenziale*

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Il polinomio caratteristico è $m\lambda^2 + k$ da cui le soluzioni dell'equazione sono $x(t) = A\cos(\omega t) + B\mathrm{sen}(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{k/m}$, in questo caso utilizzando formule trigonometrioche si può far vedere che il moto è periodico. Se invece consideriamo anche la presenza dell'attrito che sarà proporzionale e di verso opposto alla velocità del corpo otteniamo l'equazione differenziale

$$mx''(t) = -kx(t) - hx'(t), \qquad h > 0,$$

da cui otteniamo $m\lambda^2 + h\lambda + k = 0$. Questa equazione ha soluzioni diverse a seconda del segno della quantità $h^2 - 4km$.

1. *$h^2 - 4km > 0$ (attrito dominante). In questo caso abbiamo $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + BAe^{\lambda_2 t}$ con A, B costanti arbitrarie e*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}$$

   $\lambda_{1,2}$ sono entrambi negative quindi il moto non è periodico ma si smorza in modo esponenziale.

2. *$h^2 - 4km = 0$ (attrito bilanciato). In questo caso abbiamo $x(t) = (A + Bt)e^{-h/(2m)t}$ con A, B costanti arbitrarie. Quindi il moto è simile a quello di attrito dominante ma si smorza più lentamente.*

3. *$h^2 - 4km < 0$ (attrito debole). In questo caso abbiamo $x(t) = e^{-h/(2m)t}A\cos(qt) + B\mathrm{sen}(qt)$ con A, B costanti arbitrarie e $q = \sqrt{4km - h^2}/(2m)$, in questo caso l'andamento è oscillante e l'ampiezza dell'oscillazione decresce in modo esponenziale.*

4.2 Esercizi

Si risolvano le seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + 3y' = 0$
5. $y'' + 4y = 0$
6. $y'' + y' + y = 0$

4.3 Equazioni non omogenee

Per la determinazione dell'integrale generale dell'equazione (20), come già detto si deve sommare una particolare soluzione dell'equazione non omogenea a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea. Nelle due seguenti sezioni esponiamo due possibili metodi da utilizzare per la determinazione di una soluzione dell'equazione non omogenea.

4.3.1 Metodo di variazioni delle costanti

Come abbiamo fatto per le equazione del primo ordine possiamo cercare una soluzione dell'equazione particolare considerando le costanti non costanti ma dipendenti dalla variabile x. Per spiegare il metodo nel caso di un'equazione del secondo ordine, risolviamo la seguente equazione.

$$y'' - y = -x \tag{23}$$

Studiamo prima l'equazione omogenea; l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 1$ ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm 1$, quindi le soluzioni dell'equazione omgenea sono

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Per cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea consideriamo $A = A(x)$ e $B = B(x)$ e poniamo

$$y_p(x) = A(x)e^x + B(x)e^{-x}. \tag{24}$$

Derivando otteniamo

$$y_p'(x) = e^x(A(x) + A'(x)) + e^{-x}(B'(x) - B(x))$$

Se deriviamo un'altra volta otteniamo anche le derivate seconde di A e B. Inoltre abbiamo solo un'equazione per determinare due incognite A e B, possiamo quindi imporre che A e B soddisfino un'altra equazione (che possiamo scegliere noi); Per semplificare ci conviene imporre che

$$A'(x)e^x + B'(x)e^{-x} = 0 \tag{25}$$

cosi otteniamo $y_p' = A(x)e^x - B(x)e^{-x}$ e nella derivata seconda di y_p appariranno solo le derivate prime di $A(x)$ e $B(x)$. Quindi, imponendo (25), abbiamo che A e B devono soddisfare

$$A'(x) = -B'(x)e^{-2x}; \tag{26}$$

inoltre, derivando ancora e usando (26) otteniamo

$$y_p'' = e^x(A' + A) - e^{-x}(B' - B) = Ae^x + Be^{-x} - 2B'e^{-x} = y_p - 2B'(x)e^{-x}$$

e sostituendo nell'equazione (23) abbiamo

$$-2B'(x)e^{-x} = -x$$

per cui

$$B'(x) = \frac{1}{2}xe^x \Rightarrow B(x) = \frac{1}{2}e^x(x - 1)$$

e sostituendo in (26)

$$A'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(x + 1).$$

Sostituiamo le espressioni trovate per $A(x)$ e $B(x)$ in (24) e abbiamo

$$y_p(x) = \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{2}(x - 1) = x$$

Quindi l'integrale generale dell' equazione (20) è dato da

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-x} + x.$$

4.3.2 Metodo di somiglianza: alcuni esempi

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione (20) può essere utile il cosiddetto metodo di somiglianza, si tratta cioè di cercare una soluzione simile al termine noto ($f(x)$) presente. Vediamo alcuni casi.

1. **Termine noto: prodotto di un polinomio per un esponenziale:**

$$\boxed{f(x) = p(x)e^{\alpha x}}$$

CASO 1. α **non è radice del polinomio caratteristico**.
In questo caso la soluzione particolare dell'equazione non omogenea può essere cercata della forma

$$\boxed{y_p(x) = q(x)e^{\alpha x} \text{ dove } q(x) \text{ è un polinomio dello stesso grado di } p(x)}$$

Ad esempio consideriamo di nuovo l'equazione (23): il termine noto è il prodotto di un polinomio $p(x) = -x$ per un esponenziale $e^{\alpha x}$ in cui $\alpha = 0$. Si può quindi cercare una soluzione del tipo

$$y_p(x) = q(x)e^{0x}, \text{ con } q(x) \text{ di grado 1, cioè } y_p(x) = a + bx, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Sostituendo in (23) otteniamo ($y_p'' = 0$)

$$-a - bx = -x$$

da cui otteniamo $a = 0$, $b = 1$, per cui $y_p(x) = x$ e otteniamo lo stesso risultato avuto con il metodo di variazione delle costanti ma con molta meno fatica. Vediamo un altro esempio. Si consideri l'equazione

$$y'' - y = xe^{2x}$$

L'equazione omogenea è la stessa dell'esempio precedente per cui le radici sono $\lambda_{1,2} = \pm 1$. In questo caso il termine noto è il prodotto di un polinomio di primo grado per l'esponenziale e^{2x} e 2 non è radice del polinomio caratteristico. Possiamo quindi cercare una soluzione dell'equazione non omogenea come prodotto di un polinomio dello stesso grado presente per una funzione esponenziale che ha lo stesso esponente

$$y_p(x) = (ax + b)e^{2x},$$

per cui $y_p'(x) = e^{2x}(a + 2ax + 2b)$ e derivando ancora otteniamo

$$y_p'' - y = e^{2x}(3ax + 3b + 4a) = xe^{2x}$$

per cui

$$a = \frac{1}{3}, \qquad b = -\frac{4}{9},$$

e l'integrale generale è dato da $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-x} + e^{2x}(3x + 4)/9$.
CASO 2. α **è radice del polinomio caratteristico.**
Nel caso in cui nel termine noto è presente una funzione esponenziale $e^{\alpha x}$ il cui coefficiente dell'esponente α è anche una delle radici dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea, bisogna fare una modifica nella forma della soluzione particolare da cercare. Si cerca cioè, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$\boxed{y_p(x) = x^m q(x)e^{\alpha x}}$$

dove m è la molteplicità (1 o 2) della radice α e $q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $p(x)$. Vediamo ancora un esempio. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - y = e^x \tag{27}$$

Abbiamo visto che la soluzione dell'equazione omogenea di (27) è data da $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Il termine noto $f(x) = e^x$ è il prodotto di un polinomio di grado zero (la costante 1) per l'esponenziale di esponente $\alpha x = x$, quindi $\alpha = 1$, che è anche radice del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ con molteplicità 1 (il polinomio è di secondo grado e ha due radici distinte, quindi ciascuna radice ha molteplicità 1). Bisogna quindi cercare una soluzione del tipo

$$y_p(x) = cxe^x$$

Derivando e sostituendo in (27) otteniamo

$$y_p'' - y = 2ce^x = e^x \Rightarrow c = \frac{1}{2},\ \ y_p(x) = \frac{x}{2}e^x.$$

2. **Termine noto: Prodotto di un polinomio per funzioni trigonometriche e esponenziali:**

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l \sin(\beta x)) \\ \text{con } p_m \text{ polinomio di grado } m \text{ e } r_l \text{ polinomio di grado } l \end{array}}$$

Il metodo esposto per il caso di un prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale non varia molto nel caso in cui ci sia una funzione trigonometrica. Come prima distinguiamo due casi.
CASO 1. $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico.
In questo caso si cerca una soluzione particolare della forma

$$\boxed{\begin{array}{c} y_p(x) = e^{\alpha x}(q_{\overline{m}}(x)\cos(\beta x) + s_{\overline{m}}(x)\sin(\beta x)) \\ \text{con } q_{\overline{m}}(x),\ s_{\overline{m}}(x) \text{ polinomi di grado di } \overline{m} = \max\{m, l\}. \end{array}}$$

Ad esempio si risolva l'equazione differenziale

$$y'' - y = x \sin x \tag{28}$$

Abbiamo visto che la soluzione dell'equazione omogenea è $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Il termine noto $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l(x)\sin(\beta x))$ con $p(x) = x$ (di grado $m = 1$), $r_l(x) = 1$ di grado $l = 0$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, quindi $\alpha + i\beta = i$ e dobbiamo controllare se i è radice del polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ che ha solo le radici reali $\lambda_{1,2} = \pm 1$, quindi i non è radice e possiamo cercare una soluzione della forma

$$y_p(x) = q_{\overline{m}} \sin x + s_{\overline{m}} \cos x.$$

con $q_{\overline{m}}$, $s_{\overline{m}}$ polinomi di grado $\overline{m} = \max\{m, l\}$, ora m che è il grado di $p(x)$ è uguale a 1, mentre l che è il polinomio di r_l è zero (poiché r_l è la costante 1), quindi $\overline{m} = \max\{1, 0\} = 1$ cosicché $q_{\overline{m}}$, $s_{\overline{m}}$ sono generici polinomi di grado 1, ovvero $q_{\overline{m}} = (ax + b)$, $s_{\overline{m}} = (cx + d)$ e devo cercare una soluzione della forma

$$y_p(x) = (ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x.$$

Derivando e sostituendo in (28) otteniamo che deve essere soddisfatta questa uguaglianza

$$y_p'' - y_p = \sin x(-2ax - 2b - 2c) + \cos x(-2cx - 2d + 2a) = x \sin x$$

Per cui deve essere

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2b - 2c = 0 \\ 2c = 0 \\ -2d + 2a = 0 \end{cases}$$

da cui $a = d = -1/2$ e $b = c = 0$, e la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è data da $y_p(x) = -x/2 \sin x - 1/2 \cos x$. Ovviamente potevamo ottenere lo stesso risultato con il metodo di variazione delle costanti.
CASO 2. $\alpha + i\beta$ **è radice del polinomio caratteristico.**
In questo caso bisogna cercare una soluzione y_p della forma

$$\boxed{\begin{array}{c} y_p(x) = x^h e^{\alpha x}(q_{\overline{m}}(x)\cos(\beta x) + s_{\overline{m}}(x)\sin(\beta x)) \\ \text{con } q_{\overline{m}}(x),\ s_{\overline{m}}(x) \text{ polinomi di grado di } \overline{m} = \max\{m, l\} \\ \text{e dove } h \text{ è la molteplicità della radice } \alpha + i\beta. \end{array}}$$

Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' + y = x \sin x \tag{29}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ammette radici $\lambda_{1,2} = \pm i$. Il termine noto è $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l \sin(\beta x))$ dove $\alpha = 0$, $\beta = 1$, quindi $\alpha + i\beta = i$ che è radice del polinomio caratteristico, con molteplicità 1 (visto che il polinomio ha due radici distinte), quindi $h = 1$. Inoltre $p_m(x) = 1$ ($m = 0$) e $r_l(x) = x$ ($l = 1$), per cui devo cercare una soluzione dell'equazione non omogenea della forma

$$y_p(x) = x\left[(ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x\right].$$

Deriviamo e sostituiamo in (29). Deve essere soddisfatta questa uguaglianza

$$\cos x(4ax + 2b + 2c) + \sin x(2a - 4cx - 2d) = x \sin x$$

per cui a, b, c, d devono soddisfare

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{4} \\ a = d \\ a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{4} \\ a = d = 0 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (a cui bisogna sommare l' integrale generale dell'equazione omogenea!!!) è

$$y_p(x) = \frac{x}{4}(\sin x - x \cos x).$$

Esempio 2. *Torniamo all'esempio dell'oscillatore armonico in assenza di attrito su un corpo di massa unitaria e questa volta considerando una forza esterna agenti* $f(t) = \cos(\gamma t)$. *L'equazione differenziale è* $x'' + \omega^2 x = \cos(\gamma t)$. *Abbiamo già visto che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è* $x_0(t) = A\cos(\omega t) + B\mathrm{sen}(\omega t)$, *con* A, B *costanti arbitrarie. Se cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con il metodo di somiglianza poniamo* $x_p(t) = C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \mathrm{sen}(\gamma t)$. *Calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione otteniamo*

$$(\omega^2 - \gamma^2)[C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \mathrm{sen}(\gamma t)] = \cos(\gamma t)$$

che è risolubile se $\gamma \neq \omega$ *con* $C_2 = 0$ *e*$C_1 = 1/(\omega^2 - \gamma^2)$ *pertanto otteniamo il seguente integrale generale.*

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t).$$

Se ω *e* γ *sono vicine l'ampiezza dell'oscillazione aumenta e nel caso limite in cui la frequenza della forza è uguale alla frequenza dell'oscillatore le ampiezze crescono linearmente (il corpo va in risonanza).*

4.4 Esercizi

Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

1. $y'' - y = x^2$
2. $y'' + 3y' = (x^3 - 1)e^x$
3. $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$
4. $y'' - y' = x$
5. $y'' + 3y = xe^x$
6. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$
7. $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$
8. $y'' - 2y' + y = \sin x$
9. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$
10. $y'' - 2y' + y = e^x$
11. $y'' + 3y = x$
12. $y'' + 3y = \sin x$
13. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$
14. $y'' - 2y' - 3y = x^2 e^x$
15. $y'' + y' = \sin x + x\cos x$
16. $y'' + y = xe^x \sin x$
17. $y'' + y = 7\cos x$

5 Risoluzioni degli Esercizi

5.1 Equazione del primo ordine lineari

Dopo aver stabilito se sono omogenee o no, si risolvano le seguenti equazioni differenziali

1. $y' = (1 + e^x)y$ **Soluzione:** $y(x) = Ce^{x+e^x}$.
   Risoluzione. Dividendo e integrando, otteniamo
   $$\lg y = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int (1 + e^x)dx = x + e^x + c$$
   e passando all'esponenziale otteniamo la soluzione.
2. $y' + x\sin x = 0$ **Soluzione:** $y(x) = x\cos x - \sin x + c$.
   Risoluzione. Per ottenere la soluzione in questo caso basta applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale e integrare, poiché si ha $y'(x) = -x\sin x$ per cui
   $$y(x) = -\int x\sin x = x\cos x - \int \cos x = x\cos x - \sin x + c.$$

3. $y' + x^4 y = e^{-x^5/5}$ **Soluzione:** $y(x) = e^{-x^5/5}(C + x)$.
Risoluzione. Questa equazione non è omogenea, infatti è della forma $y' = a(x)y+b(x)$ con $a(x) = -x^4$, $b(x) = e^{-x^5/5}$. Per risolvere l'equazione omogenea usiamo la formula (8) della teoria; si ha $a(x) = -x^4$ per cui $A(x) = -x^5/5$, da cui
$$y_0(x) = Ce^{-x^5/5}$$
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea possiamo usare la (11) della teoria e visto che $b(t) = e^{-t^5/5}$, $A(t) = -t^5/5$ si ha
$$B(x) = \int b(t)e^{-A(t)}dt = \int e^{-t^5/5}e^{t^5/5}dt = \int dt = x$$
Per cui $y_p(x) = xe^{-x^5/5}$ e l'integrale generale dell'equazione data è $y(x) = y_0(x)+y_p(x) = e^{-x^5/5}(C+x)$.

4. $y' = 5y + 7$ **Soluzione:** $y(x) = Ce^{5x} - 7/5$.
Risoluzione. L'equazione è della forma $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = 5$, $b(x) = 7$, per cui la soluzione dell'equazione omogenea è data da $y_0(x) = Ce^{5x}$. Mentre una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è data da
$$e^{A(x)}B(x) \quad \text{dove} \quad B(x) = \int b(t)e^{-A(t)}dt;$$
in questo caso
$$B(x) = \int 7e^{-5t}dt = -\frac{7}{5}e^{-5x}$$
per cui $y_p(x) = -7/5$ e la soluzione è data dalla somma $y_0 + y_p$.

5. $y' = (2 + y)\sin x$ **Soluzione:** $y(x) = Ce^{\cos x} - 2$.
Risoluzione. L'equazione è della forma $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = \sin x$, $b(x) = 2\sin x$; per cui la soluzione dell'equazione omogenea è data da $y_0(x) = e^{-\cos x}$; mentre una soluzione dell'equazione non omogenea è data da $y_p(x) = e^{A(x)}B(x)$ con
$$B(x) = \int b(t)e^{-A(t)}dt, \Rightarrow B(x) = \int 2\sin te^{\cos t}dt = -2e^{\cos x}$$
per cui $y_p = -2$. Si poteva ottenere lo stesso risultato osservando che l'equazione è anche a variabili separabili per cui si può avere una soluzione osservando che c'è la soluzione costante $y = -2$ e che le altre soluzioni sono si hanno dividendo e integrando
$$\lg(y(x) + 2) = \int \frac{dy}{y + 2} = \int \frac{y'(x)}{y(x) + 2}dx = \int \sin xdx$$
da cui $y(x) + 2 = Ce^{\cos x}$ come avevamo già ottenuto.

6. $y' = \frac{(3-y)}{x^2}$ **Soluzione:** $y(x) = 3 - Ce^{1/x}$.
Risoluzione. Come prima si possono seguire due strade, o scrivere l'equazione nella forma $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = -1/x^2$ e $b(x) = 3/x^2$ o procedere come per le equazioni a variabili separabili; usando questo secondo metodo abbiamo
$$-\lg(3 - y(x)) = \int \frac{dy}{3 - y} = \int \frac{y'(x)}{3 - y(x)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}$$
da cui $3 - y(x) = Ce^{1/x}$.

7. $y' + y\sin x = (1+\cos x)\sin x$ **Soluzione:** $\quad y(x) = 2 + \cos x + Ce^{-\cos x}$.
Risoluzione. L'equazione è della forma $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = -\sin x$, $b(x) = (1+\cos x)\sin x$; per cui $y_0(x) = Ce^{\cos x}$, mentre con il metodo di variazione (ad esempio) delle costanti possiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. e otteniamo, integrando per parti

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (1+\cos x)\sin x e^{-\cos x} = (1+\cos x)e^{-\cos x} - \int +\sin x e^{-\cos x} \\ &= (1+\cos x)e^{-\cos x} + e^{-\cos x} \end{aligned}$$

da cui $y_p(x) = 2 + \cos x$.

8. $y' - y = e^{2x}$ **Soluzione:** $\quad y(x) = e^{2x} + Ce^x$.
Risoluzione. Si ha $a(x) = 1$, $b(x) = e^{2x}$. Da cui $y_0(x) = Ce^x$ e $y_p(x) = e^{2x}$.

9. $y' + \frac{2}{x}y = e^x + 1$ **Soluzione:** $\quad y(x) = C/x^2 + 1/2e^{2x}(1 - 1/x + 1/x^2)$.
Risoluzione. Si ha $a(x) = -2/x$, $b(x) = e^x + 1$. Da cui $y_0(x) = C/x^2$, $y_p(x) = \frac{e^{2x}}{2}(1 - 1/x + 1/x^2)$.

10. $y' = (y+6)x^3$ **Soluzione:** $\quad y(x) = Ce^{x^4/4} - 6$.
Risoluzione. Si può risolvere l'esercizio o con le formule di risoluzione per le equazioni differenziali lineari del primo ordine o con il metodo per le equazioni a variabili separabili. Con il primo metodo si ha $a(x) = x^3$, $b(x) = 6x^3$; per cui $y_0(x) = Ce^{x^4/4}$, $y_p(x) = e^{A(x)}B(x)$ con

$$B(x) = \int b(t)e^{-A(t)} = \int 6x^3 e^{-x^4/4} = -6e^{-x^4/4}$$

da cui $y_p(x) = -6$.
Con il metodo per le equazioni a variabili separabili, osserviamo prima di tutto che $y = -6$ è soluzione costante perché rende nullo il secondo membro. Altrimenti possiamo dividere per $y+6$ e integrare. Otteniamo $\lg(y+6) = x^4/4 + c$, da cui $y + 6 = Ce^{x^4/4}$.

5.2 Problema di Cauchy

1. L'equazione è $y' = f(x,y)$ con $f(x,y) = e^{-x} + 3\sin x - y$ che è definita e continua in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Se prendiamo un rettangolo intorno al punto iniziale $I \times J = [1-r, 1+r] \times [2-r, 2+r]$ con $r > 0$ dobbiamo mostrare che esiste una costante L tale che $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$; abbiamo

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2|,$$

allora basta prendere $L = 1$ affinché questa diseguaglianza sia soddisfatta. Quindi ci aspettiamo di trovare una unica soluzione del problema. Si ha $a(x) = -1$, $b(x) = e^{-x} + 3\sin x$, per cui $y_0(x) = Ce^{-x}$ e con il metodo di variazione delle costanti abbiamo

$$C = \int (1 + 3\sin x e^x)dx = x + 3\int \sin x e^x.$$

Si ha, integrando per parti

$$3\int \sin x e^x = 3\sin x e^x - 3\int \cos x e^x = 3\sin x e^x - 3\cos x e^x - 3\int \sin x e^x$$

Per cui

$$6\int \sin x e^x = 3\sin x e^x - 3\cos x e^x \;\Rightarrow\; 3\int \sin x e^x = \frac{3}{2}e^x(\sin x - \cos x),$$

e $y_p(x) = x + \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)$. L'integrale generale è dato da $y(x) = Ce^{-x} + x + 3/2(\sin x - \cos x)$. Deve anche essere $y(1) = 2$, ponendo $x = 2$ e $y(1) = 2$ abbiamo

$$2 = \frac{C}{e} + 1 + \frac{3}{2}(\sin 1 - \cos 1) \;\Rightarrow\; C = \frac{e}{2}[2 - 3(\sin 1 - \cos 1)]$$

e l'unica soluzione è data da

$$y(x) = \frac{e}{2}[2 - 3(\sin 1 - \cos 1)]e^{-x} + x + \frac{3}{2}(\sin x - \cos x).$$

che è definita in tutto $\mathbb{R}$.

2. $f(x, y) = 2y/x + x^4$ e l'insieme di definizione di f è $E = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$. e f è continua in E. Inoltre se $(x, y) \in [1 - r, 1 + r] \times [1 - r, 1 + r]$ con $0 < r < 1$,

$$|f(x, y_1)| - f(x, y_2)| \leq 2\frac{|y_1 - y_2|}{x} \leq 2\frac{|y_1 - y_2|}{1 - r}$$

e la seconda ipotesi del teorema di Cauchy è soddisfatta con $L = 2/(1 - r)$. Inoltre, $a(x) = 2/x$, $y_0(x) = Cx^2$ e con il metodo di variazione delle costanti abbiamo $C' = x^2$, da cui $y_p(x) = x^5/3$ e $y(x) = x^2(C + x^3/3)$. Imponendo $y(1) = 1$ abbiamo $1 = C + 1/3$, da cui $C = 2/3$ e la soluzione è $y(x) = x^2/3(2 + x^3)$ definita in tutto $\mathbb{R}$.

3. $f(x, y) = \cos x - \mathrm{tg}(xy)$ che è definita in $E = \{(x, y) : x \neq \pi/2 + k\pi\}$ ed è ivi continua. Inoltre preso $I \times J = [\pi/4 - \delta, \pi/4 + \delta] \times [1 - \delta, 1 + \delta]$ con $0 < \delta < \pi/4$ per $(x, y) \in I \times J$ si ha

$$|f(x, y_1)| - f(x, y_2)| \leq |\mathrm{tg}x||y_1 - y_2| \leq (1 + \delta)|y_1 - y_2|$$

e la seconda ipotesi del teorema di Cauchy è soddisfatta con $L = (1 + \delta)$. Per calcolare la soluzione osserviamo che $a(x) = -\mathrm{tg}x$, per cui $y_0(x) = C \cos x$. Con il metodo di variazione delle costanti abbiamo $C' = 1$, e $y_p(x) = x \cos x$; quindi l'integrale generale è dato da $y(x) = C \cos x + x \cos x$; imponendo $y(\pi/4) = 1$ si ha $1 = \sqrt{2}/2(C + \pi/4)$, esplicitando C si ottiene $C = \sqrt{2} - \pi/4$ e l'unica soluzione del problema è data da

$$y(x) = \cos x(\sqrt{2} - \pi/4 + x).$$

che è definita in tutto $\mathbb{R}$.

4. Si ha

$$f(x, y) = \frac{2xy + x^2}{1 - x^2}.$$

f è definita in $E = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ e ed è continua in E. Inoltre in $I \times J = [-1 + \delta, 1 - \delta] \times [-\delta, \delta]$ con $0 < \delta < 1$ si ha

$$|f(x, y_1)| - f(x, y_2)| \leq \frac{2|x|}{1 - x^2}|y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$$

per cui le ipotesi del teorema di Cauchy sono soddisfatte con $L = 2$. Per trovare la soluzione osserviamo che $a(x) = -2x/(1 - x^2)$, e $y_0(x) = C(1 - x^2)$. Cercando una soluzione del tipo $y_p(x) = C(x)(1 - x^2)$ otteniamo che $C(x)$ deve essere

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{-x^2}{1 - x^2}dx = \int \frac{1 - x^2 - 1}{1 - x^2}dx = \int dx + \frac{-1}{1 - x^2}dx \\ &= x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx = x - \frac{1}{2}[\lg(1 + x) - \lg(1 - x)]. \end{aligned}$$

Quindi $y_p(x) = (1 - x^2)[x - \frac{1}{2}(\lg(1 + x) - \lg(1 - x))]$. Imponendo la condizione iniziale abbiamo $0 = C$ e quindi la soluzione è $y(x) = y_p(x)$. Il suo intervallo di esistenza è dato da $E = (-1, 1)$.

5.3 Equazioni differenziali del primo ordine non lineari

1. $y' = \dfrac{x}{y}$
Risoluzione. **Soluzione:** $y(x)$ tale che $y^2 - x^2 = c$. Moltiplicando per y e integrando abbiamo ($t = y(x)$)
$$\int t dt = \int y(x)y'(x)dx = \int x dx$$
da cui $t^2/2 = x^2/2 + c$ per cui $y^2 - x^2 = c$, che sono ipoerboli equilatere per $c \neq 0$ e sono le rette $y = \pm x$ se $c = 0$.

2. $y' = 1 + y^2$ **Soluzione:** $y(x) = \mathrm{tg}(x + c)$.
Risoluzione. Dividendo per $1 + y^2$ e integrando si ha
$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{y'(x)dx}{1+y^2} = \int dx$$
da cui $\mathrm{arctg} y = x + c$, la funzione $\mathrm{arctg} s$ è crescente in $\mathbb{R}$, per cui invertibile e possiamo dire che $y(x) = \mathrm{tg}(x + c)$.

3. $y'(2x + y) = 1$ **Soluzione:** y tale che $y(x) - 1/2 \lg(1 + 4x + 2y) = 4x + c$.
Risoluzione. Poniamo $z = 2x + y$ e otteniamo
$$z' = \frac{1}{z} + 2 = \frac{1+2z}{z} \Rightarrow \frac{z'z}{1+2z} = 1.$$
Integrando otteniamo l'insieme delle soluzioni in forma implicita $z - 1/2 \lg(1 + 2z) = 2x + c$, e $y(x) - 1/2 \lg(1 + 4x + 2y) = 4x + c$.

4. $y' = x \sin y$ **Soluzione:** $y = \pi/2 + k\pi$**,** $y(x) = 2\mathrm{arctg}(e^{x^2/2} + c)$.
Risoluzione. Le funzioni costanti $y = \pi/2 + k\pi$ sono soluzioni dell'equazione. Per trovare soluzioni non costanti, dividiamo per $\sin y$ e abbiamo ($s = y(x)$)
$$\int \frac{ds}{\sin s} = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$$
L'integrale a primo membro si risolve con la sostituzione $t = \mathrm{tg}(s/2)$ da cui $\sin s = 2s/(1 + s^2)$ e $ds = 2/(1 + t^2)dt$ per cui
$$\int \frac{ds}{\sin s} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \lg t = \lg\left(\mathrm{tg}\frac{y(x)}{2}\right)$$
da cui $y(x) = 2\mathrm{arctg}(e^{x^2/2+c})$.

5. $y' = \dfrac{1+2x}{\cos y}$ **Soluzione:** $y = k\pi$**,** $y(x) = 2\mathrm{arctg}\frac{e^{x^2+x+c}-1}{1+e^{x^2+x+c}}$.
Risoluzione. Le soluzioni costanti sono $y = k\pi$, per trovare le altre dividiamo per $\cos y$ e integriamo; come nell'esercizio precedente poniamo $s = y(x)$ e $t = \mathrm{tg}(s/2)$ da cui $\cos s = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ e $ds = 2/(1 + t^2)dt$ per cui ci riconduciamo a
$$\int \frac{2dt}{1-t^2} = x + x^2 + c$$
calcolando l'integrale otteniamo
$$\frac{1 + \mathrm{tg}(y/2)}{1 - \mathrm{tg}(y/2)} = e^{x^2+x+c}$$
e esplicitando $y(x)$
$$y(x) = 2\mathrm{arctg}\frac{e^{x^2+x+c} - 1}{1 + e^{x^2+x+c}}.$$

6. $yy' = e^{x-y}\sin x$ **Soluzioni:** y tale che $e^y(y-1) = e^x/2(\sin x - \cos x) + c$.
Risoluzione. Moltiplicando per e^y otteniamo

$$\int ye^y dy = \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

Per cui l'integrale generale è dato in forma implicita: $e^y(y-1) = e^x/2(\sin x - \cos x) + c$.

7. $y' = y^2 \lg(x+3)$ **Soluzione:** y tale che $y(x) = -1/[x(\lg(x+3)-1) - 3\lg(x+3) + c]$.
Risoluzione. Dividiamo per y^2 e otteniamo

$$-\frac{1}{y(x)} = \int \lg(x+3)dx = x\lg(x+3) - \int \frac{x+3-3}{x+3}dx = x(\lg(x+3)-1) - 3\lg(x+3) + c.$$

8. $y' = (2x+y)^2$ **Soluzione:** $y(x) = \sqrt{2}\mathrm{tg}(\sqrt{2}(x+c)) - 2x$.
Risoluzione. Poniamo $z(x) = 2x + y(x)$ da cui $z' = 2 + y'$ e sostituendo nell'equazione otteniamo $z' = z^2 + 2$, che è a variabili separabili; dividiamo per $z^2 + 2$ e abbiamo

$$\int \frac{dz}{z^2+2} = \int dx = x + c$$

Ora

$$\int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Per cui $y(x) = \sqrt{2}\mathrm{tg}(\sqrt{2}(x+c)) - 2x$.

9. $y' = e^{3x+y}$ Soluzione: $y(x) = \lg\left[\frac{-3Ce^{3x}}{Ce^{3x}-1}\right] - 3x$.
Risoluzione. Poniamo $z(x) = 3x + y(x)$ da cui $y' = z' - 3$, sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo l'equazione a variabili separabili $z' = 3 + e^z$; dividiamo per $3 + e^z$ e integriamo, otteniamo ($s = e^z$)

$$\int \frac{dz}{3+e^z} = x + c \Rightarrow \int \frac{ds}{s(3+s)} = x + c.$$

Per cui

$$\lg\left(\frac{s}{3+s}\right) = 3x + c$$

quindi

$$y(x) = \lg\left[\frac{-3Ce^{3x}}{Ce^{3x}-1}\right] - 3x.$$

10. $y' = \dfrac{x+y-1}{2-x-y}$ **Soluzione:** y tale che $y - (x+y)^2/4 = -x/2 + C$.
Risoluzione. Poniamo $z = x + y$, $z' = 1 + y'$, e otteniamo la seguente equazione differenziale.

$$z' = 1 + \frac{z-1}{2-z} = \frac{1}{2-z}.$$

Moltiplicando per $2 - z$ e integrando, otteniamo

$$\int (2-z)dz = x + c \Rightarrow 2z - \frac{z^2}{2} = x + c$$

da cui otteniamo l'equazione in forma implicita $y - (x+y)^2/4 = -x/2 + C$.

11. $\begin{cases} y' = (x+y-3)^2 \\ y(0) = 6 \end{cases}$
Soluzione: $y(x) = 3 - x + \mathrm{tg}(x+c)$, con $c = \mathrm{arctg}3$.
Risoluzione. Poniamo $z = x + y - 3$ e otteniamo $z' = 1 + z^2$ e integrando $\mathrm{arctg}z = x + c$ da cui $z = \mathrm{tg}(x+c)$ e $y(x) = 3 - x + \mathrm{tg}(x+c)$. Imponendo la condizione iniziale abbiamo $c = \mathrm{arctg}3$.

12. $\begin{cases} y' = \dfrac{2x+y+4}{(2x+y+3)^2} - 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ 10
Soluzione: $y(x)$ tale che $(2x+y+3)^2/2 - y + \lg(2x+y+4) = 3x + 3 + c$ con $c = 25/2 - 5 + \lg(6)$.
Risoluzione. Poniamo $z = 2x + y + 3$ da cui

$$z' = 2 + \frac{z+1}{z^2} - 2 \Rightarrow \int \frac{z^2 dz}{z+1} = x + c.$$

Ora

$$\int \frac{z^2 dz}{z+1} = \int \frac{z(z+1) - z}{z+1} dz = \int z\, dz - \int dz + \int \frac{dz}{z+1}.$$

Calcolando gli integrali, otteniamo $z^2/2 - z + \lg(z+1) = x + c$ e tornando a $y(x)$ abbiamo $(2x+y+3)^2/2 - y + \lg(2x+y+4) = 3x+3+c$. La condizione iniziale per $z(x)$ diventa $z(0) = y(0)+3 = 2+3 = 5$ per cui $25/2 - 5 + \lg(6) = c$.

5.4 Equazioni del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ **Soluzioni:** $y_0(x) = Ae^x + Be^{2x}$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, per cui $y_0(x) = Ae^x + Be^{2x}$.

2. $y'' - y = 0$ **Soluzioni:** $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ le cui radici sono $\lambda_{1,2} = \pm 1$, per cui $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

3. $y'' - 2y' + y = 0$ **Soluzioni:** $y_0(x) = e^x(A + Bx)$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ le cui radici sono coincidenti $(\Delta = 0)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, per cui $y_0(x) = e^x(A + Bx)$.

4. $y'' + 3y' = 0$ **Soluzioni:** $y_0(x) = A + Be^{-3x}$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$ le cui radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, per cui $y_0(x) = A + Be^{-3x}$.

5. $y'' + 4y = 0$ **Soluzioni:** $y_0(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ le cui radici sono immaginarie $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, per cui $y_0(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$.

6. $y'' + y' + y = 0$ **Soluzioni:** $y_0(x) = e^{-x/2}(A\cos(\sqrt{3}/2)x + B\sin(\sqrt{3}/2)x)$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ le cui radici sono complesse $(\Delta = 1 - 4 = -3 < 0)$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, per cui $y_0(x) = e^{-x/2}(A\cos(\sqrt{3}/2)x + B\sin(\sqrt{3}/2)x)$.

5.5 Equazioni del II ordine lineari non omogenee.

1. $y'' - y = x^2$ **Soluzioni:** $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - x^2 - 2$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ per cui $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Il termine noto $f(x) = x^2$ è prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = x^2$ di

grado 2, e $\alpha = 0$ che non è radice del polinomio caratteristico, per cui cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = (ax^2+bx+c)$ derivando e sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo $2a-ax^2-bx-c = x^2$; dovendo essere i due polinomi a destra e a sinistra uguali, le costanti a, b, c devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -b = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

e una soluzione particolare dell'equazione è data da $y_p(x) = -x^2 - 2$.

2. $y'' + 3y' = (x^3 - 1)e^x$ **Soluzioni:** $y(x) = A + Be^{-3x} + y_p(x)$
Risoluzione. L'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = A + Be^{-3x}$. Usando il metodo di variazione delle costanti cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = A(x) + B(x)e^{-3x}$, da cui $y_p' = A' + B'e^{-3x} - 3Be^{-3x}$ da cui possiamo imporre

$$A' + B'e^{-3x} = 0 \tag{30}$$

dunque $y_p'' = (-3B' + 9B)e^{-3x}$ e sostituendo nell'equazione si ottiene $B' = -1/3(x^3 - 1)e^{4x}$ e (**??**) implica $A' = 1/3(x^3 - 1)e^x$, quindi una soluzione particolare è data da $y_p(x) = A(x) + B(x)e^{-3x}$ dove $A(x)$ e $B(x)$ sono date da

$$A(x) = \int \frac{1}{3}(x^3 - 1)e^x dx, \qquad B(x) = \int -\frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{4x}.$$

3. $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$ **Soluzioni:** $y(x) = A + Be^{-x} + x - \frac{1}{2}\lg(1 + e^{2x}) - \text{arctg}(e^x)e^{-x}$
Risoluzione. Le radici del polinomio caratteristico sono date da $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Il termine noto non è del tipo polinomio per funzione esponenziale, possiamo quindi solo usare il metodo di variazione delle costanti; poniamo $y_p(x) = A(x)+B(x)e^{-x}$ da cui derivando ($y_p' = A'+B'e^{-x}-Be^{-x}$)e imponendo

$$A' + B'e^{-x} = 0 \tag{31}$$

otteniamo $y_p''(x) = -Be^{-x} + Be^{-x}$ e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo che

$$B = -\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

ponendo $t = e^x$ l'integrale diventa

$$-\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = -\int \frac{dt}{1 + t^2} = -\text{arctg}t = -\text{arctg}(e^x)$$

per trovare $A(x)$ usiamo (31); ne risulta $A(x) = \displaystyle\int dx/(1 + e^{2x})$ con la stessa sostituzione otteniamo

$$\int \frac{dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{dt}{t(1 + t^2)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t\,dt}{t^2 + 1} = \lg t - \frac{1}{2}\lg(1 + t^2) = x - \frac{1}{2}\lg(1 + e^{2x}).$$

Da cui $y_p(x) = x - \frac{1}{2}\lg(1 + e^{2x}) - \text{arctg}(e^x)e^{-x}$.

4. $y'' - y' = x$ **Soluzioni:**$y(x) = A + Be^x - x(1/2x + 1)$
Risoluzione. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. $f(x) = x = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = x$ di grado 1 e $\alpha = 0$ che è radice di molteplicità 1 del polinomio caratteristico; bisogna quindi

cercare una soluzione del tipo $y_p(x) = x(ax + b)$ derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene $2a - 2ax - 2b = x$ per cui

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -1/2$ e $b = -1$ e una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è data da $y_p(x) = -x(1/2x + 1)$.

5. $y'' + 3y = xe^x$ **Soluzioni:** $y(x) = A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x) + e^x/8(2x - 1)$
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 3$ le cui radici sono immaginarie $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$. Il termine noto è del tipo $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = x$ di grado 1 e $\alpha = 1$ che non è radice del polinomio caratteristico, quindi cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y_p(x) = (ax + b)e^x$; deriviamo e sostituiamo nell'equazione differenziale, ottenendo $e^(4ax + 4b + 2a) = xe^x$ da cui

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b + 2a = 0 \end{cases}$$

da cui $a = 1/4$ e $b = -1/8$. Per cui $y_p(x) = e^x/8(2x - 1)$.

6. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$ **Soluzioni:**$y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - 1/(65)(7\cos 2x + 4\sin 2x)$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico ha radici $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Il termine noto è del tipo $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l\sin(\beta x))$ con $\alpha + i\beta = 2i$ che non è radice del polinomio caratteristico, $p_m = 1$, $r_l = 0$, per cui il massimo tra i gradi dei polinomi p_m, r_l è 1 e cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$. Derivando e sostituendo nell'equazione otteniamo che deve essere soddisfatta l'eguaglianza $\cos 2x(-7ax - 4cx + 4c - 7b - 2a - 4d) + \sin 2x(4ax - 7cx - 4a - 7d - 2c + 4b) = \cos 2x$ da cui

$$\begin{cases} -7a - 4c = 0 \\ 4c - 7b - 2a - 4d = 1 \\ 4a - 7c = 0 \\ -4a - 7d - 2c + 4b = 0 \end{cases}$$

da cui $b = -7/(65)$, $d = -4/(65)$ e $y_p(x) = -1/(65)(7\cos 2x + 4\sin 2x)$.

7. $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$ **Soluzioni:** $y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + x/4e^{3x}$
Risoluzione. Il polinomio caratteristico è lo stesso dell'esercizio precedente. Il termine noto è del tipo $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = 1$ di grado zero, $\alpha = 3$ che è radice di molteplicità 1 del polinomio caratteristico, quindi cerchiamo $y_p(x) = cxe^{3x}$. Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo $e^{3x}(4c) = e^{3x}$ da cui $c = 1/4$ e $y_p(x) = x/4e^{3x}$.

8. $y'' - 2y' + y = \sin x$ **Soluzioni:** $y(x) = e^x(A + Bx) + 1/2\sin x$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico ha una radice di molteplicità due λ_1; il termine noto è del tipo $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l\sin(\beta x))$ con $\alpha + i\beta = i$ che non è radice del polinomio caratteristico, $p_m = 0$, $r_l = 1$, per cui il massimo tra i gradi dei polinomi p_m, r_l è 1 e cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$. Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo che deve essere soddisfatta l'uguaglianza $\cos x(-2cx - 2a - 2d + 2c) + \sin x(2ax + 2b - 2c - 2a) = \sin x$ per cui

$$\begin{cases} -2c = 0 \\ -2a - 2d + 2c = 0 \\ 2a = 0 \\ 2b - 2c - 2a = 1 \end{cases}$$

da cui $c = a = d = 0$, $b = 1/2$ e $y_p(x) = 1/2\sin x$.

9. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$ **Soluzioni:** $y(x) = e^x(A + Bx) + xe^{2x}$.
Risoluzione. Come nell'esercizio precedente il polinomio caratteristico ha un'unica radice di molteplicità due $\lambda = 1$ e il termine noto è $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = x$, $\alpha = 2$ che non è radice del polinomio caratteristico, per cui cerchiamo $y_p(x) = (ax + b)e^{2x}$ derivando e sostituendo nell'equazione otteniamo che $a = 1$, $b = 0$.

10. $y'' - 2y' + y = e^x$ **Soluzioni:** $y(x) = e^x(A + Bx) + 1/2x^2e^x$.
Risoluzione. Questa volta il termine noto $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = 1$ di grado zero e $\alpha = 1$ che è radice del polinomio caratteristico di molteplicità due, quindi cerchiamo $y_p(x) = ax^2e^x$. Derivando e sostituendo otteniamo che $a = 1/2$.

11. $y'' + 3y = x$ **Soluzioni:** $y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x + x/3$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico ha radici $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$; il termine noto è del tipo $f(x) = e^{\alpha x}p(x)$ con $p(x) = x$ e $\alpha = 0$ che non è radice del polinomio caratteristico, quindi cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = ax + b$, si vede subito che $b = 0$ e $a = 1/3$.

12. $y'' + 3y = \sin x$ **Soluzioni:** $y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x + 1/2\sin x$.
Risoluzione. Il polinomio caratteristico ha radici $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$; il termine noto è del tipo $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l\sin(\beta x))$ con $\alpha + i\beta = i$ che non è radice del polinomio caratteristico, $p_m = 0$, $r_l = 1$, per cui il massimo tra i gradi dei polinomi p_m, r_l è 1 e cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$. Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo che deve essere soddisfatta l'uguaglianza $\cos x(2ax + 2b + 2c) + \sin x(2cx + 2d - 2a) = \sin x$ da cui $a = b = c = 0$, $d = 1/2$ e $y_p(x) = 1/2\sin x$.

13. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$ **Soluzioni:** $y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - 1/4xe^{-x}$.
Risoluzione. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$; il termine noto è del tipo $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = 1$ di grado zero e $\alpha = -1$ che è radice di molteplicità 1, per cui cerco una soluzione $y_p(x) = axe^{-x}$. Derivando e sostituendo otteniamo che $a = -1/4$.

14. $y'' - 2y' - 3y = x^2e^x$ **Soluzioni:** $y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - e^x/4(x^2 + 1)$.
Risoluzione. In questo caso il termine noto è $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $p(x) = x^2$ e $\alpha = 1$ che non è radice del polinomio caratteristico, quindi cerco $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. Derivando e sostituendo ottengo $b = 0$, $a = c = -1/4$.

15. $y'' + y' = \sin x + x\cos x$ **Soluzioni:** $y(x) = A + Be^{-x} + \frac{1}{2}\cos x(-x + 2) + \frac{1}{2}\sin x(x - 1)$.
Risoluzione. Le radici sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$: Il termine noto è $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l\sin(\beta x))$ con $\alpha + i\beta = i$ che non è radice del polinomio caratteristico, $p_m = x$, $r_l = 1$, per cui il massimo tra i gradi dei polinomi p_m, r_l è 1 e cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$. Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo che deve essere soddisfatta l'uguaglianza $\cos x(2c - ax - b + a + cx + d) + \sin x(-2a - cx - d + c - ax - b) = x\cos x + \sin x$ da cui $a = -1/2$, $c = 1/2$, $d = -1/2$, $b = 1$.

16. $y'' + y = xe^x\sin x$ **Soluzioni:** $y(x) = A\cos x + B\sin x + e^x/2[(-x + 2)\cos x + \sin x(x - 1)]$.
Risoluzione. Il termine noto è della forma $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l\sin(\beta x))$ con $\alpha + i\beta = 1 + i$ che non è radice del polinomio caratteristico, $p_m = 1$, $r_l = x$, per cui il massimo tra i gradi dei polinomi p_m, r_l è 1 e cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = e^x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x]$. Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo che deve essere soddisfatta l'uguaglianza $e^x[\cos x(ax + cx + 2c + a + d) + \sin x(cx - ax - 2a + c - b)]$ da cui $a = d = -1/2$, $c = 1/2$, $b = 1$, e $y_p(x) = e^x/2[(-x + 2)\cos x + \sin x(x - 1)]$.

17. $y'' + y = 7\cos x$ **Soluzioni:** $y(x) = A\cos x + B\sin x + 7/2x\sin x$.
Risoluzione. Il termine noto è della forma $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + r_l\sin(\beta x))$ con $\alpha + i\beta = i$ che è radice di molteplicità 1 del polinomio caratteristico, $p_m = 1$, $r_l = 1$, per cui il massimo tra i gradi

dei polinomi p_m, r_l è 0 e cerchiamo una soluzione del tipo $y_p(x) = x(a\cos x + b\sin x)$. Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo che deve essere soddisfatta l'uguaglianza$-2a\sin x + 2b\cos x = 7\cos x$ da cui $a = 0$ e $b = 7/2$ e $y_p(x) = 7/2x\sin x$.