DUE CARATTERIZZAZIONI DELLA COMPLETEZZA DEI REALI

Nelle dispense che utilizziamo come libro di testo i numeri reali sono definiti come un campo ordinato completo cioè un campo ordinato per il quale valgono le seguenti proprietà

Assioma 1 *L'insieme dei numeri interi positivi non è limitato superiormente (proprietà archimedea)*

Assioma 2 *Per ogni successione* $I_n = [a_n, b_n]$ *di intervalli chiusi e limitati tale che* $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ *l'intersezione* $\bigcap_n I_n$ *contiene almeno un elemento (proprietà degli intervalli incapsulati).*

Ricordiamo che un "campo" è un insieme nel quale sono definite due operazioni, rispettivamente la somma ed il prodotto, che verificano gli assiomi ("leggi" nella terminologia delle dispense) indicati alle pagine 7 e 8 delle dispense.

Un "campo ordinato" è un campo nel quale è definita anche una relazione di ordine

$$a < b$$

che soddisfa alla proprietà transitiva ($a < b$ e $b < c$ implica $a < c$), e per la quale due elementi distinti sono sempre paragonabili, in altre parole, dati due elementi distinti si verifica $a < b$ oppure $b < a$. Perché si possa parlare di "campo ordinato" la relazione di ordine deve essere legata alle operazioni di campo dalle regole:

1. se $a < b$ allora per ogni c risulta $a + c < b + c$,
2. se $a < b$ e $0 < c$ risulta $ac < bc$

Osserviamo che la "proprietà archimedea" ha senso in un campo ordinato, perché ogni campo ordinato contiene una copia dei numeri interi positivi (e quindi anche dei numeri interi negativi e dei numeri razionali). Basta infatti osservare che se si indica con 1 l'elemento neutro rispetto al prodotto, risulta

$$0 < 1 < 1 + 1 = 2 < 2 + 1 = 3 < \ldots,$$

come è facile dimostrare.

Esercizio 1 *Dimostrare che in un campo ordinato l'elemento neutro rispetto al prodotto è sempre maggiore dell'elemento neutro rispetto alla somma e dedurne le disuguaglianze*

$$0 < 1 < 1 + 1 = 2 < 2 + 1 = 3 < \cdots < n < n + 1 < \ldots.$$

Un campo ordinato in cui valgono la proprietà archimedea e la proprietà degli intervalli incapsulati si chiama anche *campo ordinato completo*, e queste due proprietà o assiomi sono anche chiamate le proprietà di completezza. Si può dimostrare che, in un certo senso (che può essere precisato solo con strumenti della logica matematica), esiste un unico campo ordinato completo, è lecito quindi identificare un campo ordinario completo con i numeri reali ed indicarlo con il simbolo $\mathbb{R}$.

In questi appunti vogliamo mostrare come le due proprietà (o assiomi) di completezza possono essere sostituiti da un unico assioma che è il seguente:

Assioma 3 *Se E è un insieme non vuoto limitato superiormente allora esiste un elemento che indichiamo con il simbolo $\sup E$ che è il più piccolo dei maggioranti di E. Questo numero si chiama l'estremo superiore di E.*

Dimostreremo quindi che se vale l' Assioma 3, si possono dimostrare l'assioma 1 el'assioma 2.

Teorema 1 *In un campo ordinato in cui vale l'Assioma 3 vale anche l'Assioma 1.*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per contraddizione. Se l'insieme dei numeri interi positivi fosse limitato superiormente, esisterebbe il suo estremo superiore $\sup \mathbb{N} = \lambda$. Varrebbe quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ la condizione

$$n \leq \lambda.$$

Ma λ sarebbe anche il più piccolo dei maggioranti di $\mathbb{N}$ pertanto $\lambda - 1$ non sarebbe un maggiorante. Questo significa che esisterebbe un elemento $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$m > \lambda - 1.$$

Ma allora sarebbe anche

$$m + 1 > \lambda,$$

che contraddice l'ipotesi che λ sia un maggiorante dell'insieme $\mathbb{N}$.

Teorema 2 *In un campo ordinato in cui vale l'Assioma 3 vale anche l'Assioma 2.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che valga l'Assioma 3 e che I_n sia una successione di intervalli incapsulati. Questo significa che $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$. Osserviamo che tutti gli a_n soddisfano $a_n \leq b_k$ qualsiasi sia k. Questo è vero infatti quando $n = k$ mentre se $n < k$ allora $a_n \leq a_k \leq b_k$ e se $n > k$ $a_n \leq b_n \leq b_k$. Sia ora

$$\lambda = \sup\{a_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Poiché λ è un maggiorante di tutti gli a_n risulta, per ogni n, $a_n \leq \lambda$. D'altra parte anche b_n è un maggiorante di tutti gli a_n e poiché λ è il più piccolo dei maggioranti di tutti gli a_n deve essere $\lambda \leq b_n$. Abbiamo dimostrato che per tutti gli n risulta $a_n \leq \lambda \leq b_n$. In altre parole abbiamo dimostrato che λ appartiene all'intersezione di tutti gli I_n e che quindi questa intersezione contiene almeno un elemento.

Abbiamo così dimostrato che l' Assioma 3 è più forte degli Assiomi 1 e 2. Infatti dall'Assioma 3 possiamo dedurre l'Assioma 1 e l'Assioma 2. Vale però anche il seguente teorema.

Teorema 3 *In un campo ordinato in cui valgono l'Assioma 1 e l'Assioma 2 vale anche l'Assioma 3.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che E sia un insieme non vuoto limitato superiormente. Dobbiamo trovarne il più piccolo dei maggioranti utilizzando l'Assioma 1 e l'Assioma 2. Per ipotesi esiste un maggiorante b con la proprietà cioè che $E \subset (-\infty, b]$. Poiché E non è vuoto esisterà un elemento a tale che non sia vuoto l'insieme $E \cap [a, b]$ (basterà prendere ad esempio come a un elemento di E stesso). Poniamo $a = a_1$ e $b = b_1$, $I_1 = [a_1, b_1]$. Questo sarà il primo di una successione di intervalli incapsulati. L'intervallo I_2 sarà uno dei due intervalli ottenuti dividendo a metà I_1. Più precisamente sarà uno dei due intervalli $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Quale dei due intervalli? Quello di destra se esso contiene qualche punto di E e quello di sinistra se $E \cap [\frac{a_1 b_1}{2}, b_1]$ è vuoto. In questo modo non solo risulterà non vuoto $[a_2, b_2]$, ma b_2 risulterà ancora un maggiorante di E. In altre parole la nostra scelta di $[a_2, b_2]$ fa sì che tutti gli elementi $x \in E$ soddisfino $x \leq b_2$, mentre esiste almeno un elemento $x \in E$ che soddisfa $x \geq a_2$. Ora procediamo allo stesso modo dividendo in due intervalli l'intervallo $[a_2, b_2]$ e scegliendo dei due intervalli quello più a destra purché contenga punti di E. In generale l'intervallo $I_n = [a_n, b_n]$ sarà scelto tra i due intervalli consecutivi in cui si divide I_{n-1}, in modo che sia quello più a destra che contiene elementi di E. Avremo allora una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$ di lunghezza $b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$, costruita in modo che tutti gli estremi b_n siano maggioranti di E, mentre gli estremi a_n hanno la proprietà che esiste almeno un elemento $x \in E$ che soddisfa $x \geq a_n$. L'Assioma 2 implica che esista almeno un punto λ che appartiene a tutti gli intervalli I_n. In altre parole esiste almeno un punto λ che soddisfa per tutti gli n

$$a_n \leq \lambda \leq b_n. \tag{1}$$

L'Assioma 1 implica che le disuguaglianze (1) possono essere soddisfatte da un solo punto λ. Infatti se un altro punto $\mu > \lambda$ soddisfacesse a queste disuguaglianze, risulterebbe anche

$$0 < \mu - \lambda \leq b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1}, \tag{2}$$

ovvero, sempre per ogni n

$$n \leq 2^{n-1} \leq \frac{b-a}{\mu - \lambda}, \tag{3}$$

che contraddice l'Assioma 1. Abbiamo così identificato un unico punto λ che soddisfa le (1). Resta da dimostrare che λ è l'estremo superiore di E. Dobbiamo cioè dimostrare che λ è un maggiorante di E e che è il più piccolo dei maggioranti. Se λ non fosse un maggiorante di E esisterebbe un punto $x \in E$ tale che $x > \lambda$. Posta $d = x - \lambda$ la distanza tra λ e x, possiamo trovare k tale che $b_k - a_k < d$ (anche qui si usa l'Assioma 1). Risulterebbe allora (dal momento che $\lambda \geq a_k$),

$$x = \lambda + d > \lambda + b_k - a_k \geq a_k + b_k - a_k = b_k. \tag{4}$$

Questo contraddice il fattoche tutti i b_k sono maggioranti di E. Dobbiamo ora mostrare che λ è il più piccolo dei maggioranti. Se ci fosse un maggiorante μ di E con $\mu < \lambda$, potremmo trovare ancora k tale che $(b_k - a_k) < \lambda - \mu$. Ne seguirebbe allora (poiché $a_k \leq \lambda \leq b_k$) che $a_k > \mu$ e quindi anche a_k sarebbe un maggiorante di E, cosa, come abbiamo visto, falsa per costruzione.