STUDIO DI FUNZIONI

20 novembre 2011

I risultati concernenti le derivate prime e seconde di una funzione ci permettono di studiare il comportamento di una funzione arrivando a disegnarne approssimativamente il grafico. Questo studio può essere riassunto in alcune regolette pratiche (da interpretare con intelligenza e flessibilità) che sono qui riassunte:

1. Determinare prima di tutto il dominio di una funzione. Se la funzione è definita da una formula (o anche più di una formula) si deve quindi determinare l'insieme per cui quella formula a senso, ricordando, ad esempio che $\log x$ è definita solo per $x > 0$, che $\sqrt[n]{x}$ definita per tutti gli x se n è dispari ma solo per $x \geq 0$ se n è pari. Parimenti bisogna ricordare che un quoziente $f(x)/g(x)$ è definito solo se $g(x) \neq 0$, e che le funzioni trigonometriche inverse sono definite solo negli intervalli nei quali prendono i valori le corrispondenti funzioni trigonometriche.

2. Determinare, se esistono i limiti agli estremi del dominio di definizione. In pratica, il dominio di definizione della funzione sarà un'unione di intervalli disgiunti (chiamiamo intervalli anche le semirette e la retta intera). Gli estremi di questi intervalli disgiunti ed eventualmente $+\infty$ e $-\infty$ saranno gli estremi del dominio di definizione. Tentando di calcolare questi limiti (che possono anche non esistere e non essere nemmeno $+\infty$ o $-\infty$), troveremo, se esistono, quelli che in molti libri di testo sono chiamati gli asintoti orizzontali e verticali. Un asintoto orizzontale è una retta $y = \ell$, parallela all'asse delle x, dove $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, ovvero $\ell = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Un asintoto verticale è invece una retta $x = b$ parallela all'asse delle y, per la quale si verifica che $\lim_{x\to b^+} f(x) = \pm\infty$, ovvero $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Ovviamente se questi ultimi limiti esistono la funzione f non è definita nel punto b, ma questo punto è un estremo di un intervallo in cui f è definita.

3. Può convenire a questo punto derminare le intersezioni del grafico della

funzione con gli assi. Trovare cioè gli eventuali punti dell'asse delle x tali che $f(x) = 0$ e l'eventuale punto dell'asse delle y tale che $f(0) = y$.

4. Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza dalla funzione sulla base del segno della derivata prima.

5. Determinare i punti critici, e quelli dove la funzione è definita ma non è derivabile, (compresi i punti appartenenti al dominio, ma che non sono "punti interni" del dominio, ad esempio 0 per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$). Tra i punti critici e quelli per i quali non è possibile definire la derivata determinare i punti di massimo e di minimo relativi ed assoluti (se esistono).

6. Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della derivata $f'(x)$ e quindi gli intervalli di convessità e concavità della funzione.

7. Determinare gli eventuali asintoti obliqui cercando le rette $y = ax + b$ con $a \neq 0$ tali che $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$.

Queste regolette pratiche non esauriscono quello che si può fare per studiare una funzione e tracciarne il grafico. Ad esempio in molti casi saremo aiutati dal fatto che una funzione è "pari" o è "dispari". In altri casi si possono presentare opportune simmetrie rispetto a punti diversi da zero. Ad esempio la funzione x^2 è pari, e la funzione x^3 è dispari. Ne segue che la funzione $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ è simmetrica rispetto alla retta $x = -1$ e la funzione $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$ è antisimmetrica rispetto alla stessa retta. Altre volte sarà facile constatare che la funzione è periodica, che esiste cioè un numero $T \neq 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni numero reale x.

Vediamo ora un semplice esempio pratico. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}.$$

Proviamo ad applicare le regolette.

1. Il dominio della funzione è la semiretta $[0, +\infty)$

2. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

dove peraltro la funzione risulta definita e continua e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Si osserva che esiste un "asintoto orizzontale" che è la retta $y = 1$. Non ci sono invece asintoti verticali o obliqui.

3. Il grafico della funzione interseca l'asse delle x solo nel punto 0 ed in questo punto il valore della funzione è zero. in altre parole il grafico interseca ambedue gli assi nel punto $(0,0)$.

4. La derivata della funzione è, per $x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

La derivata è sempre positiva e quindi la funzione è sempre crescente.

5. La funzione non è derivabile nel punto 0 e non si annulla mai negli altri punti. Il punto 0 è quindi un punto di minimo (assoluto) per la funzione. La funzione non ha punti di massimo in quanto, per ogni x reale $f(x)<1$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

6. La derivata è sempre decrescente e quindi la funzione è sempre concava.

7. Non ci sono asintoti obliqui.

A questo punto è facile tracciare il grafico della funzione f.

Proviamo ora con un altro esempio e cioè la funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{1+x^2}.$$

1. Il dominio della funzione è tutta la retta reale. Osserviamo questo punto che la funzione è pari e che possiamo limitarci a studiarla per $x\geq 0$, dove assume la forma $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Studieremo quindi quest'ultima funzione.

2.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Pertanto la funzione ha un asintoto orizzontale che è la retta $y=0$.

3. Come per la funzione precedente, il grafico della funzione interseca gli assi solo nel punto $(0,0)$.

4. La derivata della funzione (per $x>0$) è

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

che è positiva per $0<x<1$, si annulla quando $x=1$ ed è negativa se $1<x$. Pertanto la funzione è crescente nell'intervallo $[0,1)$ e decrescente nell'intervallo $(1,+\infty)$.

5. La funzione non è derivabile nel punto 0 dove vale zero, tutti gli altri valori sono positivi, pertanto 0 è un punto di minimo assoluto. L'unico punto critico è 1 dove la derivata è zero, essendo positiva prima di 1 e negativa dopo 1. Pertanto 1 è un punto di massimo ed il massimo della funzione è 1/2.

6. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2)x(2(x^2-1)-(x^2+1))}{(1+x^2)^4},$$

che (sempre per $x > 0$) è positiva per $x > \sqrt{3}$. Pertanto la derivata è crescente e la funzione è convessa per $x > \sqrt{3}$ e la derivata è decrescente e la funzione è concava per $0 < x < \sqrt{3}$.

7. Non ci sono asintoti obliqui.

Una volta disegnato il grafico della funzione per $x > 0$ la condizione $f(x) = f(-x)$ ci permetterà di disegnare il grafico su tutta la retta reale. Avremmo anche potuto studiare direttamente la funzione definita su tutta la retta reale, ricordando che la parità implica che $f'(x) = -f'(-x)$ (regola di derivazione delle funzioni composte).