Il limite notevole $\lim_n \sqrt[n]{n^b} = 1$ e sue conseguenze

2 novembre 2011

In questi appunti vogliamo dare una dimostrazione del limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \qquad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

ed analizzare alcune conseguenze. In particolare, vogliamo mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n^b} = 0 \qquad \text{per ogni } b > 0.$$

Il limite (1) può essere immediatamente dedotto dal risultato che segue scegliendo $x_n = n^b$:

Proposizione 1. *Sia $(x_n)_n$ una successione di numeri positivi. Se esiste (finito o infinito) il*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

allora esiste anche il limite della successione $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_n$ e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}. \tag{2}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\ell := \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{3}$$

e distinguiamo tre casi.

Caso $0 < \ell < +\infty$. Vogliamo mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n > \nu_\varepsilon. \tag{4}$$

Fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$. A meno di scegliere un ε più piccolo, possiamo sempre supporre che $\ell - \varepsilon > 0$. ([1]) Avremo bisogno di questa ipotesi più avanti. Per non appesantire la dimostrazione in termini di notazioni, poniamo $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/2$. Per ipotesi, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \tilde{\varepsilon} < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \ell + \tilde{\varepsilon} \qquad \text{per ogni } n > n_\varepsilon,$$

da cui risulta, essendo $x_n > 0$,

$$x_n\,(\ell - \tilde{\varepsilon}) < x_{n+1} < x_n\,(\ell + \tilde{\varepsilon}) \qquad \text{per ogni } n > n_\varepsilon. \tag{5}$$

Applicando iterativamente le disuguaglianze (5) si ottiene, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n_\varepsilon + k} > x_{n_\varepsilon + k - 1}\,(\ell - \tilde{\varepsilon}) > x_{n_\varepsilon + k - 2}\,(\ell - \tilde{\varepsilon})^2 > \cdots > x_{n_\varepsilon}\,(\ell - \tilde{\varepsilon})^k$$

e

$$x_{n_\varepsilon + k} < x_{n_\varepsilon + k - 1}\,(\ell + \tilde{\varepsilon}) < x_{n_\varepsilon + k - 2}\,(\ell + \tilde{\varepsilon})^2 < \cdots < x_{n_\varepsilon}\,(\ell + \tilde{\varepsilon})^k.$$

Si noti che la condizione $\ell - \tilde{\varepsilon} > 0$ è cruciale. In definitiva, abbiamo dimostrato che

$$\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell - \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}\,(\ell - \tilde{\varepsilon})^n < x_n < (\ell + \tilde{\varepsilon})^n\,\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell + \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}} \qquad \text{per ogni } n > n_\varepsilon,$$

da cui, passando alla radice n–esima,

$$\sqrt[n]{\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell - \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}}\,(\ell - \tilde{\varepsilon}) < \sqrt[n]{x_n} < (\ell + \tilde{\varepsilon})\,\sqrt[n]{\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell + \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}} \qquad \text{per ogni } n > n_\varepsilon. \tag{6}$$

Ricordiamo adesso che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell - \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell + \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}} = 1.$$

Scegliamo un intero $\nu_\varepsilon > n_\varepsilon$ abbastanza grande in modo che

$$1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{\ell - \tilde{\varepsilon}} < \sqrt[\nu_\varepsilon]{\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell + \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}} < \sqrt[\nu_\varepsilon]{\frac{x_{n_\varepsilon}}{(\ell - \tilde{\varepsilon})^{n_\varepsilon}}} < 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\ell + \tilde{\varepsilon}}.$$

Tenendo conto di queste disuguaglianze, dalla (6) otteniamo

$$\ell - 2\tilde{\varepsilon} < \sqrt[n]{x_n} < \ell + 2\tilde{\varepsilon} \qquad \text{per ogni } n > \nu_\varepsilon,$$

da cui la tesi, ossia (4), visto che $\varepsilon = 2\tilde{\varepsilon}$.

[1] Infatti, se la relazione (4) è soddisfatta per un certo ε, sarà soddisfatta anche per tutti gli epsilon più grandi.

Caso $\ell = 0$. È sufficiente dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \sqrt[n]{x_n} < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n > \nu_\varepsilon.$$

L'argomento è identico a quello appena visto.

Caso $\ell = +\infty$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $M > 0$, esiste $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{x_n} > M \qquad \text{per ogni } n > \nu_M.$$

L'argomento è identico a quello usato nel primo caso, con M al posto di $\ell - \varepsilon$.

$\square$

Vediamo alcune conseguenze di questo risultato.

Corollario 1. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0.$

Dimostrazione. Usando le proprietà del logaritmo e la sua continuità (che dimostreremo a tempo debito), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \log(\sqrt[n]{n}) = \log\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \log(1) = 0.$$

$\square$

Corollario 2. *Sia $(k_n)_n$ una successione divergente di interi, cioè $\lim_n k_n = +\infty$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(k_n)}{k_n} = 0.$$

Dimostrazione. È una semplice conseguenza del Corollario 1. La dimostrazione è lasciata allo studente come esercizio. $\square$

Corollario 3. *Sia $(a_n)_n$ una successione divergente di numeri reali positivi, cioè $\lim_n a_n = +\infty$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n)}{a_n} = 0. \tag{7}$$

In particolare,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n^b} = 0 \qquad \textit{per ogni } b > 0. \tag{8}$$

Dimostrazione. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq n_0$. Dalla monotonia della funzione logaritmo, si ha, per ogni $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{\log(a_n)}{a_n} < \frac{\log(1 + [a_n])}{[a_n]} = \frac{\log(1 + [a_n])}{1 + [a_n]} \cdot \frac{1 + [a_n]}{[a_n]},$$

dove abbiamo indicato con $[a_n]$ la parte intera del numero a_n, Applicando il Teorema dei due carabinieri e il Corollario 2 con $k_n = 1 + [a_n]$, si ottiene la (7). Per dimostrare la (8), si osservi che risulta

$$\frac{\log(n)}{n^b} = \frac{1}{b} \frac{\log\left(n^b\right)}{n^b},$$

e la tesi segue applicando la (7) alla successione $a_n = n^b$. $\square$